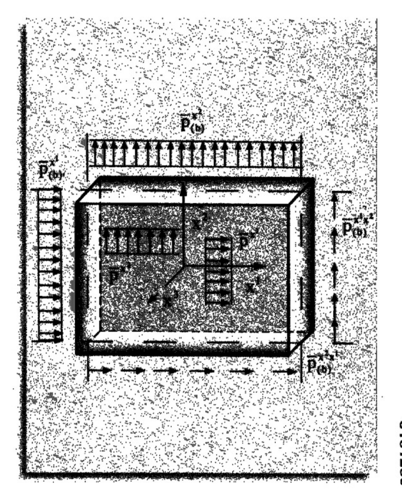
طرق الطاقة

في ميكانيك الإنشاءات الخطي

طرق العناصر المنتهية

«الستاتيك»




د. م. سليمان أبو دياب

طرق الطاقة في ميكانيك الإنشاءات الخطي
طرق العناصر المنتهية «الستاتيك»

- دار الحصاد للنشر والتوزيع: سوريا ـ دمشق
برامكة ـ بجانب وكالة سانا ـ طابق أول
هاتف و فاكس: 2126326 ص. ب : 4490
- دار الكلمة للنشر والتوزيع
دمشق ـ برامكة جانب سانا: ص.ب: 2229
- الطبعة الأولى ١٩٩٨/١٠٠٠نسخة

الدكتور المهندس سليمان أبو دياب

طرق الطاقة
في ميكانيك الإنشاءات الخطي

طرق العناصر المنتهية
«الستاتيك»

إلى

رجل ظلمته الطبيعة وآمل ألا يظلمه التاريخ

إلى

سعد الله ونوس

مقدمة

ليس الهدف من هذا الكتاب إيجاد كافة الحلول المعلقة لمشاكل نظرية المرونة وإنما يهدف قبل كل شيء إلى تمكين القارىء المبتدىء من الإلمام بالعرض العصري لمشاكل هذه النظرية و تزويده بالمعلومات الضرورية و الأسلوب المنهجي لدخول مجالات البحث العلمي و تحضيره و تنمية قدراته العلمية بحيث يستطيع معالجة معظم مشاكل النظرية . لهذا الغرض تم طرح المسائل التي يجب معالجتها ، بدءاً من أساسياتها وبشكلها الرياضي العام ثم اختيرت نماذج مبسطة لتوضيح أسلوب المعالجة . ولتجنب الالتباس والغموض في فهم أسلوب المعالجة درست المسائل حتى في تفاصيلها الرياضية والإنشائية. وعرضت المواضيع الإنشائية بحبكة رياضية معاصرة تعتمد على مبادىء حساب الموتّرات و قواعد حساب المتغيرات .

يتألف الكتاب من سبعة فصول تدرس ميكانيك الإنشاءات في المجال الخطي وتعالج مسائله بطرق العناصر المنتهية . يبدأ الفصل الأول منها بشروحات للمفاهيم الأساسية الإنشائية و الرياضية تتضمن عرضاً للجمل الإحداثية المستخدمة انسجاماً مع مبادىء حساب الموتّرات وتعاريفاً لموتّرة الإجهادات و التشوهات و تحويلاتها بين الجمل الإحداثية المختلفة . و يختم الفصل الأول بإيجاز بعض أساسيات قواعد حساب المتغيرات .

يدرس الفصل الثاني معادلات نظرية المرونة الأساسية لحالة جسم فراغي معرض لمؤثرات خارجية وتحدد فيه جوانب المسائل النظرية في إطارها العام .

تشتق مبادىء الطاقة الأساسية وهي مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري ومبدأ الطاقة المتممة الأصغري في الفصل الثالث و تشرح شروط استخدامها ،وتستخدم مضاريب لاغرانج لتعديل مبادىء الطاقة الأساسية من أجل الحصول على مبادىء الطاقة الموسعة . وهذه المبادىء تشكل إلى جانب قواعد حساب المتغيرات الأساس النظري لمعالجة المنشآت وفق طرق العناصر المنتهية .

و كمثال تعليمي نموذجي تعرض في الفصل الرابع طريقة العناصر المنتهية _ نموذج الانتقالات لحل الجوائز الشبكية المستوية و الفراغية المعرضة للحمولات و المؤثرات الخارجية كالتأثيرات الحرارية وهبوط المساند و تعالج حالة وجود النوابض فيها .

يعالج الفصل الخامس الإطارات المستوية و الفراغية بطرق العناصر المنتهية و تشرح بإسهاب طريقة العناصر المنتهية _ نموذج الانتقالات و طريقة العناصر المنتهية _ النموذج الهجين للإجهادات ويقترح نموذج آخر لطريقة العناصر المنتهية يتم فيه إجراء تعديل في أساسيات الطريقة على أساس اعتبار المؤثرات الخارجية على المستوى التفاضلي للعنصر المنتهي . و تقارن نتائج الطرق السابقة مع الحل الدقيق و مع بعضها البعض .

يخصص الفصل السادس لدراسة طرق العناصر المنتهية السابق ذكرها في حل البلاطات الرقيقة المنسوبة سواء إلى جملة إحداثيات ديكارتية أم إلى جملة إحداثيات طبيعية (منحنية) و ذلك لتمكين القارىء من معالجة طبولوجيات هندسية معقدة . يبدأ الفصل بشروحات للتعاريف الأساسية للخواص الهندسية التفاضلية للعناصر المنتهية ذات الأشكال الهندسية غير المنتظمة و تشرح المفاهيم الأساسية في مبادىء حساب الموتّرات و قواعد تحويلها . كما تصاغ معادلات نظرية المرونة في الإحداثيات الطبيعية انطلاقاً منها في الإحداثيات الديكارتية و يختتم الفصل بإجراء تطبيقات طرق العناصر المنتهية في إطار الإحداثيات الطبيعية .

و يخصص الفصل السابع لدراسة الشرائح والمنشآت المثنية المستوية .ويختتم الكتاب بملاحق توضح فيها بعض أنواع التوابع المستخدمة في عمليات التقريب والخطوط الأساسية لكيفية إجراء التكامل العددي و نصوص بلغة الـ C لبرامج مختلفة وملاحظات ختامية حول العلاقة المتبادلة بين طرق العناصر المنتهية المختلفة في ضوء أسلوب معالجة مختلف لطرق العناصر المنتهية.

فهرس الكتاب

1- مفاهيم أساسية إنشائية و رياضية

1-1- جمل المحاور الإحداثية

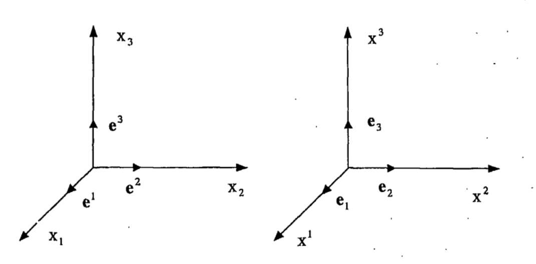
قبل البدء بكتابة معادلات نظرية المرونة لابد من تعريف المجاهيل التي نود البحث عنها في نطـــاق هذه النظرية و لابد أيضا من طرح و توضيح المعطيات المتوافرة لدينا أثناء بحثنا لهذه النظريـــة . و قبل البدء بالتحدث عن هذه المجاهيل أو هذه المعطيات يجب نسبها إلى جملة إحداثية ما وربما عـــدة جمل إحداثية. تماشيا مع التطور العلمي الحديث نجد أنه من المفيد اعتماد الأســـاليب الحديثـــة في صياغة معادلات نظرية المرونة . هذه الصياغة تعتمد في أساليبها على قواعد جديدة نسبيا يطلـــق عليها اسم قواعد حساب الموترات، لذلك نرى أنه من الأنسب بدء هـــذا الفصـــل بشـــروحات أساسية في علم قواعد حساب الموترات . لنحاول الآن التحرر من مفـــهوم الجمـــل الإحداثيـــة الديكارتية الثابتة، و التي يرمز لمتحولاتها المستقلة عادة(x,y,z) . ولنغير في البداية رمـــوز هـــذه المتحولات بحيث تصبح (x^1, x^2, x^3) ، حيث تكتب القرائن 1,2,3 على أعلـــى المتحـــولات (قرائن مرتفعة) و لنفرض أن شعاع الواحدة على المحور x^1 هوe_1و على x^2 هو e_2 وعلـــى x^3 هو e_3و قرائن الأشعة الواحدية تكتب في الأسفل (قرائن منخفضة). باعتبار أننا نكتـــب الآن معادلات نظرية المرونة في جملة الإحداثيات الديكارتية سنفرض أن الجملة(x^1, x^2, x^3) هـــي جملة متعامدة نظامية و أشعتها الواحدية(e_1, e_2, e_3)و سنسمي هذه الجملـــة جملـــة القـــاعدة الأساسية (شكل1-1) . في الحالة العامة يمكن أن تكون هذه الجملة جملة إحداثيات منحنية (جمل الإحداثيات الأسطوانية ، جمل الإحداثيات الكروية ، .....) عندها يرمز لأشـــعتها الأساســـية (g_1, g_2, g_3)) و تكون طويلة أشعتها الأساسية غير مساوية للواحـــد . رغـــم أن اشـــتقاق معادلات نظرية المرونة يتم في جملة إحداثية ديكارتية إلا أننا سنتبع الأسلوب الحديث في صياغـــة هذا الاشتقاق بحيث إذا ما انتقل المرء إلى اشتقاق هذه المعادلات في جملة إحداثية منحنية فإنه ، لن يجد أسلوب الصياغة غير مألوف . لنرى الآن ما الفائدة من تغيير رموز الجملـــة الديكارتيـــة و أشعتها الأساسية .

ليكن لدينا جسم ما أو وسط منسوب إلى جملة القاعدة الأساسية، شعاع المكان لنقطة ما لا على التعيين إحداثياتها (x^1, x^2, x^3) من هذا الجسم يعبّر عنه بالشكل :

$$\mathbf{r} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x^i\mathbf{e}_i \tag{1.1}$$

الأحرف الغامقة **e** استخدمت للدلالة على أن هذا المقدار شعاعي بدل استخدام الرمز القديم المعروف $\vec{e}$ ، و هذا الاصطلاح سنتبعه في سياق هذا الكتاب. نستخدم الآن اصطلاح اينشتاين (Einstein) لاختصار شكل كتابة مجموع المضاريب في العلاقة (1.1) و الذي يقول أنه إذا وردت قرينة ما مرتين في جداء مضاريب ، مرّة في الأسفل و مرّة في الأعلى يفهم ضمناً أن الجمع يتم على هذه القرينة و يستغنى عن كتابة رمز المجموع $\sum$. بناء" على هذا الاصطلاح تكتب العلاقة (1.1)بالشكل :

$$\mathbf{r} = x^i\mathbf{e}_i \qquad , \qquad i = 1,2,3 \tag{1.2}$$



شكل 1-1 جملة القاعدة الأساسية

شكل 1-2 جملة القاعدة الضدّية

لنعرف الآن جملة إحداثيات أخرى متحولاتها المستقلة(x_1, x_2, x_3) تكتب قرائنها في الأسفل (قرائن منخفضة)وأشعتها الأساسية (e^1, e^2, e^3) تكتب قرائنها في الأعلى (قرائن مرتفعة). في الحالة العامة تكون جملة الإحداثيات هذه أيضاً منحنية عندها يرمز لأشعة قاعدتها(g^1, g^2, g^3)

و تكون طويلة هذه الأشعة غير مساوية للواحد. لنسمّي الجملة الجديدة جملة القـــاعدة الضديّـــة (شكل1- 2) . و لنفرض أن العلاقات بين أشعة القاعدة الأساسية و أشعة القاعدة الضديّة هي :

$$e_1.e^1 = 1 \;;\; e_1.e^2 = 0 \;;\; e_1.e^3 = 0$$
$$e_2.e^1 = 0 \;;\; e_2.e^2 = 1 \;;\; e_2.e^3 = 0 \qquad (1.3)$$
$$e_3.e^1 = 0 \;;\; e_3.e^2 = 0 \;;\; e_3.e^3 = 1$$

و باستخدام الكتابة بالقرائن تتلخّص هذه المعادلات بالمعادلة الوحيدة التالية :

$$e_i.e^j = \delta_i^{\ j} \quad ; \quad i, j = 1,2,3 \qquad (1.4)$$

حيث $\delta_i^{\ j}$ هو ما يعرف بموترة كرونيكر، و تعرف كما يلي :

$$\delta_i^{\ j} = 1 \quad \text{if} \quad i = j$$
$$(1.5)$$
$$\delta_i^{\ j} = 0 \quad \text{if} \quad i \neq j$$

هذه العلاقات تنطبق أيضاً على جمل الأشعة (g_1, g_2, g_3) ، (g^1, g^2, g^3) في الإحداثيـــات المنحنية . تستخدم موتّرة كرونيكر لاستبدال قرينة بأخرى كما سنرى لاحقاً . الجداءات السلميّة لأشعة القاعدة الأساسية ببعضها البعض تسمّى "المعاملات المترية الأساسية" و يرمز لها في حالـــة الإحداثيات المنحنية g_{ij} و سيرمز لها في حالة الإحداثيات الديكارتية المتعامدة النظامية δ_{ij} :

$$e_i . e_j = \delta_{ij} \qquad (1.6)$$

و ذلك لأنها مكافئة للمصفوفة الواحديّة أو موتّرة كرونيكر . و الجداءات السلميّة لأشعة القاعدة الضديّة ستسمى "المعاملات المترية الضديّة" و هي في حالة الإحداثيـــات الديكارتيـــة المتعـــامدة النظامية مساوية لموترة كرونيكر δ^{ij}

$$e^i.e^j = \delta^{ij} \qquad (1.7)$$

يمكن التعبير عن جملة أشعة القاعدة الأساسية بدلالة أشعة القاعدة الضديّة و بـــالعكس . و تبّـــين الطريقة التالية إمكانية هذا الانتقال بين الجملتين حيث سنوردها هنا فقط لحالة الجمل الإحداثيـــة الديكارتية النظامية و يمكن استنتاجها لحالة الجمل المنحنية بالقياس . يمكن كتابة أشعة القـــاعدة الضديّة بدلالة أشعة القاعدة الأساسية بالشكل :

$$e^1 = A^{11}e_1 + A^{12}e_2 + A^{13}e_3$$

$$e^2 = A^{21}e_1 + A^{22}e_2 + A^{33}e_3 \qquad (1.8)$$
$$e^3 = A^{31}e_1 + A^{32}e_2 + A^{33}e_3$$

أو باختصار :

$$e^i = A^{ij}e_j \qquad (1.9)$$

حيث A^{ij} معاملات يجب تعيينها .

نضرب العلاقة السابقة بأشعة القاعدة الضدّية e^K فنحصل على:

$$e^i.e^K = A^{ij}e_j.e^K \qquad (1.10)$$

و بملاحظة العلاقتين (1.7) و (1.4) ينتج :

$$\delta^{ik} = A^{ij}\delta_j^k \qquad (1.11)$$

الطرف اليميني في العلاقة (11 .1) هو جداء مضاريب ، يتم الجمع فيه على القرينة j أما القرينتان k , i فهما قرينتان مستقلتان و لا يتم عليهما الجمع . و هذا الجداء يكون له قيمة في حالة j مساوية k (انظر تعريف موتّرة كرونيكر) و مساوٍ للصفر في حالة إختلاف j عن k ، إذاً يمكن الإستغناء عن القرينة j و استبدالها تماماً بالقرينة k أي أن :

$$A^{ij}\delta_j^k = A^{ik} \qquad (1.12)$$

و هذه العلاقة هي خاصية أساسية لموتّرة كرونيكر حيث يتم بواسطتها استبدال قرينة بأخرى . و بالرجوع إلى العلاقة (11 .1) نرى أن :

$$\delta^{ik} = A^{ik} \qquad (1.13)$$

أي أن الانتقال من جملة أشعة القاعدة الأساسية إلى جملة أشعة القاعدة الضدّية يتم بواسطة المعاملات المترية الضدّية و التي تكون في حالة المحاور الإحداثية الديكارتية النظامية مساوية للمصفوفة الواحديّة δ^{ij} و تكون في حالة جملة المحاور الإحداثية المنحنية مختلفة عنها ($g^{ij} \neq \delta^{ij}$)

$$e^i = \delta^{ij}e_j \qquad (1.14)$$

و بشكل مماثل نرى أن :

$$e_i = \delta_{ij}e^j \qquad (1.15)$$

و بالتدقيق في العلاقتين (14. 1) و (15. 1) يمكن الاستنتاج أنه تم رفع و خفـض القرائـن (أو التحويل بين جمل الأشعة المختلفة) بواسطة المعاملات المترية الأساسية والمعاملات المترية الضدّية . حيث تم في العلاقة (14. 1) رفع القرينة j عن طريق الضرب بالمعاملات الضدّية ، و في العلاقـة (15. 1) تم خفض القرينة j عن طريق الضرب بالمعاملات المترية الأساسية . و هذه القواعد محققـة أيضاً لأشعة أخرى منسوبة إلى إحدى الجملتين كشعاع الانتقالات لجسم ما مثلاً .

$$u = u_i e^i = u^i e_i \qquad (1.16)$$

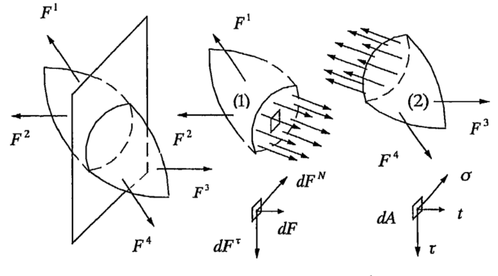
حيث u_i المركبات الأساسية ، u^i المركبات القاعدية الضدّية و بتطبيق هذه القواعد نجد أن :

$$u_i = \delta_{ij} u^j \qquad (1.17)$$

$$u^i = \delta^{ij} u_j \qquad (1.18)$$

بالطبع هذه المقدمة البسيطة لاتغني عن الرجوع إلى المفاهيم الأساسية لعلم حسـاب الموتّـرات و يجب النظر إليها فقط كعامل مساعد في فهم ما سيتبع من صياغة لمعادلات نظرية المرونة و سيتم التعرض بتفصيل أكبر لمبادىء حساب الموتّرات في الجمل المنحنية في الفصل السادس مـن هـذا الكتاب .

1–2– موتّرة الإجهادات وصيغة كوشي



شكل 1–3 : القوى الداخلية و الإجهادات الداخلية .

بنتيجة الحمولات الخارجية على الأوساط الإنشائية أو الأجسام تتولد فيها قوى داخلية تحافظ على تماسكها.لنتصور مقطعاً في جسم ما متوازن تحت تأثير مجموعة قوى خارجية . فكل جزء من أجزائه يجب أن يكون متوازناً تحت تأثير القوى الخارجية المؤثرة عليه و القوى الداخلية التي تظهر بنتيجة القطع ، و بالإضافة إلى ذلك يجب أن تكون القوى الداخلية على طرفي المقطع متساوية و متعاكسة وفق ما يقتضيه قانون نيوتن الثالث للفعل ورد الفعل شكل1-3 .

بفرض أن dF محصلة القوى المؤثرة على عنصر تفاضلي dA من سطح المقطع، تسمّى القوة المؤثرة على وحدة السطوح بالإجهاد:

$$t = \frac{dF}{dA} \tag{1.19}$$

و القوة dF المؤثرة على وحدة السطح يمكن دوماً تحليلها إلى قوة عمودية على السطح dF^n و قوة مماسية لهذا السطح dF^τ . تسمّى القوة الناظميّة على وحدة السطح يالإجهاد الناظمي و يرمز له عادة كما يلي:

$$\sigma = \frac{dF^n}{dA} \tag{1.20}$$

و تسمّى القوة المماسية على وحدة السطح يالإجهاد المماسي و يرمز له بالشكل:

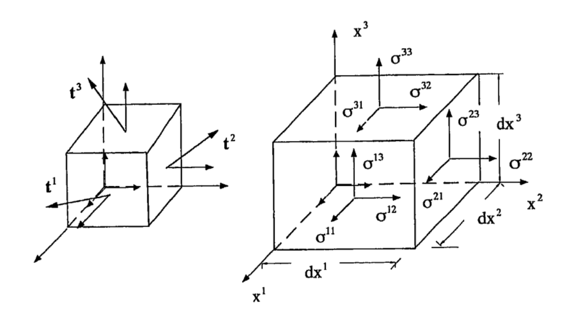
$$\tau = \frac{dF^\tau}{dA} \tag{1.21}$$

و يتم عادة تحليل الأخيرة إلى مركبتين متعامدتين مع بعضهما البعض .

و لتحديد حالة الإجهادات في نقطة ما من الجسم نستعين بجملة محاور إحداثية ديكارتية قائمة و لتكن جملة القاعدة الأساسية (x^1, x^2, x^3) بأشعتها الواحديّة (e_1, e_2, e_3) .

في مقطع ناظمه المحور x^1 و على بعد $x^1 = const$ يكون للإجهادات ثلاث مركبات كما أسلفنا و هي الإجهاد الناظمي σ^{11} و الإجهاد المماسي τ^{12}و الإجهاد المماسي τ^{13} . القرينة الأولى للإجهاد تدل على اتجاه الناظم للمساحة المجهدة أو المحور العمودي على مركبة الإجهاد و القرينة الثانية تدل على اتجاه مركبة الإجهاد أو المحور الموازي لهذه المركبة . و سوف تستخدم في سياق هذا الكتاب الرمز σ أيضاً للإجهاد المماسي أي أننا سنكتب بدلاً من τ^{12} الرمز σ^{12} و

بدلاً من τ^{13}الرمز σ^{13} . و بشكل مماثل نستطيع أيضاً تحديد مركبات الإجهاد في مقطـــع مـــا $x^2 = const$ و في مقطع $x^3 = const$ (شكل1-4) .



شكل1-4 : مركبات الإجهادات على عنصر تفاضلي بشكل متوازي مستطيلات مقتطع من الوسط

شكل1-5 :تجميع مركبات الإجهادات على وجوه متوازي المستطيلات

يمكن ترتيب مركبات الإجهاد التسعة بالشكل التالي :

$$\sigma^{ij} \equiv \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{pmatrix}; \qquad i,j = 1,2,3 \qquad (1.22)$$

و نظراً لخواص التحويل التي تمتلكها مركبات الإجهاد المرتّبة هذه نطلق على مثل هذا الـــتركيب موتّرة الإجهادات (سنتعرف على الموتّرات و خواصها في الفصول اللاحقة) .بافتراض أن أبعـــاد متوازي المستطيلات المقتطع تفاضلية و أنّ t^1, t^2, t^3 هي أشعة محصلة الإجهادات على الأوجـــه التي نواظمها المحاور x^1, x^2, x^3 على التوالي (شكل1-5) يكون :

$$t^1 dx^2 dx^3 = \sigma^{11} e_1 dx^2 dx^3 + \sigma^{12} e_2 dx^2 dx^3 + \sigma^{13} e_3 dx^2 dx^3$$

$$t^2 dx^1 dx^3 = \sigma^{21} e_1 dx^1 dx^3 + \sigma^{22} e_2 dx^1 dx^3 + \sigma^{23} e_3 dx^1 dx^3$$
$$t^3 dx^1 dx^2 = \sigma^{31} e_1 dx^1 dx^2 + \sigma^{32} e_2 dx^1 dx^2 + \sigma^{33} e_3 dx^1 dx^2$$

(1.23)

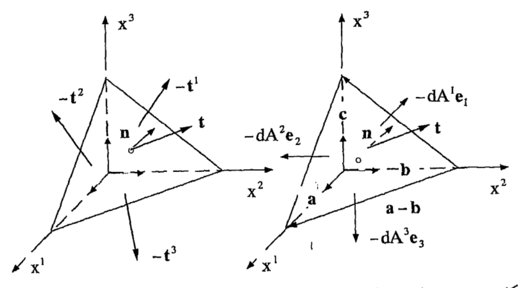
و بعد الإختصار يكون :

$$\begin{aligned} t^1 &= \sigma^{11} e_1 + \sigma^{12} e_2 + \sigma^{13} e_3 \\ t^2 &= \sigma^{21} e_1 + \sigma^{22} e_2 + \sigma^{23} e_3 \\ t^3 &= \sigma^{31} e_1 + \sigma^{32} e_2 + \sigma^{33} e_3 \end{aligned} \quad (1.24)$$

و باستخدام اصطلاح اينشتاين يصبح التعبير المختصر للعلاقة السابقة:

$$t^i = \sigma^{ij} e_i \quad (1.25)$$

و قبل حساب محصلة الإجهادات الكلية t المؤثرة في مقطع ما ناظمه(الشعاع n) (شـــكل1-7) سنتعرف على المساحات الموجهّة و نحسب مساقط شعاع الناظم للمقطع المطلوب حساب محصلـة الإجهادات الكلية فيه بدلالة هذه المساحات .



شكل 7 : هرم مقتطع من الجسم
محصلة الإجهاد الكلية t

شكل 6 : هرم مقتطع من الجسم
المساحات الموجهة ، أشعة النواظم

تمثل المساحات الموجهّة المحاطة بمنحني مغلق بشعاع عمودي على المساحة المعتبرة و اتجاهه يحـــدد وفق قاعدة اليد اليمنى . فإذا ما دارت أصابع اليد اليمنى على المنحني بعكس اتجاه عقارب الســاعة اتخذ ناظم المساحة هذه اتجاه ابهام اليد اليمنى و طويلة هذا الشعاع مساوية لقيمة المساحة. لتكـــن dA^1, dA^2, dA^3 قيم المساحات التي نواظمها المحاور x^1, x^2, x^3 على التـــوالي أو الأشـــعة $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.هذه المساحات يمكن التعبير عنها بالأشعة التالية :

$$dA^1 \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$$
$$dA^2 \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \qquad (1.26)$$
$$dA^3 \mathbf{e}_3 = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

و مساحة المقطع الذي ناظمه الشعاع $\mathbf{n}$ يعبر عنه بالعلاقة :

$$dA.\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) - (\mathbf{c} \wedge \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})\right]$$
(1.27)

حيث dA قيمة مساحة المقطع، وذلك بعد الأخذ بعين الاعتبار أن الجداء الخـــارجي لشـــعاعين متوازيين معدوم (وبالتالي الجداء الخارجي للشعاع في نفسه) بالمقارنة بـــين (1..26) و (1.27)بعد ملاحظة أن $(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = - (\mathbf{c} \wedge \mathbf{b})$ نجد أن :

$$dA\mathbf{n} = dA^1\mathbf{e}_1 + dA^2\mathbf{e}_2 + dA^3\mathbf{e}_3 = dA^i\mathbf{e}_i \qquad (1.28)$$

بضرب هذه العلاقة بالأشعة الواحديّة $\mathbf{e}_j$ سوف نجد بعد ملاحظة العلاقة (1.17) أن :

$$dA(\mathbf{n}\mathbf{e}^j) = dA^i\mathbf{e}_i\mathbf{e}^j = dA^i\delta_i{}^j = dA^j \qquad (1.29)$$

إذا ما عبرنا عن الآن عن شعاع الناظم بدلالة مركباته $\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3$ علـــى المحـــاور الإحداثيـــة x^1, x^2, x^3 على التوالي بالشكل :

$$\mathbf{n} = n^1\mathbf{e}_1 + n^2\mathbf{e}_2 + n^3\mathbf{e}_3 = n^i\mathbf{e}_i \qquad (1.30)$$

نحصل بتعويض هذه العلاقة في العلاقة (1.28) . على :

$$dA(n^i\mathbf{e}_i\mathbf{e}^j) = dA(n^i\delta_i{}^j) = dAn^j = dA^j \qquad (1.31)$$

و بالتالي يمكن حساب مركبات شعاع الناظم بدلالة قيم مساحات وجوه الهرم بالشكل :

$$n^j = \frac{dA^j}{dA} \qquad (1.32)$$

لنعد الآن إلى حساب محصلة الإجهادات الكلية المؤثرة على المقطع الذي ناظمـــه الشـــعاع**n**. إن توازن الهرم المقتطع تحت تأثير القوى المطبقة عليه (شكل7) يقتضي أن يكون :

$$\mathbf{t}dA = \mathbf{t}^1 dA_1 + \mathbf{t}^2 dA_2 + \mathbf{t}^3 dA_3 \qquad (1.33)$$

و ذلك بعد إهمال القوى الحجمية (وزن الهرم) الموزعة قي حجم الهرم المقتطع . بقسمة طـــرفي العلاقة السابقة على dA بعد استخدام العلاقة (1.29) نحصل على :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^1(\mathbf{n}.\mathbf{e}_1) + \mathbf{t}^2(\mathbf{n}.\mathbf{e}_2) + \mathbf{t}^3(\mathbf{n}.\mathbf{e}_3)$$

$$= \mathbf{n}(\mathbf{t}^1\mathbf{e}_1 + \mathbf{t}^2\mathbf{e}_2 + \mathbf{t}^3\mathbf{e}_3) = \mathbf{n}\mathbf{t}^i\mathbf{e}_i \qquad (1.34)$$

تسمّى القيمة السلمّية :

$$\sigma = \mathbf{t}^1\mathbf{e}_1 + \mathbf{t}^2\mathbf{e}_2 + \mathbf{t}^3\mathbf{e}_3 = \mathbf{t}^i\mathbf{e}_i \qquad (1.35)$$

المكافىء المزدوج للاجهادات (stress dyadic) و يمكن كتابتها بدلالـــة موتّـــرة الإجـــهادات σ^{ij} بتعويض العلاقة (1.25) في العلاقة (1.34) بالشكل :

$$\sigma = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \qquad (1.36)$$

يتصف المكافىء المزدوج للإجهادات بالثبات عند نسب الإجهادات إلى جمل محاور إحداثية مختلفـة . و بالعودة إلى العلاقة (34. 1) سوف نجد أن محصلة الإجهاد الكلية المؤثرة على المقطع الـــذي ناظمه **n** مساوية للتالي:

$$\mathbf{t} = \sigma \quad \mathbf{n} \qquad (1.37)$$

و لكتابة هذه العلاقة تفصيلياً نعوض العلاقتين (1.30)و (1.36)في العلاقة(1.37) فنحصل علـــى صيغة كوشي للإجهادات :

$$\mathbf{t} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j n^k \mathbf{e}_k = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i n^k \delta_{jk} = \sigma^{ij} n_j \mathbf{e}_i \qquad (1.38)$$

n_j هي مركبات شعاع الناظم المنسوبة إلى الجملة القاعدية الضدّية . و للحصول على مركبات **t** و التي سيرمز لها $t^1(N), t^2(N), t^3(N)$ تمييزاً لها عن مركبات الإجهادات المحصلة على أوجه

متوازي المستطيلات ، يكفي أن نكتب الطرف الأول من العلاقة(1.38) بدلالة هذه المركبات و نقارن الطرف الأول مع الطرف الثاني لنجد أن :

$$t^i_{(N)} = \sigma^{ij} n_j \qquad (1.39)$$

و الشكل التفصيلي لهذه العلاقة هو :

$$(t^1_{(N)} t^2_{(N)} t^3_{(N)}) = (n_1 n_2 n_3)\begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{pmatrix} \qquad (1.40)$$

وتعطي المركبتين الناظمية و المماسية لمحصلة الإجهادات الكلية هذه بالعلاقتين التاليتين على التوالي :

$$t_n = \mathbf{t}.\mathbf{n} = \sigma^{ij} n_j n_i \qquad (1.41)$$

$$t_s = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - (t_N)^2} \qquad (1.42)$$

3-1 تحويل مركبات الإجهادات :

للتعبير عن مركبات الإجهادات σ^{ij} المنسوبة إلى جملة المحاور الإحداثية الديكارتية (x^1, x^2, x^3) بأشعتها الأساسية $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ بدلالة مركبات الإجهادات $\sigma^{\bar{k}\bar{l}}$ المنسوبة إلى جملة المحاور الإحداثية $(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}})$ بأشعتها الأساسية $(\mathbf{e}_{\bar{1}}, \mathbf{e}_{\bar{2}}, \mathbf{e}_{\bar{3}})$ والتي تربط بين أشعتيهما الأساسية علاقة التحويل :

$$\mathbf{e}_{\bar{k}} = a_{\bar{k}}{}^{i} \mathbf{e}_i \qquad (1.43)$$

حيث $a_{\bar{k}}{}^{i}$ معاملات التحويل بين الجملتين . نعبر عن المكافىء المزدوج للإجهادات σ في الجملتين كما يلي :

$$\sigma = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sigma^{\bar{k}\bar{l}} \mathbf{e}_{\bar{k}} \mathbf{e}_{\bar{l}}$$

$$\cdot = \sigma^{\bar{k}\bar{l}} a_{\bar{k}}{}^{i} a_{\bar{l}}{}^{j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \qquad (1.44)$$

و بعد نقل الطرف الثاني إلى الطرف الأول و إخراج الجداء $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ خارج قوسين نحصل على :

$$(\sigma^{ij} - \sigma^{\bar{k}\bar{l}} a_{\bar{k}}{}^{i} a_{\bar{l}}{}^{j}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0 \qquad (1.45)$$

و هذا يؤدي إلى علاقة تحويل الإجهادات التالية :

$$\sigma^{ij} = a_{\bar{k}}{}^{i} \sigma^{\bar{k}\bar{l}} a_{\bar{l}}{}^{j} \qquad (1.46)$$

و بشكل مماثل نجد بالنسبة للتحويل العكسي أن :

$$\sigma^{\bar{i}\bar{j}} = a_k{}^{\bar{i}} \sigma^{kl} a_l{}^{\bar{j}} \qquad (1.47)$$

تربط المعاملات $a_k{}^{\bar{i}}$ أشعة القاعدة الأساسية للجملتين ببعضهما البعض على شـــاكلة العلاقـــة (1.43)بالشكل :

$$\mathbf{e}_k = a_k{}^{\bar{i}} \mathbf{e}_{\bar{i}} \quad \text{أو} \quad \mathbf{e}_i = a_i{}^{\bar{j}} \mathbf{e}_{\bar{j}} \qquad (1.48)$$

لاكتشاف العلاقة التي تربط بين المعاملات $a_k{}^{\bar{i}}$ و $a_i{}^{\bar{j}}$ نعـــوض العلاقـــة (1.48) في العلاقـــة (1.43) فنحصل على:

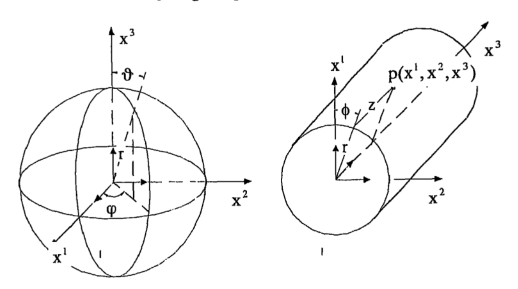
$$\mathbf{e}_{\bar{k}} = a_{\bar{k}}{}^{i} a_i{}^{\bar{j}} \mathbf{e}_{\bar{j}} \qquad (1.49)$$

بضرب هذه العلاقة سلميا بأشعة القاعدة الضدية $e^{\bar{l}}$ و بعد ملاحظة خواص موترة كرونيكـــر نجد أن :

$$\delta_{\bar{k}}{}^{\bar{l}} = a_{\bar{k}}{}^{i} a_i{}^{\bar{j}} \delta_{\bar{j}}{}^{\bar{l}} = a_{\bar{k}}{}^{i} a_i{}^{\bar{l}} \qquad (1.50)$$

أي أن المعاملات $a_{\bar{k}}{}^{i}$ هي معكوس $a_i{}^{\bar{l}}$. و كمثال على هذا التحويل يمكن أن نـــدرس حالـــة تحويل موترة الإجهادات من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات الأسـطوانية والإحداثيـــات الكروية . ولهذا الغرض يجب تحديد معاملات التحويل $a_k{}^{\bar{i}}$. ففـــي الإحداثيـــات الأســـطوانية (شكل1- 8) يمكن التعبير عن إحداثيات نقطة ما من القشرة الأسطوانية $P(x^1, x^2, x^3)$

بالإحداثيات الأسطوانية $P(x^{\bar{1}} = r, x^{\bar{2}} = \phi, x^{\bar{3}} = Z)$. و العلاقات التي تربط الإحداثيـــات الديكارتية بالإحداثيات الأسطوانية يمكن استنتاجها من الشكل مباشرة .



شكل 9 : جملة الإحداثيات الكروية

شكل 8 : جملة الإحداثيات الأسطوانية

$$x^1 = r\cos\phi$$
$$x^2 = r\sin\phi$$
$$x^3 = Z$$

و شعاع المكان للنقطة p يعبر بالعلاقة :

$$\mathbf{R} = r\cos\phi\mathbf{e}_1 + r\sin\phi\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3$$

فإذا اعتبرنا أن $\mathbf{e}_r.\mathbf{e}_\phi.\mathbf{e}_Z$ هي الأشعة القاعدية الأساسية للجملة الأسطوانية فسوف نرى في الفصول اللاحقة أنه يمكن الحصول عليها باشتقاق العلاقة السابقة جزئيا بالنسبة للإحداثيات الأسطوانية بالشكل :

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} = \cos\phi\mathbf{e}_1 + \sin\phi\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = -r\sin\phi \mathbf{e}_1 + r\cos\phi \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_Z = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial Z} = \mathbf{e}_3$$

و المصفوفة

$$a_{\bar{k}}^{\ i} = \begin{pmatrix} \cos & \sin & 0 \\ -r\sin & r\cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمثل معاملات التحويل المطلوبة . و ما علينا لكي نحول مركبات الإجهادات من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات الأسطوانية سوى إنجاز الجداء الممثل بالعلاقة (1.47).

أما بالنسبة للإحداثيات الكروية فنقطة ما من سطح الكرة (شكل 1-9) يمكن التعبير عنها في الإحداثيات الكروية $(x^{\bar{1}} = r; x^{\bar{2}} = \varphi, x^{\bar{3}} = \vartheta)$ بدلا من الإحداثيات الديكارتية . و العلاقات التي تربط الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الكروية هي :

$$x^1 = r\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$x^2 = r\sin\vartheta\sin\varphi$$

$$x^3 = r\cos\vartheta$$

و شعاع المكان للنقطة p هو

$$\mathbf{R} = r\sin\vartheta\cos\phi \mathbf{e}_1 + r\sin\vartheta\sin\phi \mathbf{e}_2 + r\cos\vartheta \mathbf{e}_3$$

و باعتبار أن $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\vartheta$ أشعة القاعدة الأساسية للجملة الكروية نجد أن :

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} = sis\vartheta\cos\varphi \mathbf{e}_1 + \sin\vartheta\sin\varphi \mathbf{e}_2 + \cos\vartheta \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} = -r\sin\vartheta\sin\varphi \mathbf{e}_1 + r\sin\vartheta\cos\varphi \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \vartheta} = r\cos\vartheta\cos\varphi \mathbf{e}_1 + r\cos\vartheta\sin\varphi \mathbf{e}_2 - r\sin\vartheta \mathbf{e}_3$$

و معاملات التحويل المطلوبة ممثلة بالمصفوفة التالية :

$$a_{\bar{k}}^{\ i} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \\ r\cos\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

1-4-الإجهادات الرئيسية و المستويات الرئيسية

في كثير من الأحيان يهمنا البحث عن القيم الحدية (الأعظمية و الأصغرية)للإجهادات الناظمية و الإجهادات المماسية الوارد حسابها في العلاقتين (1.41) و (1.42)و ذلك لأهميتها التصميمية . و باعتبار أن المحصلة الكلية للإجهادات الواردة في تلك العلاقات هي المحصلة الهندسية للإجهادات الناظمية t_N و الإجهادات المماسية t_S في المقطع الذي ناظمه الشعاع $\mathbf{n}$ ، بالتالي تكون قيم الإجهادات الناظمية أعظم ما يمكن في المقاطع التي تكون فيها قيم الإجهادات المماسية معدومة . تسمى الإجهادات الأعظمية هذه بالإجهادات الرئيسية و المستويات التي تقع فيها بالمستويات الرئيسية فإذا فرضنا أن المقطع المتخذ (الشكل1- 7)و الذي ناظمه $\mathbf{n}$ مستويا رئيسيا فيجب أن يكون هذا المستوي خاليا من الإجهادات المماسية و عليه يجب أن تتطابق محصلة الإجهادات الكلية $\mathbf{t}$ مع اتجاه الناظم $\mathbf{n}$ و يمكن التعبير عن $\mathbf{t}$ بدلالة $\mathbf{n}$ بعلاقة الارتباط الخطية :

$$\mathbf{t} = \lambda \quad \mathbf{n} \qquad (1.51)$$

حيث λ طويلة الشعاع $\mathbf{t}$. بنقل الطرف الثاني من العلاقة السابقة إلى الطرف الأول و تعويض العلاقتين (1.30) و (1.51) فيها نحصل على

$$\sigma^{ij} n_j \mathbf{e}_i - \lambda n^i \mathbf{e}_i = 0 \qquad (1.52)$$

وبعد ضرب هذه العلاقة سلميا بالأشعة $\mathbf{e}^K$ نحصل بعد ملاحظة أن :

$$\mathbf{n} = n^i \mathbf{e}_i = n_i \mathbf{e}^i; \qquad n^i \delta_i^{\ K} = n_i \delta^{iK} \qquad (1.53)$$

$$n^K = n_i \delta^{iK}; n^K = n_j \delta^{jK}$$

على :

$$(\sigma^{Kj} - \lambda \delta^{kj}) n_j = 0 \qquad (1.54)$$

تملك جملة المعادلات المتجانسة هذه حلا مغايرا للصفر فقط و فقط إذا كان معين مصفوفة أمثالها مكافئا للصفر .

$$\det(\sigma^{Kj} - \lambda\delta^{Kj}) \equiv \begin{vmatrix} \sigma^{11}-\lambda & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22}-\lambda & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.55)$$

بعد فك المعين نحصل على المعادلة المميزة:

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0 \qquad (1.56)$$

حيث :

$$I_1 = \sigma^{11} + \sigma^{22}\sigma^{33} \equiv \sigma^{ii}$$
$$I_2 = \sigma^{11}\sigma^{22} + \sigma^{22}\sigma^{33} + \sigma^{33}\sigma^{11} - \left((\sigma^{12})^2 + (\sigma^{13})^2 + (\sigma^{23})^2\right)$$
$$\cdot \equiv \frac{1}{2}(\sigma^{ii}\sigma^{jj} - \sigma^{ij}\sigma^{ji}) \qquad (1.57)$$
$$I_3 = \det[\sigma] = |\sigma^{ij}| = \begin{vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{vmatrix}.$$

تتصف المقادير I_1, I_2, I_3 بثبات قيمها عند التحويل من جملة إحداثيات إلى أخرى . بفضل تناظر موترة الإجهادات σ^{ij} يمكن البرهان أن للمعادلة المميزة دوما جذورا حقيقية . و الجذور الثلاثـــة للمعادلة التكعيبية هذه تمثل الإجهادات الرئيسية المطلوبة و هي كما هو معروف رياضيـــا القيـــم الذاتية لمصفوفة موترة الإجهادات . يقابل كل قيمة $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ من قيم جذور المعادلة التكعيبيـة مستوي رئيسي . و يتحدد هذا المستوي بناظمه الذي يمكن حساب نســـب مركباتـــه الثلاثـــة $n_1(\lambda), n_2(\lambda), n_3(\lambda)$ من المعادلات المتجانسة (1.54) و من ثم الاستعانة بالعلاقة :

$$(n_1(\lambda_1))^2 + (n_2(\lambda))^2 + (n_3(\lambda))^2 = 1 \qquad (1.58)$$

تسمى النواظم هذه بالأشعة الذاتية لمصفوفة موترة الإجهادات و هذه الأشعة تنتمـــي إلى ســـاحة الأعداد الحقيقية و متعامدة مع بعضها البعض و يوضح البرهان التالي خاصية تعامد هذه الأشـــعة .بفرض أن :

$$\mathbf{n}(\lambda_1) = n^i(\lambda_1)\mathbf{e}_i$$
$$\mathbf{n}(\lambda_2) = n^i(\lambda_2)\mathbf{e}_i \qquad (1.59)$$

هي الأشعة الذاتية الموافقة للقيم الذاتية λ_1,λ_2 نجد بملاحظة العلاقة (1.52) أن :

$$\sigma^{ij}n_j(\lambda_1)=\lambda_1 n^i(\lambda_1)$$
$$\sigma^{ij}n_j(\lambda_2)=\lambda_2 n^i(\lambda_2) \quad (1.60)$$

الجداء السلّمي للشعاعين $\mathbf{n}(\lambda_1),\mathbf{n}(\lambda_2)$ هو بعد ملاحظة العلاقة (1.59) و المعادلة الثانية من العلاقة (1.60) :

$$\mathbf{n}(\lambda_1).\mathbf{n}(\lambda_2)=n^i(\lambda_1)n^K(\lambda_2)\delta_{ik}=n^i(\lambda_1)\frac{1}{\lambda_2}\sigma^{Kj}n_j(\lambda_2)\delta_{ik} \quad (1.61)$$

بمساعدة المعادلة الأولى من العلاقة (1.60) نجد أن :

$$\sigma^{kj}n^i(\lambda_1)\delta_{ik}=\sigma^{kj}n_k(\lambda_1)=\lambda_1 n^j(\lambda_1) \quad (1.62)$$

و بالعودة إلى العلاقة (1.60) يكون :

$$\mathbf{n}(\lambda_1).\mathbf{n}(\lambda_2)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}n^j(\lambda_1)n_j(\lambda_2) \quad (1.63)$$

و القرينة j يتم عليها الجمع . الطرف الثاني من المعادلة السابقة ما هو إلا الجداء السلمّي للشعاعين $\mathbf{n}(\lambda_1),\mathbf{n}(\lambda_2)$ مضروباً بالنسبة λ_1/λ_2 . و في حال اختلاف القيم الذاتية λ_1,λ_2 لايمكن أن تكون هذه المعادلة صحيحة إلا إذا كان :

$$\mathbf{n}(\lambda_1).\mathbf{n}(\lambda_2)=0 \quad (1.64)$$

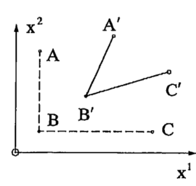
و بالتالي فالأشعة الذاتية متعامدة مع بعضها البعض . يمكن أن نجد أيضاً أنّ المستويات التي تحوي الإجهادات المماسية الحدية تنصّف الزاوية القائمة بين المستويات الرئيسية المحددة سابقاً و هي في العادة غير خالية من الإجهادات الناظمية و قيمة هذه الإجهادات تحددها العلاقات التالية :

$$\tau_1=\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2};\tau_2=\frac{\lambda_1-\lambda_3}{2}=\tau_{max};\tau_3=\frac{\lambda_1-\lambda_3}{2} \quad ;(\lambda_1\rangle\lambda_2\rangle\lambda_3) \quad (1.65)$$

1-5-موتّرة التشوّهات :

يتشوه الجسم المعرض للمؤثرات الخارجية كالحمولات و تغيرات درجات الحرارة و هبوط نقاط الاستناد . و كقيم مميزة لتحديد تشوه جسم ما أدخل مفهوم التشوهات . و قسمت التشوهات

إلى تشوّهات ناظمية (طولية) و تشوهات (عرضية) . يفهم من التشوّه الناظمي (الطولي) التغير الطولي لليف ما من المادة منسوب إلى طوله الأصلي . و يفهم من التشوّه المماسي أو العرضي (تشوّه القص) بأنه التغير الحاصل في الزاوية التي يصنعها ليفان متعامدان من المادة . لنفرض في البدء أنه لدينا ليفان من الوسط الخاضع للمؤثرات الخارجية محددان بالنقاط A . B . C الواقعة في المستوي الديكارتي x^1x^2 قبل تطبيق المؤثرات الخارجية و قد انتقلت هذه النقاط إلى الوضعية A',B',C' بعد تطبيق المؤثرات الخارجية (شكل 1-10)



شكل1- 10 : ألياف من الجسم الخاضع للتشوه

نسمي المقادير :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\overline{(A'B')_{x^1}} - \overline{AB}}{\overline{AB}}$$

(1.66)

$$\varepsilon_{22} = \frac{\overline{(A'C')_{x^2}} - \overline{AC}}{\overline{AC}}$$

بالتشوه الناظمي في الاتجاهين x^1 و x^2 على التوالي ، حيث $\overline{(A'B')}_{x^1}, \overline{(A'C')}_{x^2}$ هي مساقط $A'C', A'B'$ على المحورين x^2, x^1 . و يسمى المقدار :

$$2\varepsilon_{12} = \prec BAC - \prec B'A'C' \qquad (1.67)$$

بالتشوّه المماسي في المستوي x^1x^2 حيث $\prec$ تشير إلى مقدار الزاوية .

و بالمثل سوف نجد أن هناك تشوّهاً ناظمياً باتجاه المحور x^3 و هو ε_{33} و تشـــوّهات مماســـية في المستويين x^2x^3 و x^3x^1 و هي التشوّهات ε_{23}و ε_{31} . و تعرف عادة التشوّهات المماســـية $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ و $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}$ و $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$. و ترتب التشوّهات السابقة في مصفوفة ما يســـمّى بموتّرة التشوّهات بالشكل التالي :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}; i, j = 1,2,3 \qquad (1.68)$$

تتحدد وضعية الجسم المعرض للمؤثرات الخارجية بعد التشوّه بتعيين انتقالات كل نقطة من الجسم و يلزم لذلك تحديد مركبات انتقال كل نقطة من الجسم . فمثلاً وضعية الانتقال الجديدة للنقطـــة A و هي A' تتحدد بتعيين الشعاع:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= AA' = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3 = u_1\mathbf{e}^1 + u_2\mathbf{e}^2 + u_3\mathbf{e}^3 \\ &= u^i\mathbf{e}_i = u_i\mathbf{e}^i; i = 1,2,3 \end{aligned} \qquad (1.69)$$

حيث u^1, u^2, u^3 و u_1, u_2, u_3 هي مركبات شعاع الانتقال الضدّية و الأساسية على التـــوالي المنسوبة إلى جملة أشعة القاعدة الأساسية و الضدّية و سوف نرى في الفصل القادم أن العلاقة التي تربط التشوّهات السابقة بالانتقالات و التي تسمّى عادة علاقة التشوّهات – الانتقالات هي مـــن الشكل:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i}u^m{}_{,j}) \qquad (1.70)$$

و ذلك عندما تكون التشوّهات أصغر بكثير من الواحد $(\varepsilon \langle\langle 1)$.

6-1– تحويل موتّرة التشوّهات

لنفرض أن موتّرة التشوّهات ε_{ij} منسوب إلى جملة محاور إحداثية ديكارتية (x^1, x^2, x^3) بأشعتها الواحدّية (e_1, e_2, e_3) (جملة أساسية) أو تلك المنطبقة معها $(x_1 x_2, x_3)$ بأشـــعتها الواحدّية (e^1, e^2, e^3) ، و يراد تحويلها إلى جملة محاور إحداثية $(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}})$ أشـــعتها

الأساسية $(e_{\bar{1}},e_{\bar{2}},e_{\bar{3}})$ ترتبط معها جملة إحداثية أخـــرى $(x_{\bar{1}},x_{\bar{2}},x_{\bar{3}})$ أشـــعتها الضديّـــة $(e^{\bar{1}},e^{\bar{2}},e^{\bar{3}})$ و لنفرضْ أن هذه الأشعة ترتبط مع بعضها البعض بالعلاقات التالية :

$$e_i = a_i^{\bar{K}} e_{\bar{K}} ; e^i = a_{\bar{K}}^{i} e^{\bar{K}}$$
$$e_{\bar{i}} = a_{\bar{i}}^{K} e_K ; e^{\bar{i}} = a_K^{\bar{i}} e^K \qquad (1.71)$$

حيث $a_{\bar{K}}^{i}, a_i^{\bar{K}}$ و $a_K^{\bar{i}}, a_{\bar{i}}^{K}$ معاملات مصفوفات التحويل . باعتبار أن الجداءات الســـلمّية $(e_i.e^j)$ و $(e_{\bar{i}}.e^{\bar{j}})$ مساوية لموتّرة كرونيكر يمكن ببساطة الاستنتاج أن $a_{\bar{K}}^{i}$ هي المصفوفـــة المعاكسة للمصفوفة $a_i^{\bar{K}}$ و $a_{\bar{i}}^{K}$ هي المصفوفة المعاكسة للمصفوفة $a_K^{\bar{i}}$. في البدء ســـنعبر عن الإحداثيات $x^{\bar{i}}$ بدلالة مثيلتها x^i ، فشعاع المكان لنقطة ما في الفراغ يمكن التعبـــير عنـــه بالشكل :

$$r = x^{\bar{i}} e_{\bar{i}} = x^i e_i \qquad (1.72)$$

بتعويض المعادلة الأولى من العلاقة (1.71) في العلاقة السابقة نجد أن :

$$x^{\bar{i}} e_{\bar{i}} = x^i a_i^{\bar{K}} e_{\bar{K}} \qquad (1.73)$$

بضرب هذه العلاقة سلمّياً بالأشعة $e^{\bar{j}}$ و ملاحظة العلاقتين (1.4) و (1.12) يكون :

$$x^{\bar{j}} = x^i a_i^{\bar{j}} \qquad (1.74)$$

و باستخدام نفس الأسلوب يمكن برهان العلاقات التالية :

$$x_{\bar{j}} = x_i a_{\bar{j}}^{i}$$
$$x_j = x_{\bar{i}} a_j^{\bar{i}} \qquad (1.75)$$
$$x^j = x^{\bar{i}} a_{\bar{i}}^{j}$$

و بالنسبة لتحويل الانتقالات يمكن أيضاً برهان العلاقات التالية :

$$u^j = u^{\bar{i}} a_{\bar{i}}^{j}$$
$$u_j = u_{\bar{i}} a_j^{\bar{i}} \qquad (1.76)$$
$$u^{\bar{j}} = u^i a_i^{\bar{j}}$$
$$u_{\bar{j}} = u_i a_{\bar{j}}^{i}$$

لنعرف الآن موتّرة التشوّهات في الجملة الإحداثية $x^{\bar{i}}$ على غرار مثيلتها في الجملة x^i بالشكل:

$$\varepsilon_{\bar{K}\bar{l}} = \frac{1}{2}(u_{\bar{K},\bar{l}} + u_{\bar{l},\bar{K}} + u_{\bar{k},\bar{m}} u^{\bar{m}}{}_{,\bar{l}}) \qquad (1.77)$$

و لنحسب المقدار $a_i{}^{\bar{K}} \varepsilon_{\bar{K}\bar{l}} a_j{}^{\bar{l}}$ فنجد بعد ضرب الطرف الثاني من العلاقـــة الســـابقة بالمقـــادير $a_i{}^{\bar{K}} \quad ; \quad a_j{}^{\bar{l}}$ أن:

$$a_i{}^{\bar{K}} \varepsilon_{\bar{K}\bar{l}} a_j{}^{\bar{l}} = \frac{1}{2}(a_i{}^{\bar{K}} u_{\bar{K},\bar{l}} a_j{}^{\bar{l}} + a_j{}^{\bar{l}} u_{\bar{l},\bar{K}} a_i{}^{\bar{K}} + a_i{}^{\bar{k}} u_{\bar{k},\bar{m}} u^{\bar{m}}{}_{,\bar{l}} a_j{}^{\bar{l}}) \qquad (1.78)$$

باستخدام علاقات التحويل (1.76) و مشتق تابع التابع نستنتج بعد إيجاد مشتقات العلاقـــات (1.74) . (1.75) أن :

$$\begin{aligned}
u_{i,j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x^j} = a_i{}^{\bar{K}} \frac{\partial u_{\bar{K}}}{\partial x^{\bar{l}}} \cdot \frac{\partial x^{\bar{l}}}{\partial x^j} = a_i{}^{\bar{K}} u_{\bar{K},\bar{l}} a_j{}^{\bar{l}} \\
u_{j,i} &= \frac{\partial u_j}{\partial x^i} = a_j{}^{\bar{l}} \frac{\partial u_{\bar{l}}}{\partial x^{\bar{K}}} \frac{\partial x^{\bar{K}}}{\partial x^i} = a_j{}^{\bar{l}} u_{\bar{l},\bar{K}} a_i{}^{\bar{K}} \\
u_{m,i} &= \frac{\partial u_m}{\partial x^i} = a_m{}^{\bar{m}} \frac{\partial u_{\bar{m}}}{\partial x^{\bar{k}}} \frac{\partial x^{\bar{K}}}{\partial x^i} = a_m{}^{\bar{m}} u_{\bar{m},\bar{K}} a_i{}^{\bar{K}} \qquad (1.79) \\
u^m{}_{,j} &= \frac{\partial u^m}{\partial x^j} = a_{\bar{n}}{}^m \frac{\partial u^{\bar{n}}}{\partial x^{\bar{l}}} \frac{\partial x^{\bar{l}}}{\partial x^j} = a_{\bar{n}}{}^{\bar{m}} u^{\bar{n}}{}_{,\bar{l}} a_j{}^{\bar{l}}
\end{aligned}$$

و الجداء $u_{m,i} u^m{}_{,j}$ يمكن تحويله بالشكل التالي :

$$\begin{aligned}
u_{m,i} u^m{}_{,j} &= a_m{}^{\bar{m}} u_{\bar{m},\bar{K}} a_i{}^{\bar{K}} a_{\bar{n}}{}^m u^{\bar{n}}{}_{,\bar{l}} a_j{}^{\bar{l}} \\
&= a_i{}^{\bar{k}} u_{\bar{m},\bar{K}} a_i{}^{\bar{K}} \delta_{\bar{n}}{}^{\bar{m}} u^{\bar{n}}{}_{,\bar{l}} a_j{}^{\bar{l}} \\
&= a_i{}^{\bar{k}} u_{\bar{m},\bar{K}} u^{\bar{m}}{}_{,\bar{l}} a_j{}^{\bar{l}} \qquad (1.80)
\end{aligned}$$

باعتبار المساواة $(a_i{}^{\bar{k}} u_{\bar{k},\bar{m}} = a_i{}^{\bar{k}} u_{\bar{m},\bar{k}})$ وذلـــك لتمـــاثل $u_{\bar{k},\bar{m}}$ و $u_{\bar{m},\bar{k}}$ تصبـــح موتّـــرة التشوّهات المعرفة بالعلاقة (1.70) كالتالي :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(a_i{}^{\bar{K}} u_{\bar{K},\bar{l}} a_j{}^{\bar{l}} + a_j{}^{\bar{l}} u_{\bar{l},\bar{K}} a_i{}^{\bar{K}} + a_i{}^{\bar{k}} u_{\bar{k},\bar{m}} u^{\bar{m}}{}_{,\bar{l}} a_j{}^{\bar{l}}) \qquad (1.81)$$

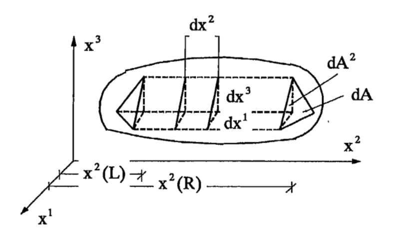
و بالمقارنة بين العلاقتين (1.78) و (1.81) نحصل على دستور تحويل التشوّهات التالي :

$$\varepsilon_{ij} = a_i{}^{\bar{K}} \varepsilon_{\bar{K}\bar{l}} a_j{}^{\bar{l}} \qquad (1.82)$$

وهو مشابه لدستور تحويل موتّرة الإجهادات .

1-7- تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي (مقولة غاوس Gauss)

لنعتبر موشوراً تفاضلياً من جسم ما حروفه موازية للمحور x^2 و مساحة مقطعه الذي ناظمه المحور x^2 هي dA^2 و لنفرض أن الموشور ممتد من الطرفين بحيث يتقاطع مع سطح الجسم (شكل1-11). في أماكن تقاطع الموشور مع الجسم تنشأ مساحة dA تتمثل بمثلث رؤوسه هي نقاط تقاطع أضلاع الموشور مع الجسم . يشكل مستوي المساحة dA و المستويات المارة بأضلاع هذا المثلث و الموازية للمستويات الإحداثية x^3x^1, x^2x^3, x^1x^2 هرماً رسم مكبراً كما



شكل1- 11 : موشور تفاضلي مقتطع من الجسم ممتد باتجاه x^2

في الشكل (6-1) . لنفرض أن حقلاً شعاعياً من الشكل:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = \mathbf{u}(x^1,x^2,x^3,t) &= u^{x^1}(x^1,x^2,x^3,t)\mathbf{e}_1 + u^{x^2}(x^1,x^2,x^3,t)\mathbf{e}_2 \\ &+ u^{x^3}(x^1,x^2,x^3,t)\mathbf{e}_3 = u^i\mathbf{e}_i\end{aligned} \quad (1.83)$$

معرّفاً ضمن فراغ الجسم . يسمى المقدار:

$$\text{div}\ \mathbf{u} = \frac{\partial u^{x^1}}{\partial x^1} + \frac{\partial u^{x^2}}{\partial x^2} + \frac{\partial u^{x^3}}{\partial x^3} = u^i,i \quad (1.84)$$

بتفرق الحقل الشعاعي **u** و التكامل :

$$\int_V \text{div} \ \ \mathbf{u} dV = \int_V (\frac{\partial u^{x^1}}{\partial x^1} + \frac{\partial u^{x^2}}{\partial x^2} + \frac{\partial u^{x^3}}{\partial x^3}) dV = \int_V u^i{}_{,i} dV \qquad (1.85)$$

بالتكامل على تفرق حقل شعاعي . لنعتبر الآن جزء التكامل المتعلق بـ u^{x^2} فهو يساوي:

$$\int \frac{\partial u^{x^2}}{\partial x^2} dV = \int_{A^2} \int_{x^2 = x^2(l)}^{x^2 = x^2(r)} (\frac{\partial u^{x^2}}{\partial x^2} dx^2) dA^2 = \int_{A^2} u^{x^2}(x^2(r)) - u^{x^2}(x^2(l)) dA^2$$

$$= \int_{A^2} \left\{ \left[u^{x^2} \left(x^2 = x^2(r) \right) \mathbf{e}_2 \right] \left[dA^2 \mathbf{e}_2 \right] + \left[u^{x^2} \left(x^2 = x^2(l) \right) \mathbf{e}_2 \right] \left[- dA^2 \mathbf{e}_2 \right] \right\}$$

$$= \int_A u^{x^2} \mathbf{e}_2 (n^2 \mathbf{e}_2) dA \qquad (1.86)$$

و ذلك بعد ملاحظة العلاقة (1.29) . و بالمثل نجد باعتبار الجزأين الآخرين للتكامل أن :

$$\int_V \frac{\partial u^{x^1}}{\partial x^1} dA = \int_A u^{x^1} \mathbf{e}_1 (n^1 \mathbf{e}_1) dA$$

$$(1.87)$$

$$\int_V \frac{\partial u^{x^3}}{\partial x^3} dV = \int_A u^{x^3} \mathbf{e}_3 (n^3 \mathbf{e}_3) dA$$

و يصبح التكامل الحجمي مكافئاً للتالي:

$$\int_V \text{div} \ \ \mathbf{u} dV = \int_A \left[\ u^{x^1} \mathbf{e}_1 (n^1 \mathbf{e}_1) + u^{x^2} \mathbf{e}_2 (n^2 \mathbf{e}_2) + u^{x^3} \mathbf{e}_3 (n^3 \mathbf{e}_3) \right] dA$$

$$= \int_A (u^{x^1} \mathbf{e}_1 + u^{x^2} \mathbf{e}_2 + u^{x^3} \mathbf{e}_3)(n^1 \mathbf{e}_1 + n^2 \mathbf{e}_2 + n^3 \mathbf{e}_3) dA$$

$$= \int_A \mathbf{u} \ \ \mathbf{n} \ \ dA \qquad (1.88)$$

وهي العلاقة الرّياضية المعبّرة عن مقولة غاوس في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي .

1-8- مقدمة في حساب المتغيرات

1-8-1- وصف عام لمسائل حساب المتغيّرات .

تندرج مسائل حساب المتغيرات ضمن مسائل حساب القيم الحديّة ، و لكن بشكل أعم مما هـــو عليه في طرح مسائل القيم الحديّة لتابع بمتغير واحد أو بعدّة متغيّرات . إذ يتعلق الأمر كما نعلم في مسائل إيجاد القيم الحديّة لتابع ما بإيجاد النقاط التي يكون فيها للتابع الحقيقي قيم عظمى أو قيـــم صغرى في مجال ما من مجالات تعريفه . أما في مسائل حساب المتغيرات فيتعلق الأمر بإيجاد منحـني أو سطح أو حجم ما تأخذ من أجله قيمة ما مرتبطة بهذا المنحني أو السطح أو الحجم قيمة حديّــة . و لإيضاح هذه المسالة ســيتم شــرحها علـى مســائل مبســطة . فمثــلاً بــين نقطتــين $p_{(2)}(x^1,x^2), p_{(1)}(x^1,x^2)$ ، من المستوي يمكن أن نمرّر عدداً لانهائياً من المنحنيات المســتمرة التي تمر بهاتين النقطتين . لنفرض أننا خصصنا لكل منحني من هذه المنحنيات قيمة ما متعلقة بـــه و لتكن في مثالنا هذا طول المنحني . و لنسمي هذه القيمة بالقيمة التابعية و التي يمكن حسابها كمـــا نعلم بالشكل:

$$I = \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} \sqrt{1 + (\frac{dx^2}{dx^1})^2}\, dx^1 \qquad (1.89)$$

شكل1-12: توابع المقارنة ضمن المجال $x^1_{(1)} \le x^1 \le x^1_{(2)}$

إذا هناك عدد لا نهائي من القيم I مقابلة لعدد المنحنيات المارة بين النقطتين $p_{(1)}, p_{(2)}$ و القيم I تشكل بدورها تابعا للمنحنيات المفروضة و سنطلق على هذا التابع لتمييزه عن التوابع العادية (تابعي) كمرادف لكلمة(Functional) . و مسألة حساب المتغيرات التي يمكن طرحها الآن هي إيجاد المنحني $x^2(x^1)$ الذي يقابل القيمة الصغرى للتابعي I أو بمعنى هندسي إيجاد أقصر منحني يربط بين النقطتين $p_{(1)}, p_{(2)}$.

قد يأخذ التابعي أشكالا أخرى و ليس من الضروري أن يكون الطول . فلو افترضنا أن $p_{(1)}$ و $p_{(2)}$ غير واقعتين في مستوي أفقي واحد و ليس على شاقول واحد و أن $p_{(1)}$ أعلى من $p_{(2)}$ ، فمثلا إذا طلب إيجاد المنحني الواصل بين $p_{(1)}$ و $p_{(2)}$ ، و الذي إذا ما تدحرجت عليه كرة مادية تحت تأثير وزنها الذاتي وصلت الكرة من $p_{(1)}$ إلى $p_{(2)}$ بأقصر زمن ممكن ، في هذه الحالة يتمثل التابعي بالزمن اللازم للوصول من $p_{(1)}$ إلى $p_{(2)}$ و الشروط الطرفية للمسألة تتمثل بكون المنحني الذي يتم البحث عنه مار بالنقطتين $p_{(1)}$ ، $p_{(2)}$. كما أنه ليس من الضروري أيضا أن يكون التابعي تكاملا على الطول و قد يأخذ أشكالا أخرى للتكامل . كالتكامل على السطح مثلا ، و المثال التالي يوضح ذلك . لنفرض أنه لدينا منحني فراغي مغلق طوله l نود تشكيله ليحيط بأصغر مساحة ممكنة . لنفرض أن λ مسقط المنحني الفراغي l على المستوي x^1x^2 و أن B المساحة التي يحيط بها هذا المسقط . و لنفرض أن المساحة المغلقة من l يمكن التعبير عن معادلتها بالشكل $x^3 = f(x^1, x^2)$ عندها يتمثل التابعي و لنرمز له الآن ب S بدلا من I في المثال السابق بمساحة السطح $x^3 = f(x^1, x^2)$ و التي يمكن حسابها بالشكل:

$$S = \iint_{\theta} \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x^1})^2 + (\frac{\partial f}{\partial x^2})^2}\, dx^1 dx^2 \qquad (1.90)$$

من أجل مساحة ما B تأخذ S قيمة محددة ، لذلك يمكن القول أن S تابعي المساحة B و المسألة المطروحة تعني إيجاد السطح $f(x^1, x^2)$ و الذي تأخذ من أجله S قيمتها الصغرى و الشروط الطرفية للمسألة تتلخص في البحث عن السطح الأصغري لنقاط محددة من λ حيث يجب أن تحسب تراتيب هذه النقاط x^3 من شرط وقوعها على المنحني l و الذي يحصر المساحة التي يتم البحث عنها . و قبل الاستطراد في معالجة المسألة سوف نوضح لماذا أدرجت مسائل حساب المتغيرات ضمن مسائل حساب القيم الحدية . من المعلوم أن مسألة حساب القيم الحدية لتابع ما

$f(x^1)$ تحول عادة إلى بحث عن حلول للمعادلة التفاضلية $f'(x^1) = 0$ حيث تمثــــل المعادلــة التفاضلية الشرط اللازم لوجود مثل هذه النهاية الحدية . و بالتالي تحقق القيم x^1 التي يأخذ مـــن أجلها التابع $f(x^1)$ قيما حدية المعادلة التفاضلية $f'(x^1) = 0$. و كذلك الأمر بالنسبة لمســائل حساب المتغيرات سوف نجد أن المنحنيات $f(x^1)$ أو السطوح $f(x^1, x^2)$ التي يأخذ من أجلــها التابعي I أو S قيما حدية يجب أن تحقق معادلة تفاضلية تسمى بمعادلة اويلر التفاضلية .

و للبحث عن توابع القيم الحدية للتابعي يسمح عادة بتوابع مقارنة فمثلا لإيجاد المنحني الأقصـــر $x^2(x^1)$ الذي يصل بين النقطتين $p_{(1)}, p_{(2)}$ شكل (12-1) يسمح بتوابع مقارنـــة $\tilde{x}^2(x^1)$ يجب أن تكون كلها مارة من النقطتين السابقتين . فإذا ما حصرنا توابـــع المقارنـــة بالمجموعـــة $\left|\tilde{x}^2(x^1) - x^2(x^1)\right| \langle \rho$ من أجل $x^1_{(1)} \le x^1 \le x^1_{(2)}$ فهذا يعني أننا أخذنا بعـــين الإعتبـــار توابع المقارنة $\tilde{x}^2(x^1)$ الواقعة في جوار التابع الممثل للحالة الحدية ، و الذي يتم البحث عنه ، و ذلك عندما تكون ρ صغيرة.و في هذه الحالة نستطيع القول أن التابع $x^2(x^1)$ يمثل حالة حديـــة نسبية .

2-8-1 – تعريف المتغير

لنفرض أن قيمة التابعي من أجل المنحني $x^2(x^1)$ الممثل للنهاية الحدية هي I و أن قيمة التـــابعي مـــن أجـــل منحـــني مقارنـــة $\tilde{x}^2(x^1)$ هـــي $\tilde{I}$ فـــإذا غـــــيرت $x^2(x^1)$ بـــــالمقدار $\Delta x^2(x^1) = \tilde{x}^2(x^1) - x^2(x^1)$ فإن تغير التابعي الملحق بهذا التغير هو $\Delta I = \tilde{I} - I$. لنــأخذ الآن تغيرا خاصا للمقدار $\Delta x^2(x^1)$ من الشكل :

$$\Delta x^2(x^1) = \tilde{x}^2(x^1) - x^2(x^1) = \varepsilon\eta(x^1) \qquad (1.91)$$

حيث $\eta(x^1)$ تابع عشوائي يحقق فقط شرط الاستمرارية كالمنحني $x^2(x^1)$ ، و ليـــس مـــن الضروري أن يكون متناه في الصغر و ε معامل متناه في الصغر يحقق الشـــرط $\left|\varepsilon\eta(x^1)\right| \le \rho$ و غير متعلق بالمتحول x^1 . نسمي هذا التغير الخاص للتابع $x^2(x^1)$ بمتغير $x^2(x^1)$ وذلـــك

عندما ينتهي ε إلى الصفر ونرمز لهذا المتغير بالرمز δx^2 ،ويمكن التعبير عنه بالصيغة الرياضية التالية :

$$\delta x^2 = \varepsilon(\frac{\partial \tilde{x}^2(x^1)}{\partial \varepsilon})_{\varepsilon=0} \qquad (1.92)$$

و ذلك لأنه يمكن بملاحظة العلاقة (1.91) التعبير عن $\tilde{x}^2(x^1)$ بالشكل :

$$\tilde{x}^2(x^1) = x^2(x^1) + \varepsilon\eta(x^1) \qquad (1.93)$$

و مشتق هذا التابع جزئيا بالنسبة للمقدار ε هو $\eta(x^1)$ و عندما نضرب هذا المشتق بالمقدار ε نحصل على المتغير $\Delta x^2(x^1)$ وفي حال سعي ε إلى الصفر نحصل على المتغير كما هو وارد في التعريف . قلنا أن للتابعي قيمة ملحقة بمنحني المقارنة $\tilde{x}^2(x^1)$ و هذه القيمة هي $\tilde{I}$ أصبحت بعد اعتبار المتغير الخاص لمنحني المقارنة تابعة للمقدار ε و تحقق المتراجحة و المعادلة التاليين :

$$\tilde{I} = \tilde{I}(\varepsilon) \geq (\varepsilon = 0) = I \qquad (1.94)$$

و ذلك لأنه عندما تنتهي ε إلى الصفر ينتهي منحني المقارنة $\tilde{x}^2(x^1)$ إلى المنحني المطلوب $\tilde{x}^2(x^1)$ و هذا ما يمكن استنتاجه من العلاقة (1.93) و بالتالي تنتهي قيمة $\tilde{I}(\varepsilon = 0)$ المقابلة للتابع $\tilde{x}^2(x^1)$ إلى قيمة I المقابلة للتابع $x^2(x^1)$. كما يمكن من العلاقة (1.89) الاستنتاج أن $\tilde{I}(\varepsilon) \geq I$ بمقارنة الحدين $(\frac{\partial \tilde{x}^2(x^1)}{\partial x^1})^2, (\frac{\partial x^2(x^1)}{\partial x^1})^2$. ننشر الآن $\tilde{I}(\varepsilon)$ وفق سلسلة تايلور بجوار $\varepsilon = 0$ فنحصل على:

$$\tilde{I}(\varepsilon) = \tilde{I}(\varepsilon = 0) + \varepsilon\frac{\tilde{I}'(\varepsilon = 0)}{1!} + \varepsilon^2\frac{\tilde{I}''(\varepsilon = 0)}{2!} + \cdots + \varepsilon^n\frac{\tilde{I}^{(n)}(\varepsilon = 0)}{n!} \qquad (1.95)$$

حيث $\tilde{I}'$ تعني المشتق بالنسبة للمقدار ε . و بملاحظة العلاقة (1.94) و إدخال تعريف المتغير نجد أن :

$$\delta I = \varepsilon\tilde{I}'(\varepsilon = 0) = \varepsilon(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \varepsilon})_{\varepsilon=0} \qquad (1.97)$$

يمثل المتغير الأول للتابعي والحد :

$$\delta^2 I = \varepsilon^2\tilde{I}''(\varepsilon = 0) = \varepsilon^2(\frac{\partial^2 \tilde{I}}{\partial \varepsilon^2})_{\varepsilon=0} \qquad (1.98)$$

متغيره الثاني وأخيرا الحد :

$$\delta^n I = \varepsilon^n \tilde{I}^{(n)}(\varepsilon = 0) = \varepsilon^n \left(\frac{\partial^{(n)} \tilde{I}}{(\partial \varepsilon)^n}\right)_{\varepsilon = 0} \tag{1.99}$$

المتغير من الدرجة n .

1-8-3- قابلية تبديل تتالي المتغير الأول و المشتق الأول

ليكن لدينا المنحي $g(x^2(x^1), x^1)$ المقابل لقيمة حدية لتابعي و منحنيات المقارنة له $\tilde{g}(\tilde{x}^2(x^1), x^1)$. هذه المنحنيات تابعة بدورها للمتحول المستقل x^1 ، و ترتبط مع بعضها البعض بتعريف التغير الخاص لمنحني المقارنة بالشكل:

$$\tilde{g}(\tilde{x}^2(x^1), x^1 = g(x^2(x^1), x^1) + \varepsilon \eta(x^1) \tag{1.100}$$

باشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للمقدار ε وإنهاء ε إلى الصفر ، ومن ثم الاشتقاق بالنسبة للمتحول المستقل x^1 نحصل على التوالي على :

$$\varepsilon\left(\frac{\partial \tilde{g}(\tilde{x}^2(x^1), x^1)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = 0} = \delta g = \varepsilon \eta(x^1) \tag{1.101}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left\{\delta g\right\} = \left\{\delta g\right\}_{,x^1} = \varepsilon \frac{\partial \eta(x^1)}{\partial x^1} \tag{1.102}$$

و باشتقاق العلاقة (1.100) أولا بالنسبة للمتحول المستقل x^1 و من ثم بالنسبة للمقدار ε و ضرب العلاقة الناتجة بالأخير ε و إنهاء ε إلى الصفر نحصل أيضا على التوالي على ما يلي :

$$\frac{\partial \tilde{g}(\tilde{x}^2(x^1), x^1)}{\partial x^1} = \tilde{g}, x^1 = \frac{\partial g(x^2(x^1), x^1}{\partial x^1} + \varepsilon \frac{\partial \eta(x^1)}{\partial x^1} \tag{1.103}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left\{\tilde{g}, x^1\right\}\right)_{\varepsilon = 0} = \delta\left\{g, x^1\right\} = \varepsilon \frac{\partial \eta(x^1)}{\partial x^1} \tag{1.104}$$

بمقارنة العلاقتين (1.102) ، (1.104) نجد أن :

$$\left\{\delta g\right\}_{,x^1} = \delta\left\{g_{,x^1}\right\} \tag{1.105}$$

أي أن المتغير الأول و المشتق الأول قابلين للتبديل .

1-8-4- معادلة أويلر التفاضلية

ذكرنا بالنسبة لمسائل حساب المتغيرات أنه لكي يأخذ تابعي ما قيمة حدية يجب أن يحقق المنحني المتعلق بهذا التابعي في حالته الحدية معادلة تسمى معادلة اويلر التفاضلية ، و سوف نستنتجها الآن لحالة مبسطة يكون فيها التابعي متعلقا بالتابع f المتعلق بدوره بالإحداثي المستقل x^1 وبالتابع $x^2(x^1)$ ومشتقه بالنسبة لـ x^1 أي $(x^2{}_{,x^1})$ على الشكل :

$$I = \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} f(x^1, x^2(x^1), x^2{}_{,x^1}(x^1))dx^1 \tag{1.106}$$

بعد فرض أن توابع المقارنة على غرار تلك الواردة في العلاقة (1.93) و أنها تمر كلها من النقطتين الثابتتين $p_{(1)}$ و $p_{(2)}$ ، يكون عند هاتين النقطتين :

$$\begin{aligned} &\tilde{x}^2(x^1{}_{(1)}) = x^2(x^1{}_{(1)}); \eta(x^1{}_{(1)}) = 0 \\ &\tilde{x}^2(x^1{}_{(2)}) = x^2(x^1{}_{(2)}); \eta(x^1{}_{(2)}) = 0 \end{aligned} \tag{1.107}$$

وهاتان المعادلتان تمثلان الشروط الطرفية للمسألة.بتوابع المقارنة المذكورة تصبح قيمة التابعي $\tilde{I}$:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\varepsilon) &= \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} f(x^1, \tilde{x}^2(x^1), \tilde{x}^2{}_{,x^1}(x^1))dx^1 \\ &= \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} f(x^1, x^2(x^1) + \varepsilon\eta(x^1), x^2{}_{,x^1}(x^1) + \varepsilon\eta_{,x^1}(x^1))dx^1 \end{aligned} \tag{1.108}$$

لنفرض أن التابع f مستمر و قابل للاشتقاق في مجال المقارنة المعتبر . و باعتبار أن التابع $x^2(x^1)$ مقابل للقيمة الحدّية للمتبع I ، بالتالي يأخذ التابعي أيضاً قيمة حدّية من أجل $\varepsilon = 0$ و هو ما ذكر كمضمون للعلاقة (1.94) . و بناء" عليه يجب أن ينعدم المشتق الأول للتابعي $\tilde{I}(\varepsilon)$ من أجل $\varepsilon = 0$ و المشتق الأول هو :

$$I'(\varepsilon) = \int_{x^1(2)}^{x^1(2)} (f_{,\tilde{x}^2} \tilde{x}^{2'} + f_{,(\tilde{x}^2,x^1)} \tilde{x}^{2'}{}_{,x^1}) dx^1$$

$$= \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} (f_{,\tilde{x}^2} \eta(x^1) + f_{,(\tilde{x}^2,x^1)} \eta_{,x^1}(x^1) dx^1 \qquad (1.109)$$

و ذلك بعد استخدام مشتق تابع التابع . الفتحة تعني الاشتقاق بالنسبة للمقدار ε . و عليه ينعدم هذا المشتق عندما تسعى ε إلى الصفر .

$$\delta I = \varepsilon \tilde{I}_{(\varepsilon=0)} = \varepsilon \left\{ \int_{x^1(1)}^{x^1(2)^1} f_{,x^2} \eta(x^1) + f_{,(x^2,x^1)} \eta_{,x^1}(x^1) dx^1 \right\} = 0 \qquad (1.110)$$

نلاحظ أننا انتقلنا من توابع المقارنة المميزة بالإشارة ˜ إلى التوابع التي نبحث عنها و ذلك لتطابقها من أجل $\varepsilon = 0$. نكامل الحد الثاني من الطرف الثاني بالتجزئة فنحصل على :

$$\int_{x^1(1)}^{x^1(2)} f_{,(x^2,x^1)} \eta_{,x^1}(x^1) dx^1 = f_{,(x^2,x^1)} \eta(x^1) \Big|_{x^1(1)}^{x^1(2)} - \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} [f_{,(x^2,x^1)}]_{,x^1} dx^1 \qquad (1.111)$$

بالتعويض في العلاقة (1.110) و إخراج التابع العشوائي $\eta(x^1)$ خارج قوسين ينتج :

$$\delta I = \varepsilon \left\{ f_{,(x^2,x^1)} \eta(x^1) \Big|_{x^1(1)}^{x^1(2)} + \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} \eta(x^1) \left[f_{,x^2} - [f_{,(x^2,x^1)}]_{,x^1} \right] dx^1 \right\} = 0 \qquad (1.112)$$

باعتبار أن الشروط الطرفية (1.107) محققة و أن $\eta(x^1)$ تابع عشوائي ، فحتى ينعدم التركيب السابق يجب أن يكون :

$$f_{,x^2} - \frac{d}{dx^1} f_{,(x^2,x^1)} = 0 \qquad (1.113)$$

و هي معادلة اويلر التفاضلية الموافقة لشرط انعدام المتغير الأول للتابعي I. .

يجب عدم الالتباس في تفسير التعبير $f_{,(x^2,x^1)}$ فهو لا يعني الاشتقاق أولا بالنسبة للمتحول x^2 و من ثم بالنسبة للمتحول x^1 كما يمكن التصور للوهلة الأولى وإنما يعني المشتق الجزئي للتابع f بالنسبة لمشتق التابع x^2 . و لكي نكتب المعادلة التفاضلية بشكل تفصيلي لا بد من كتابة

التفاضل الكلي للتابع $\frac{\partial f}{\partial x^2,x^1} = f_{,(x^2,x^1)} = g$ و ذلك باعتباره تابعا للمقادير x^1 ، x^2 ، x^2,x^1 :

$$\frac{d}{dx^1}g = (\frac{\partial g}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial g}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial g}{\partial x^2,x^1}dx^2,x^1)/dx^1$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2{}_{,x^1}} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2{}_{,x^1}\partial x^2}x^2{}_{,x^1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2{}_{,x^1}\partial x^2{}_{,x^1}}x^2{}_{,x^1x^1} \tag{1.114}$$

وتصبح معادلة أويلر التفاضلية بشكلها التفصيلي لهذه الحالة كالتالي:

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2{}_{,x^1}} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2{}_{,x^1}\partial x^2}x^2{}_{,x^1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2{}_{,x^1}\partial x^2{}_{,x^1}}x^2{}_{,x^1x^1} = 0 \tag{1.115}$$

و هي تمثل الشرط اللازم لكي يأخذ التابعي I قيمة حدية . و بالتالي للبحث عن المنحنيات التي تعطي تابعي ما قيمة حدية يجب البحث عن حلول معادلة اويلر التفاضلية و التي تحقق الشروط الطرفية المطلوبة . و كمثال على ذلك نعود إلى المسألة المطروحة في الفقرة (1-8-1) و المتعلقة بالبحث عن أقصر منحني يربط نقطتين مفروضتين . يتمثل التابع f أو تابع اويلر بالتابع الموجود بعد إشارة التكامل في العلاقة (1.89) أي :

$$f = \left[1 + (x^2,x^1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

هذا التابع لا يحوي x^1 بشكل صريح كما لا يحوي x^2 و بالتالي فمشتقه بالنسبة للتابع x^2 مساو للصفر

$$f,x^2 = 0$$

نحسب الآن مشتقه $\frac{d}{dx^1}f_{,(x^2,x^1)}$. لهذا الغرض نشتق الآن جزئيا بالنسبة لمشتق التابع x^2

$$f_{,(x^2,x^1)} = \frac{1}{2}\left[1 + (x^2,x^1)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.2x^2{}_{,x^1} = x^2{}_{,x^1} / \left[1 + (x^2{}_{,x^1})^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{u}{v}$$

و مشتقه الكلي بالنسبة للمتحول x^1 يحسب بالشكل :

$$\frac{d}{dx^1}f_{,(x^2,x^1)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$=\frac{1}{1+(x^2{}_{,x^1})^2}\left\{x^2{}_{,x^1x^1}\left[1+(x^2x^1)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{(x^2{}_{,x^1})^2 . x^2{}_{,x^1x^1}}{\left[1+(x^2{}_{,x^1})^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$=(x^2{}_{,x^1x^1})/\left[1+(x^2{}_{,x^1})^2\right]^{3/2}$$

و بالتالي ينتج من تطبيق معادلة اويلر التفاضلية على هذه المسألة العلاقة التالية :

$$f_{,x^2}-\frac{d}{dx^1}f_{,(x^2{}_{,x^1})}=x^2{}_{,x^1x^1}/\left[1+(x^2{}_{,}x^1)^2\right]^{3/2}=0$$

و هذه العلاقة معروفة بأنها تعطي مقلوب نصـــف قطـــر الإنحنـــاء لمنحـــني $(\frac{1}{\rho}=0)$ أي أن $(\rho\to\infty)$ و المنحني الذي نصف قطر انحناءه لا نهائي هو الخط المستقيم . إلا أنه يمكن استنتاج ذلك من العلاقة السابقة .باعتبار أن المخرج موجب دوما و أكبر من الصفر فحتى ينعدم الكســـر السابق لا بد من أن تساوي صورته الصفر أي :

$$x^2{}_{,x^1x^1}=\frac{d^2x^2}{(dx^1)^2}=0$$

و بمكاملة هذه المعادلة مرتين نحصل على معادلة المنحني المطلوب

$$x^2=c_0+c_1x^1$$

و هي معادلة خط مستقيم تحدد ثوابته c_0, c_1 من شروط مروره في النقطتين $P_{(1)}$ و $P_{(2)}$.

1-8-5- تعلق التابعي بعدد من التوابع

يمكن استنتاج معادلات اويلر التفاضلية و التي تحققها منحنيات متعلقة بتابعي ما متعلق بدوره بعدة متحولات مستقلة و بعدة توابع بشكل مماثل لما ورد في حالة تعلق هذا التابعي بمتحول مســـتقل وحيد و تابع وحيد ، و ذلك بعد افتراض متغير خاص لكل تابع يتعلق به التابعي . فلنفـــرض أن التابعي متعلق بالإضافة إلى x^1 بالتوابع x^2, x^3 و مشتقاتها بالشكل :

$$I=\int_{x^1(1)}^{x^1(2)}f(x^1,x^2,x^2{}_{,x^1},x^3,x^3{}_{,x^1})dx^1 \qquad (1.116)$$

نأخذ الآن متغيرا خاصا لكل تابع من التوابع كما ورد سابقا بالصيغة :

$$\tilde{x}^2 = x^2 + \varepsilon\eta(x^1)$$

$$\tilde{x}^3 = x^3 + \varepsilon\zeta(x^1) \qquad (1.117)$$

$\zeta(x^1), \eta(x^1)$ تابعان عشوائيان يحققان شروط الاستمرارية و ε متناه في الصغـــــر . باتبـــاع خطوات مشابهة لما سبق نحصل على المتغير الأول :

$$\delta I = \varepsilon \tilde{I}_{(\varepsilon=0)} = \varepsilon\left\{\left[\eta(f_{,x^2} - \frac{d}{dx^1} f_{,(x^2,x^1)}) + \zeta(x^3 - \frac{d}{dx^1} f_{,(x^3,x^1)})\right]dx^1\right\} = 0 \qquad (1.118)$$

مما يعني أن الشرط اللازم لكي يأخذ I قيمة حدية يتلخص في تحقق المعادلتين التفاضليتين :

$$f_{,x^2} - \frac{d}{dx^1} f_{,(x^2,x^1)} = 0$$

$$f_{,x^3} - \frac{d}{dx^1} f_{,(x^3,x^1)} = 0 \qquad (1.119)$$

و ينتج ذلك مباشرة من عشوائية التابعين $\zeta(x^1), \eta(x^1)$ ، و هذه المعادلات تحدد المنحنيات التي تعطي تابعي متعلق بها قيمة حدية . أما نوع القيمة الحدية إن كانت صغرى أم عظمى أم قيمـــــة مستقرة فتحددها إشارة المتغير الثاني فإذا كان $\delta^2 I \langle 0$ فالقيمـــــة الحديـــة عظمـــى وإذا كـــان $\delta^2 I = 0$ فالقيمة الحدية مستقرة أما إذا كان $\delta^2 I \rangle 0$ فالقيمة الحدية صغرى .

1-8-6- متغير تابع متعلق بعدة توابع

ليكن لدينا تابع ما f متعلق بالتابع x^2 و مشتقه x^2, x^1 أي :

$$f = f(x^2, x^2{}_{,x^1}) \qquad (1.120)$$

و لنفرض أن منحنيات المقارنة للتابعين هي :

$$\tilde{x}^2 = x^2 + \varepsilon\eta(x^1) \qquad (1.121)$$

$$\tilde{x}^2{}_{,x^1} = x^2{}_{,x^1} + \varepsilon\eta_{,x^1}(x^1)$$

يحسب متغيّر هذين التابعين وفق العلاقة (1.92) بالشكل :

$$\delta x^2 = \varepsilon(\frac{\partial\tilde{x}^2(x^1)}{\partial\varepsilon})_{\varepsilon=0} = \varepsilon\eta(x^1)$$

$$\delta x^2{}_{,x^1} = \varepsilon(\frac{\partial\tilde{x}^2{}_{,x^1}}{\partial\varepsilon})_{\varepsilon=0} = \varepsilon\eta_{,x^1}(x^1) \tag{1.122}$$

مشتق التابع بالنسبة للمقدار ε هو :

$$\frac{\partial f}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^2}\frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^2{}_{,x^1}}\frac{\partial\tilde{x}^2{}_{,x^1}}{\partial\varepsilon}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^2}\eta(x^1) + \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^2{}_{,x^1}}\eta_{,x^1}(x^1) \tag{1.123}$$

و ذلك باعتبار أن f تابع لكل من $\tilde{x}^2$ و $\tilde{x}^2{}_{,x^1}$ و كل منهما تابع للمقدار ε . وبضرب العلاقة السابقة بالمقدار ε وإنهاء ε إلى الصفر نحصل بعد ملاحظة العلاقتين (1.122) على :

$$\varepsilon(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon})_{\varepsilon=0} = \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^2}\varepsilon\eta(x^1) + \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^2{}_{,x^1}}\varepsilon\eta_{,x^1}(x^1)$$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^2}\delta x^2 + \frac{\partial f}{\partial x^2{}_{,x^1}}\delta x^2{}_{,x^1} \tag{1.124}$$

و هكذا نجد أن متغيّر تابع ما متعلق بعدة متحولات يعامل معاملة التفاضل الكلي و العلاقة التاليـة تمثل بعض القواعد الأخرى لحساب المتغيّرات .

$$\begin{aligned} &\delta(f_1 + f_2) = \delta f_1 + \delta f_2 \\ &\delta(f_1.f_2) = f_1\delta f_2 + f_2\delta f_1 \\ &\delta(\frac{f_1}{f_2}) = \frac{f_2\delta f_1 - f_1\delta f_2}{(f_2)^2} \end{aligned} \tag{1.125}$$

حيث f_1 و f_2 توابع على شاكلة التابع f في العلاقة (1.120) . يمكن تعميم النتائج السابقة الــتي أجريت على توابع متعلقة بمتحول مستقل و مشتقه الأول على توابع ضمنية متعلقة بمتحول مستقل و مشتقاتها بالنسبة لهذا المتحول من الدرجة (n) و لحالات أعم أخرى نلخصها في الحالات التالية:

***حالة تعلق التابعي بمشتقات تابع ما حتى الدرجة (n)**

$$I=\int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}} f(x^1,x^2,(x^2)',(x^2)'',....,(x^2)^{(n)})dx^1 \qquad (1.126)$$

حيث استبدلت كتابة المشتق $x^2{}_{,x^1}$ بالكتابة $(x^2)'$ و $x^2{}_{,x^1x^1}$ بالكتابة $(x^2)''$ و هكـــذا .

متغير هذا التابع وفق العلاقة (1.124) من الشكل:

$$\delta I=\int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}}\Big[\frac{\partial f}{\partial x^2}\delta x^2+\frac{\partial f}{\partial (x^2)'}\delta (x^2)'+\frac{\partial f}{\partial (x^2)''}\delta (x^2)''+\cdots+\frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(n)}}\delta (x^2)^{(n)}\Big]dx^1 \qquad (1.127)$$

بمكاملة الحدود على الطرف الثاني للعلاقة السابقة بالتجزئة عدة مرات بحيث يكامل k مرة حـــد المشتق من المرتبة (k) بالشكل :

$$\int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}}\frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(K)}}\delta (x^2)^{(K)}=\Big[\frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(K)}}\delta (x^2)^{(K-1)}-\frac{d}{dx^1}\frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(K)}}\delta (x^2)^{(K-2)}$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^{(K-1)}\frac{d^{K-1}}{(dx^1)^{(K-1)}}\frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(k)}}\delta x^2\Big|_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}}$$
$$+(-1)^K\int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}}\frac{d^K}{(dx^1)^{(K)}}\frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(K)}}\delta x^2 dx^1 \qquad (1.128)$$

بعد تعويض الحدود المكاملة في العلاقة (1.127) والاشتراط أن δx^2 ومشتقاتها حتى المرتبة (n-1) تنعدم في النقاط البدائية (1) و (2) نحصل على :

$$\delta I=\int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}}\Big[\frac{\partial f}{\partial x^2}-\frac{d}{dx^1}\frac{\partial f}{\partial (x^2)'}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{(dx^1)^n}\frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(n)}}\Big]\delta x^2=0 \qquad (1.129)$$

و بالتالي تكافؤ معادلة اويلر – لاغرنج.

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}-\frac{d}{dx^1}\frac{\partial f}{\partial (x^2)'}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{(dx^1)^n}\frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(n)}}=0 \qquad (1.130)$$

شرط القيمة الحدية للتابعي I المعتبر في العلاقة (1.126) .

***حالة تعلق التابعي بمشتقات m تابع حتى الدرجة (n)**

$$I=\int_{x^1(1)}^{x^1(2)} f(x^1,x^2,(x^2)',\cdots,(x^2)^{(n)},\ldots\ldots,x^m,(x^m)',\ldots\ldots,(x^m)^{(n)})dx^1 \qquad (1.131)$$

هذه الحالة مشابهة للحالة السابقة ، و بنتيجة إيجاد المتغير δI نحصل على m معادلة تفاضلية من معادلات اويلر – لاغرنج كتلك المشتقة في العلاقة (1.130) و لا داعي لتكرار مثل هذا الاشتقاق مرة أخرى .

***حالة كون التابعي تكاملا على السطح**

ندرس الآن الحالة التي يكون فيها التابعي تكاملا على سطح ما و متعلقا بمتحولين مستقلين بالإضافة إلى تعلقه بتابعين آخرين ومشتقيهما بالشكل :

$$I=\iint_A f(x^1,x^2,x^3(x^1,x^2),\frac{\partial x^3}{\partial x^1}(x^1,x^2))dx^1dx^2 \qquad (1.132)$$

تؤخذ توابع المقارنة $\tilde{x}^3(x^1,x^2)$ على غرار العلاقة (1.93) كما يلي :

$$\tilde{x}^3(x^1,x^2)=x^3(x^1,x^2)+\varepsilon\eta(x^1,x^2) \qquad (1.133)$$

حيث ε متناه في الصغر ، $\eta(x^1,x^2)$ تابع عشوائي يحقق شروط الاستمرارية . بأخذ المتغير الأول للعلاقة (1.132) نجد :

$$\delta I=\iint_A\Big[\frac{\partial f}{\partial x^3}\delta x^3+\frac{\partial f}{\partial x^3}\delta x^3{}_{,x^1}+\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^2}}\delta x^3{}_{,x^2}\Big]dx^1dx^2 \qquad (1.134)$$

بملاحظة أن :

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^1}}\delta x^3\Big)=\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^1}}\delta x^3{}_{,x^1}+\delta x^3\frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^1}}\Big)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^2}}\delta x^3\Big)=\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^2}}\delta x^3{}_{,x^2}+\delta x^3\frac{\partial}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^2}}\Big) \qquad (1.135)$$

نحصل من العلاقة (1.134) على :

$$\delta I = \iint_A \left[\frac{\partial f}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^1}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^2}}\right)\right]\delta x^3 dx^1 dx^2$$

$$+ \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^1}}\delta x^3\right) + \frac{\partial f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^2}}\delta x^3\right)\right] dx^1 dx^2 \qquad (1.136)$$

باستخدام مقولة غاوس التالية في تحويل التكامل السطحي إلى تكامل منحني :

$$\iint_A (u,x^1 + v_{,x^2}) dx^1 dx^2 = \oint_c (u dx^2 - v dx^1) = \oint_c \left(u\frac{dx^2}{ds} - v\frac{dx^1}{ds}\right) ds \qquad (1.137)$$

حيث v,u تابعين في x^2, x^1 و قابلين للتفاضل ,A سطح ما بطرف يمكن أن يكون مؤلفا من مجموعة منحنيات تلتقي مع بعضها البعض و لكن يجب أن يكون التقاؤها أملسا دون انكسار ، c المنحني الذي يحد المساحة A و هو موجه بالتوجيه الرياضي المعروف (إذا دارت أصابع اليد اليمنى على المنحني يكون إبهام اليد اليمنى متطابقا مع الناظم الموجب للمساحة) . $x^2(s), x^1(s)$ هي توابع التمثيل الوسيطي للمنحني c، s هو الطول المنحني . يمكن تحويل الحد الثاني من الطرف الأيمن للعلاقة (1.136) لنحصل على:

$$\delta I = \iint_A \left[\frac{\partial f}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^1}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^2}}\right)\right]\delta x^3 dx^1 dx^2$$

$$+ \oint_c \left[\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^1}}\frac{dx^2}{ds} - \frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^2}}\frac{dx^1}{ds} \right]\delta x^3 ds = 0 \qquad (1.138)$$

و باعتبار أن التكامل المنحني ينعدم من أجل الشروط الطرفية المحددة للمسألة كما أسلفنا في الفقرة 1-8-1 أي أن $(\delta x^3 = 0)$ على الطرف (الشرط الإجباري في تعريف المتغير (1.133)) أو من أجل الشروط الطبيعية حيث

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^1}}\frac{dx^2}{ds} - \frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^2}}\frac{dx^1}{ds} \right]_c = 0 \qquad (1.139)$$

في هذه الحالة تتمثل معادلة اويلر – لاغرنج بالمعادلة التفاضلية الجزئية التالية

$$\frac{\partial f}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^1}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^3{}_{,x^2}}\right) = 0 \qquad (1.140)$$

وهي مكافئة لشرط انعدام المتغير الأول للتابعي I.

9-1 المبرهنات الأساسية لحساب المتغيرات

1-9-1 المبرهنة الأولى

لنفترض أن التابع العشوائي $\eta(x^1)$ مستمر إلى جانب مشتقه الأول في المجال $]x^1_{(1)}, x^1_{(2)}[$ و قيمه معدومة في نقطة البدء ونقطة النهاية من هذا المجال و أن $f(x^1)$ تابع في المجال نفسه . فـإذا كان التكامل التالي:

$$\int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}} f(x^1)\eta(x^1)dx^1 = 0 \tag{1.141}$$

محققاً فهذا يعني بالضرورة أن التابع $f(x^1)$ معدوم في كل نقاط هذا المجال أي :

$$f(x^1) = 0; \quad \forall x^1 \in]x^1_{(1)}, x^1_{(2)}[$$

يمكن برهان هذه المقولة بشكل غير مباشر . لنفرض أن التابع $f(x^1)$ في نقطة ما مـن المجـال $x^1 = \xi^1$ مغاير للصفر مثلاً أكبر من الصفر $f(\xi^1)\rangle 0$ فوفق خاصية الاستمرارية يكون التـابع في المجال الجزئي $]\xi^1_{(1)}, \xi^1_{(2)}[$ الواقع ضمن المجال الكلي $]x^1_{(1)}, x^1_{(2)}[$ أيضاً موجبـاً . لنختـار $\eta(x^1)$ بالشكل :

$$\eta(x^1) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x^1_{(1)} \le x^1 \le \xi^1_{(1)} \\ (x^1 - \xi^1_{(1)})^2 (x^1 - \xi^1_{(2)})^2 & \text{for} \quad \xi^1_{(1)} \le x^1 \le \xi^1_{(2)} \\ 0 & \text{for} \quad \xi^1_{(2)} \le x^1 \le x^1_{(2)} \end{cases} \tag{1.142}$$

هذا التابع يحقق كل الشروط الواردة في المقولـة . و ذلـك لأن $\eta(x^1_{(1)}) = \eta(x^1_{(2)}) = 0$ و كذلك الجداء $(x^1 - \xi^1_{(1)})^2 (x^1 - \xi^1_{(2)})^2$ و مشتقه الأول ينعدمان من أجل $x^1 = \xi^1_{(1)}$ و $x^1 = \xi^1_{(2)}$ و خارج المجال $]\xi^1_{(1)}, \xi^1_{(2)}[$ يكون التابع $\eta(x^1)$ مطابق للصفر . و باعتبـار أن التابع $\xi(x^1)$ خارج المجال $]\xi^1_{(1)}, \xi^1_{(2)}[$ مطابق للصفر فيمكن كتابـة التكـامل (1.141) بالشكل :

$$\int_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1_{(2)}} f(x^1)(x^1 - \xi^1_{(1)})^2 (x^1 - \xi^1_{(2)})^2 dx^1 \tag{1.143}$$

و لهذا التكامل قيمة موجبة وفق المبرهنة الموسعة للقيمة المتوسطة للتكامل المحدود و القائلة بأنه إذا كان التابعان $g(x^1), f(x^1)$ مستمرين في مجال ما $]x^1_{(1)}, x^1_{(2)}[$ و $f(x^1)$ يحافظ على إشارته في المجال فإنه في المجال $]x^1_{(1)}, x^1_{(2)}[$ قيمة واحدة على الأقل ζ^1 بحيث يكون :

$$\int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}} f(x^1) g(x^1) dx^1 = g(\zeta^1) \int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}} f(x^1) dx^1 \qquad (1.144)$$

و باعتبار أنه للتكامل (1.143) قيمة موجبة و هو بالفرض معدوم فهذا يعني أننا توصلنا إلى نتيجة مناقضة للفرض القائل بأن التابع $f(x^1)$ مغاير للصفر و هذا بدوره يقتضي بأن يكون التابع $f(x^1)$ مطابقا للصفر . و يمكن الآن برهان نفس النتيجة لحالة التكامل الثنائي .

1-9-2- المبرهنة الثانية

بافتراض أن التابع العشوائي $\eta(x^1, x^2)$ مستمر إلى جانب مشتقاته الجزئية من المرتبة الأولى في المجال B و ينعدم على الطرف L لهذا المجال و أن $f(x^1, x^2)$ تابع مستمر في المجال نفسه فإذا كان التكامل :

$$\iint_B f(x^1, x^2) \eta(x^1, x^2) dx^1 dx^2 = 0 \qquad (1.145)$$

محققا فهذا يعني بالضرورة أن $f(x^1, x^2)$ مطابق للصفر في المجال B . للبرهان على ذلك نفترض أن التابع $f(x^1, x^2)$ مغاير للصفر وليكن على سبيل المثال موجبا في نقطة $p(\zeta^1, \zeta^2)$ ما من المجال B ، بفضل استمرارية هذا التابع فهو موجب أيضا في دائرة واقعة في جوار p نصف قطرها ρ و موجودة كليا ضمن المجال B . نختار الآن التابع العشوائي $\zeta(x^1, x^2)$ بالشكل :

$$\eta(x^1, x^2) = \begin{cases} 0 & \text{for } (x^1 - \zeta^1)^2 + (x^2 - \zeta^2)^2 \geq \rho^2 \\ \left[(x^1 - \zeta^1)^2 + (x^2 - \zeta^2) - \rho^2\right] & \text{for } (x^1 - \zeta^1)^2 + (x^2 - \zeta^2)^2 \langle \rho^2 \end{cases} \qquad (1.146)$$

و هذا التابع العشوائي يحقق كل متطلبات المبرهنة السابقة و التكامل (1..145) يتقلص ليصبح تكاملا لتابع موجب على مساحة الدائرة بنصف القطر ρ و هو لهذا السبب موجب . و هذا مناقض للفرض ، أي أن $f(x^1, x^2)$ مطابق للصفر . المبرهنتان الأولى و الثانية تبقيان صحيحتين

عندما يخضع التابع العشوائي η إلى شروط طرفية أقسى . كأن نطلب أن يكون للتابع مشـــتقات مستمرة حتى الدرجة n وأن ينعدم هو و مشــــتقاته ال (n-1) في النقــاط الطرفيــة للمجــال $\left]x^1{}_{(1)}, x^1{}_{(2)}\right[$ أو الطرف L للمجال B يبقى البرهان للحالة الأخيرة كما في السابق و تســتبدل القوة 2 في العلاقتين (1.142),(1.146) بالقوة n+1 . و كذلك الأمر يمكن برهان المقولتـــين السابقتين للتكامل الثلاثي و للتكامل البعدي من المرتبة n .

3-9-1 المبرهنة الثالثة

إذا كان التابع $g(x^1)$ مستمرا في المجال $\left]x^1{}_{(1)}, x^1{}_{(2)}\right[$ و كان التكامل :

$$\int_{x^1{}_{(1)}}^{x^1{}_{(2)}} g(x^1)\eta'(x^1)dx^1 = 0 \qquad (1.147)$$

من أجل أي تابع $\eta(x^1)$ المستمر هو و مشتقاته في المجال $\left]x^1{}_{(1)}, x^1{}_{(2)}\right[$ و المحقق للشرط الطرفي $\eta(x^1{}_{(1)}) = \eta(x^1{}_{(2)})$ فهذا يعني أن $g(x^1)$ ثابت .

نبدأ البرهان بفرض أن :

$$c = \frac{1}{x^1{}_{(2)} - x^1{}_{(1)}} \int_{x^1{}_{(1)}}^{x^1{}_{(2)}} g(x^1)dx^1 \qquad (1.148)$$

و التي يمكن كتابتها بالشكل :

$$\int_{x^1{}_{(1)}}^{x^1{}_{(2)}} \left[g(x^1) - c\right]dx^1 = 0 \qquad (1.149)$$

نختار الآن التابع العشوائي $\eta(x^1)$ كالتالي:

$$\eta(x^1) = \int_{x^1{}_{(1)}}^{x^1{}_{(2)}} \left[g(t) - c\right]dt, \eta'(x^1) = \left[g(x^1) - c\right] \qquad (1.150)$$

و تصبح المعادلة (1.147) موافقة للمعادلة التالية :

$$\int_{x^1{}_{(1)}}^{x^1{}_{(2)}} g(x^1)\left[g(x^1) - c\right]dx^1 = 0 \qquad (1.151)$$

نضرب طرفي المعادلة (1.149) بالثابت c- فينتج:

$$\int_{x^1{}_{(1)}}^{x^1{}_{(2)}} - c\left[g(x^1) - c\right]dx^1 = 0 \qquad (1.152)$$

و بجمع المعادلتين (1.151) , (1.152) نحصل على:

$$\int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}} \left[g(x^1) - c\right]^2 dx^1 = 0 \qquad (1.153)$$

و عليه يكون $g(x^1) = c$

1-9-4 المبرهنة الرابعة

إذا كان التابعان $b(x^1), a(x^1)$ مستمرين في المجال $\left[x^1_{(1)}, x^1_{(2)}\right]$ و تحقق التكامل :

$$\int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}} \left[a(x^1)\eta(x^1) + b(x^1)\eta'(x^1)\right] dx^1 = 0 \qquad (1.154)$$

من أجل أي تابع $\eta(x^1)$ محقق للشروط التي يحققها التابع نفسه في المبرهنة الثالثة فيجب أن يمتلك $b(x^1)$ في المجال $\left[x^1_{(1)}, x^1_{(2)}\right]$ المشتق $b'(x^1) = a(x^1)$

نفرض أولا أن $A(x) = \int_{x^1_{(1)}}^{x^{1(2)}} a(t)dt$ فنحصل بعد استخدام التكامل بالتجزئة ومراعاة الشروط الطرفية للتابع العشوائي على:

$$\int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}} a(x^1)\eta(x^1)dx^1 = -\int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}} A(x^1)\eta'(x^1)dx^1 \qquad (1.155)$$

و بهذا تصبح العلاقة (1-154) كما يلي :

$$\int_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}} \left[- A(x^1) + b(x^1)dx^1\right]\eta'(x^1)dx^1 = 0 \qquad (1.156)$$

ووفق المبرهنة الثالثة يكون :

$$b(x^1) = A(x^1) + c = \int_{x^1_{(1)}}^{x^{1(2)}} a(t)dt + c \qquad (1.157)$$

و عليه نحصل باشتقاق الطرفين على:

$$b'(x^1) = a(x^1) \qquad (1.158)$$

تقدم قواعد حساب المتغيرات المشروحة في الفقرات السابقة الغطاء النظري للطرق التقريبية التي يتم فيها تشكيل تابعي كطرق الطاقة التي سنتعرض لها في فصول لاحقة وطرق العناصر المنتهية التي تعتمد الطاقة كمعيار أو كضابط أساسي. إذ يمكن وفق قواعد حساب المتغيرات افتراض توابع

تقريبية متعلقة بثوابت اختيارية يتم تحديدها من شرط انعدام المتغير الأول للتابعي الخاص بالمسألة المطروحة.

وقبل الشروع في حل بعض الأمثلة الإيضاحية لما ورد في بعض من الفقرات النظرية سنستعرض باختصار حل المعادلة التكعيبية لحاجتنا إليها أثناء حساب الإجهادات الرئيسية .

1-10-حلول المعادلة التكعيبية

ليكن لدينا المعادلة العامة من الدرجة الثالثة

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0; \quad A \neq 0 \tag{1.159}$$

بالقسمة على A تتحول هذه المعادلة إلى الشكل:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0; \quad a = \frac{B}{A}; \quad b = \frac{C}{A}; \quad c = \frac{D}{A} \tag{1.160}$$

نحاول الآن حذف أمثال x^2 لذلك نجري التحويل:

$$x = y - \frac{a}{3} \tag{1.161}$$

فتأخذ المعادلة (1.160) بعد تعويض التحويل السابق فيها الشكل المبسط التالي:

$$y^3 + py + q = 0 \tag{1.162}$$

يحسب مميز هذه المعادلة بالشكل:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{1.163}$$

ووفق قيمة مميز هذه المعادلة نميز ثلاث حالات :

فإذا كان $0 < \Delta$ هناك حل حقيقي واثنان عقديان.

وإذا كان $0 = \Delta$ هناك ثلاث حلول حقيقية أحدها مضاعف.

أما إذا كان $0 > \Delta$ فهناك ثلاث حلول حقيقية.

تعطى الحلول العامة للمعادلة التكعيبية وفق كاردان كما يلي:

$$y_1 = u + v$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} i\sqrt{3} \qquad (1.164)$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2} i\sqrt{3}$$

حيث:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (1.165)$$

وهذه الحلول يمكن الحصول عليها عن طريق حسابها باستخدام التوابع المثلثية للحالة التي يكـــون فيها $0 \rangle \Delta$ والتي تملك ثلاث جذور حقيقية حيث تحسب هذه الجذور وفق الترتيب التالي:

نحسب أولا الزاوية φ بحساب جيب تمامها :

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}} \qquad (1.166)$$

ومن ثم نحسب الجذور الحقيقية الثلاثة للمعادلة بالترتيب التالي:

$$y_1 = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos\frac{\varphi}{3}$$

$$y_2 = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ\right)$$

$$y_3 = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ\right) \qquad (1.167)$$

وقبل الانتقال إلى الفصل اللاحق سوف نستعرض عددا من الأمثلة لتعميق فهمنا للمواضيع الـــتي نوقشت في هذا الفصل.

مثال 1-1:

لدينا في نقطة p من جسم ما حالة إجهادية محددة بالمركبات :

$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} 2. & -2. & 0. \\ -2. & 4. & -2. \\ 0. & -2. & 4. \end{pmatrix} \qquad kN/mm^2$$

والمطلوب :

- إيجاد المركبتين النّاظمية t_N والمماسية t_S على وفي مستوي محدد بالمعادلة:

$$4x^1 + 2x^2 - 2x^3 = 1$$

- حساب الإجهادات الرئيسية في النقطة p .

- تعيين نواظم المستويات الرئيسية.

في البدء نعين الناظم على المستوي المذكور

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(4x^1 + 2x^2 - 2x^3 - 1)}{\nabla|4x^1 + 2x^2 - 2x^3 - 1|} = \frac{4e^1 + 2e^2 - 2e^3}{\sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}}(4e^1 + 2e^2 - 2e^3)$$

وبعدها نحسب مركبات محصلة الاجهادات الكلية المؤثرة على المستوي الذي ناظمه $\mathbf{n}$

$$t^i{}_N = \sigma^{ij} n_j = \frac{1}{\sqrt{24}}(4 \quad 2 \quad -2)\begin{pmatrix} 2. & -2. & 0. \\ -2. & 4. & -2. \\ 0. & -2. & 4. \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{24}}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

ثم نحسب المركبتين الناظمية t_N والمماسية t_S

$$t_N = \mathbf{t.n} = \frac{1}{\sqrt{24}}(4 \quad 4 \quad -12)\frac{1}{\sqrt{24}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2.$$

$$t_S = \sqrt{|t|^2 - t_N{}^2} = \sqrt{\frac{176}{24} - 4} = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1.8257$$

لنحسب الآن الإجهادات الرئيسية والمساوية لجذور المعادلة المميزة لمعين مصفوفة الأمثال:

$$\begin{vmatrix} 2.-\lambda & -2. & 0. \\ -2. & 4.-\lambda & -2. \\ 0. & -2. & 4.-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{or} \qquad -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

$$I_1 = 2 + 4 + 4 = 10$$

$$I_2 = 2\times 4 + 4\times 4 + 4\times 2 - \left[(-2)^2 + (0)^2 (-2)^2\right] = 24$$

$$I_3 = \det \sigma^{ij} = 2(16-4) + 2(-8) = 8$$

وتصبح المعادلة المميزة كالتالي:

$$-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 24\lambda + 8 = 0$$

نجري التحويل:

$$\bar{\lambda} = \lambda - \frac{10}{3}; \qquad \lambda = \bar{\lambda} + \frac{10}{3}$$

فنحصل على المعادلة المبسطة:

$$-\bar{\lambda}^3 - \frac{28}{3}\bar{\lambda} - \frac{56}{27} = 0; \qquad y^3 + py + q = 0$$

ومميزها يساوي:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-56}{2\times 27}\right)^2 + \left(\frac{-28}{3\times 3}\right)^3 \langle 0$$

وبالتالي للمعادلة ثلاث جذور حقيقية تحسب بعد حساب :

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}} = \frac{-(-\frac{56}{54})}{\sqrt{\left(\frac{-\left|\frac{28}{3}\right|}{3}\right)^3}} = 0.18898; \qquad \varphi = 79^{\circ}.1066$$

كالتالي:

$$\bar{\lambda}_1 = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}\cos\frac{\varphi}{3} = 3.160626; \qquad \lambda_1 = 6.493959$$

$$\bar{\lambda}_2 = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}\cos(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ) = -.223417; \qquad \lambda_2 = 3.109916$$

$$\bar{\lambda}_3 = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}\cos(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ) = -2.937209; \qquad \lambda_3 = 0.396125$$

والقيم (6.493959، 3.109916، 0.396125) هي قيم الإجهادات الرئيسية الثلاثة.

لنحسب الآن نواظم المستويات الرئيسية الموافقة للإجهادات الرئيسية.

تعيين ناظم المستوي الرئيسي الموافق للإجهاد الرئيسي $\lambda_1 = 6.493959$:

نعوض هذه القيمة في جملة المعادلات المتجانسة فنحصل على جملة المعادلات لتعيين اتجاهات الناظم :

$$\begin{pmatrix} 2.-6.494 & -2. & 0. \\ -2. & 4.-6.494 & -2. \\ 0. & -2. & 4.-6.494 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.494 & -2. & 0. \\ -2. & -2.494 & -2. \\ 0. & -2. & -2.494 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

نختار $n_1 = 1.$ فتكون مركبات الناظم المطلوب كالتالي :

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 2.247 \\ -1.802 \end{pmatrix}$$

أويمكن حساب مركبات الناظم الواحدي بقسمة مركبات الناظم السابق على جذر مجموع مربع المركبات لنحصل على:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.328 \\ 0.737 \\ -0.591 \end{pmatrix}$$

وبشكل مماثل نحسب النواظم المتبقية فنجد أن الناظم الواحدي الموافق للإجهاد الرئيسي $\lambda_2 = 3.110$ معطى بالشكل :

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.591 \\ -0.328 \\ -0.737 \end{pmatrix}$$

والناظم الواحدي الموافق للإجهاد الرئيسي $\lambda_3 = 0.396$ معطى بالشكل :

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.737 \\ 0.391 \\ 0.328 \end{pmatrix}$$

مثال 1-2:

بين نقطتين p_1 ; p_2 واقعتين على ارتفاع مختلف و لكن ليس على نفس المحور الشاقولي x^2 y ، يطلب البحث عن أقصر منحني يصل بينهما و الذي إذا تدحرجت عليه نقطة مادية تحت تأثير ثقلها فقط قطعت المسافة على المنحني المطلوب في أقصر زمن ممكن .

الحل:

لنفرض أن معادلة المنحني :

$$x^2 = x^2(x^1)$$

تعطى سرعة النقطة المادية بالعلاقة:

$$v = \sqrt{2gx^2}$$

والسرعة هي مشتق المسافة بالنسبة للزمن ومنها يمكن حساب الزمن التفاضلي $d\,t$ لقطع مسافة تفاضلية $d\,s$:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v}$$

تحسب المسافة التفاضلية $d\,s$ كما نعلم وفق العلاقة:

$$ds = \sqrt{1 + (x^2{}_{,x^1})^2}\,dx^1$$

وبالتالي يكون الزمن التفاضلي $d\,t$ لقطع مسافة تفاضلية $d\,s$:

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (x^2{}_{,x^1})^2}}{\sqrt{2gx^2}}\,dx^1; \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} \frac{\sqrt{1 + (x^2{}_{,x^1})^2}}{\sqrt{x^2}}\,dx^1$$

معادلة اويلر التفاضلية:

$$F_{,x^2} - \frac{d}{dx^1} F_{,(x^2,x^1)} = 0$$

التابع F لا يحوي x^1 لذلك يمكن كتابة معادلة اويلر السابقة بالشكل :

$$\frac{dF}{dx^2} - \frac{dF_{,(x^2,x^1)}}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{dx^1} = 0$$

والتي يمكن اختصارها كما يلي:

$$\frac{d}{dx^2}(F - x^2{}_{,x^1} F_{,(x^2,x^1)}) = 0$$

والتكامل المباشر لهذه المعادلة هو:

$$F - x^2{}_{,x^1} F_{,(x^2,x^1)} = c$$

نحسب الآن مشتق F بالنسبة للمشتق $x^2{}_{,x^1}$ فنجد أن:

$$F_{,(x^2,x^1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \tfrac{1}{2}(1 + (x^2{}_{,x^1})^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x^2{}_{,x^1}$$

وبعد تعويض هذه القيمة وقيمة التابع F في التكامل المباشر لمعادلة اويلر نحصل على:

$$\frac{\sqrt{1 + (x^2{}_{,x^1})^2}}{\sqrt{x^2}} - \frac{(x^2{}_{,x^1})^2}{\sqrt{x^2}\sqrt{1 + (x^2{}_{,x^1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{c_1}}$$

$$(x^2{}_{,x^1})^2 = \frac{c_1 - x^2}{x^2}$$

بفرض أن:

$$x^2 = \frac{c_1}{2}(1 - \cos u)$$

يكون:

$$x^2{}_{,x^1} = \frac{c_1}{2} u' \sin u$$

بالتعويض في المعادلة $(x^2{}_{,x^1})^2 = \dfrac{c_1 - x^2}{x^2}$ وفصل متحولات المعادلة الناتجة نحصل على :

$$\frac{c_1}{2}(1-\cos u)du = \pm dx^1$$

وبإجراء تكامل هذه المعادلة نحصل على التمثيل الوسيطي للمنحني المطلوب:

$$x^1 = \pm\frac{c_1}{2}(u-\sin u)+c_2 \qquad x^2 = \frac{c_1}{2}(1-\cos u)$$

وهي المعادلات الوسيطية للمنحني المعروف بالسيكلوئيد .

مثال 1-3 :

يطلب حل المثال السابق بإجراء تكامل معادلة اويلر التفاضلية بالطريقة الاعتيادية أي دون اللجوء إلى التكامل المباشر .

كما وجدنا يعطى تابعي المسألة المطروحة بالشكل:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x^1(1)}^{x^1(2)} \frac{\sqrt{1+(x^2{}_{,x^1})^2}}{\sqrt{x^2}}dx^1$$

أي أن تابع لاغرنج F يكافىء بعد استبعاد الثابت $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ ،الذي يختزل عند التعويض في معادلة اويلر، مايلي:

$$F = \frac{\sqrt{1+(x^2{}_{,x^1})^2}}{\sqrt{x^2}}dx^1$$

وبهذا يصبح الحد الأول من معادلة اويلر التفاضلية كالتالي:

$$F_{,x^2} = -\frac{\sqrt{1+(x^2{}_{,x^1})^2}}{2(x^2)^{3/2}}$$

ويصبح الحد الثاني بعد إتمام عملية الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمشتق $x^2{}_{,x^1}$ والتام بالنسبة للمتحول المستقل x^1 كما يلي:

$$\frac{d}{dx^1}F_{,(x^2,x^1)} = -\frac{(x^2{}_{,x^1})^2}{2(x^2)^{3/2}\sqrt{1+(x^2{}_{,x^1})^2}} + \frac{x^2{}_{,x^1x^1}}{(x^2)^{1/2}[1+(x^2{}_{,x^1})^2]^{3/2}}$$

وبالتعويض في معادلة اويلر نحصل على:

$$-\frac{\sqrt{1+(x^2{}_{,x^1})^2}}{2(x^2)^{3/2}} - \left[-\frac{(x^2{}_{,x^1})^2}{2(x^2)^{3/2}\sqrt{1+(x^2{}_{,x^1})^2}} + \frac{x^2{}_{,x^1x^1}}{(x^2)^{1/2}[1+(x^2{}_{,x^1})^2]^{3/2}}\right] = 0$$

وبتوحيد المخارج وإجراء بعض الاختصارات تنتج لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$2x^2 . x^2{}_{,x^1x^1} + (x^2{}_{,x^1})^2 + 1 = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الشكل:

$$\phi(y, y', y'') = 0$$

حيث استبدلنا الرمز x^2 بالرمز y

$$2y \cdot y_{xx} + y^2{}_x + 1 = 0$$

هذه المعادلة خالية من المتحول x نقوم بتخفيض مرتبتها بفرض أن :

$$\frac{dy}{dx} = Z(y) \qquad y_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = Z_y Z$$

وبهذا تتحول المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية إلى معادلة من المرتبة الأولى:

$$2 \cdot y \cdot Z \cdot Z_y + Z^2 + 1 = 0$$

نقوم الآن بفصل متحولات هذه الأخيرة لتصبح:

$$-\frac{dy}{y} = \frac{2Z \cdot dZ}{1+Z^2}$$

ننجز تكامل طرفي المعادلة السابقة لنحصل على:

$$\ln c_1 + \ln\frac{1}{Y} = \int\frac{2Z \cdot dZ}{1+Z^2} = \ln(1+Z^2); \qquad y = \frac{c_1}{1+Z^2}$$

بفرض أن:

$$\frac{dy}{dx} = Z = tg\frac{u}{2}$$

نحصل باستخدام العلاقات المثلثية على:

$$y = \frac{c_1}{1 + tg^2 \frac{u}{2}} = c_1 \cos^2 \frac{u}{2} = \frac{c_1}{2}(1 - \cos u)$$

ومشتق هذا التابع بالنسبة للمتحول x هو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{c_1}{2}\sin u \frac{du}{dx} = Z = tg\frac{u}{2}$$

ومن العلاقة السابقة نحصل على dx بدلالة u

$$dx = \frac{\frac{c_1}{2}\sin u du}{tg\frac{u}{2}} = \frac{\frac{c_1}{2} 2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}du}{tg\frac{u}{2}} = c_1 \cos^2 \frac{u}{2} = \frac{c_1}{2}(1 - \cos u)du$$

وبعد إنجاز تكامل الطرفين ينتج:

$$x = \frac{c_1}{2}(u - \sin u) + c_2$$

وبالتالي يتمثل المنحني الناتج عن تكامل معادلة اويلر وسيطياً بالمعادلتين التاليتين:

$$x = \frac{c_1}{2}(u - \sin u) + c_2$$

$$y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos u)$$

وهما المعادلتان الوسيطتان للسيكلوئيد .

مثال 1-4:

من بين كل المنحنيات الواقعة في المستوي (x^1, x^2) و التي تربط بين النقطتين p_1, p_0 الواقعتين فيه يطلب البحث عن ذلك الذي إذا دار حول المحور x^1 ولّد أصغر مساحة ممكنة .

يعطى تفاضل الطول المنحني كما رأينا بالشكل:

$$ds = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dx^2}{dx^1})^2}\, dx^1$$

ويكون تفاضل المساحة الناتجة عن دوران المنحني حول المحور x^1 كما يلي:

$$dA = 2\Pi x^2 ds = 2\Pi x^2 \sqrt{1+(\frac{dx^2}{dx^1})^2}\, dx^1$$

وبالتالي تكون المساحة الناتجة عن الدوران:

$$A = \int_{x^1(0)}^{x^1(1)} 2\Pi \chi^2 \sqrt{1+(x^2{}_{,x^1})^2}\, dx^1$$

نعتبر أن التابعي بالشكل :

$$I = \int_{x^1(0)}^{x^1(1)} x^2 \sqrt{1+(x^2{}_{,x^1})^2}\, dx^1$$

التابع F لا يحوي بشكل صريح على x^1 فالتكامل المباشر لمعادلة اويلر التفاضلية يعطي:

$$F-(x^2{}_{,x^1})F_{,(x^2{}_{,x^1})} = c$$

ولكن لدينا:

$$F_{,(x^2{}_{,x^1})} = \frac{x^2 . 2(x^2{}_{,x^1})}{2\sqrt{1+(x^2{}_{,x^1})^2}} = \frac{x^2 .(x^2{}_{,x^1})}{\sqrt{1+(x^2{}_{,x^1})^2}}$$

وهذا يفضي إلى المعادلة التالية:

$$x^2 \sqrt{1+(x^2{}_{,x^1})^2} - \frac{x^2 .(x^2{}_{,x^1})^2}{\sqrt{1+(x^2{}_{,x^1})^2}} = c_1$$

والتي تصبح بعد الاختصار وفصل متحولاتها كالتالي:

$$\frac{c_1 dx^2}{\sqrt{(x^2)^2 - c^2{}_1}} = dx^1$$

وبعد إنجاز تكامل الطرفين وإجراء بعض العمليات الرياضية نحصل على معادلة المنحني المطلوب

$$x^1 - c_2 = c_1 \ln(x^2 + \sqrt{(x^2)^2-(c_1)^2}) - c_1 \ln c_1 ; \qquad x^2 + \sqrt{(x^2)^2-(c_1)^2} = c_1 e^{\frac{x^1-c_2}{c_1}}$$

$$x^2 = \frac{c_1}{2}(e^{\frac{x^1-c_2}{c_1}} + e^{-\frac{x^1-c_2}{c_1}}) = c_1 \cosh\frac{x^1-c_2}{c_1}$$

وهي معادلة منحني تجيبي قطعي .

مثال 1-5:

تعطى الطاقة الكامنة لحالة جائز طوله l يعمل فقط على الانعطاف ومعرض لحمولة موزعـــة $\bar{q}$ بالشكل:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l w_{,xx} EI w_{,xx} dx - \int_0^l \bar{q} w dx$$

حيث w سهم الانعطاف للجائز. والمطلوب:

- إيجاد المتغير الأول للتابعي Π
- إيجاد معادلة اويلر الموافقة لشرط انعدام المتغير الأول للتابعي Π
- استنتاج الشروط الطرفية التي يجب أن يحققها تابع الإنتقالات w

يعطى المتغير الأول للتابعي Π بالشكل:

$$\delta\Pi = \int_0^l w_{,xx} EI \delta w_{,xx} dx - \int_0^l \bar{q} \delta w dx = 0$$

للحصول على معادلة اويلر نبدأ بتحويل الحد الأول باستخدام قاعدة مشـــتق جـــداء مضـــاريب ومبرهنة غاوص

$$\int_0^l (w_{,xx} EI \delta w_{,x})_{,x} dx = \int_0^l w_{,xx} EI \delta w_{,xx} dx + \int_0^l (w_{,xx} EI)_{,x} \delta w_{,x} dx$$

$$\int_0^l w_{,xx} EI \delta w_{,xx} dx = w_{,xx} EI \delta w_{,x} \Big|_0^l - \int_0^l (w_{,xx} EI)_{,x} \delta w_{,x} dx$$

بمكاملة الحد الأخير من العلاقة السابقة بنفس الأسلوب على غرار ما سبق نحصل على:

$$\int_0^l [(w_{,xx} EI)_{,x} \delta w]_{,x} dx = \int_0^l (w_{,xx} EI)_{,xx} \delta w dx + \int_0^l (w_{,xx} EI)_{,x} \delta w_{,x} dx$$

$$-\int_0^l (w_{,xx} EI)_{,x} \delta w_{,x} dx = -(w_{,xx} EI)_{,x} \delta w \Big|_0^l + \int_0^l (w_{,xx} EI)_{,xx} \delta w dx +$$

ويصبح الحد الأول المذكور كالتالي:

$$\int_0^l w_{,xx} EI \delta w_{,xx} dx = w_{,xx} EI \delta w_{,x} \Big|_0^l - (w_{,xx} EI)_{,x} \delta w \Big|_0^l + \int_0^l (w_{,xx} EI)_{,xx} \delta w dx$$

بالعودة إلى العلاقة الأساسية التي تحدد المتغير الأول وتعويض العلاقة الأخيرة فيـــها وإخـــراج δ خارج الأقواس نحصل على المعادلة التالية:

$$\delta \Pi = \int_0^l ((w_{,xx} EI)_{,xx} - \bar{q}) \delta w dx + w_{,xx} EI \delta w_{,x} \Big|_0^l - (w_{,xx} EI)_{,x} \delta w \Big|_0^l = 0$$

وتكون معادلة اويلر الموافقة لشرط انعدام المتغير الأول للتابعي Π كالتالي:

$$(w_{,xx} EI)_{,xx} - \bar{q} = 0; \qquad \frac{d^2}{dx^2}(EI w_{,xx}) - \bar{q} = 0$$

وحتى تكون معادلة اويلر السابقة مكافئة للصفر يجب أن تتحقق الشروط الطرفية التالية:

$$\delta w_{,x}(x = 0) = \delta w_{,x}(x = l) = 0$$

$$\delta w(x = 0) = \delta w(x = l) = 0$$

1-11- المصادر العلمية

1 . Mueller, H .
Baumechanik (Stabtragwerke), Lehrbriefe (1-10) Zentralstelle fuer Hochsculfernstudium , Dresden 1982 .

2 . Goldner , H . ; Holzweiszig , F .
Leitfaden der technischen Mechanik
Fachbuchverlag , Leipzig 1982 .

3 . Reddy , J . N .
Energy and Variational Methods in Applied Mechanics with an

Introduction toThe Finite Element Method .
John Wiley and Sohn , New York . Chister . Brisbane Toronto
. Singapore ,1984 .

4 . Smirnow , W , I .
Lehrgang der Hoeheren Mathematik , IV/1
Deutscher Verlag der Wissenschaften , Berlin 1988 .

5 . Klingbeil , E .
Tensorrechnung fuer Ingenieure , BI Hochschultaschenbuecher Band
197 , Wissenschaftsverlag Mannheim /Wien/ Zuerich , 1989 .

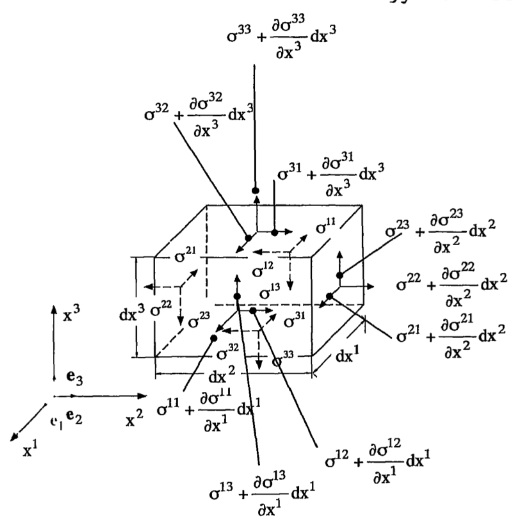
2- معادلات نظرية المرونة في جملة الإحداثيات الديكارتية

تبين من الفصل الأول أنه لنسب مجاهيل نظرية المرونة اختيرت جملتان إحداثيتان إحداهما سميت جملة القاعدة الأساسية محاورها الإحداثية x^1, x^2, x^3 و أشعتها المرتبطة بها e_1, e_2, e_3 والأخرى سميت جملة القاعدة الضديّة محاورها الإحداثية x_1, x_2, x_3 وأشعتها المرتبطة بهـا e^1, e^2, e^3 ، و هاتان الجملتان متطابقتان في حالة الجمل الإحداثية الديكارتية المتعامدة النظامية وطويلة أشـعتهما المرتبطة بهما هي واحدة الطول. ويمكن نسب مجاهيل نظرية المرونة إلى إحدى الجملتين أو كليهما ويمكن الانتقال بواسطة دساتير التحويل بين الجمل الإحداثية المختلفة. وقد جرت العادة أن تنسب الانتقالات والتشوّهات أو ما يسمّى بالمجاهيل الحركية (الكينماتيكية) لنظرية المرونـة إلى جملة القاعدة الضديّة ، فالمركبات الثلاثة لانتقال نقطة ما من وسط إنشـائي u_1, u_2, u_3 في اتجـاه المحاور الإحداثية الثلاثة x_1, x_2, x_3 على التوالي والتي تحدد الوضعية الانتقالية لنقطة ما تحديـداً تاماً تكتب قرائنها في الأسفل و يعبر عنها اختصاراً u_i . كما أن مركبات التشوّهات التي تحـدد وضعية الوسط الإنشائي المتشوّه هي تسعة تشوّهات وعدد التشوّهات المستقلة منها سـتة فقـط بسبب خاصيّة التناظر ، ثلاثة منها تشوّهات ناظمية و ثلاثة أخرى تشوّهات مماسية وترتب هـذه التشوّهات في مصفوفة ما يسمّى بمصفوفة موتّرة التشوّهات ε_{ij} . أما بالنسبة للإجهادات المجهولة و التي تحدد الحالة الإجهادية للجسم المتشوّه فهي تسعة إجهادات ستة منها مستقلة فقط وهي تنسب عادة إلى جملة القاعدة الأساسية ولذلك تكتب قرائنها في الأعلى وترتب عادة في مصفوفـة مـا يسمى بمصفوفة موترة الإجهادات σ^{ij} . وباختصار يلزم في نظرية المرونة لتعيين الحالة الانتقاليـة وحالة التشوهات و الحالة الإجهادية في جسم ما حساب خمسة عشر مجهولا و هي:

- ثلاث انتقالات u_i
- ستة تشوهات ε_{ij} $(\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji})$
- ستة إجهادات σ^{ij} $(\sigma^{ij} = \sigma^{ji})$

و لتعيين هذه المجاهيل لدينا مجموعة من المعادلات التفاضلية و الجبرية و عددها خمسة عشر معادلـة تحددها معادلات التوازن و علاقات التشوهات – الانتقالات و قانون السلوك تعرض فيما يلي:

2-1- معادلات التوازن



شكل (2-1) : تزايد الإجهادات في متوازي مستطيلات بأبعاد تفاضلية

نقتطع من الجسم المنسوب إلى جملة القاعدة الأساسية عنصرا حجميا بشكل متوازي مستطيلات متناهي في الصغر ، أطوال أضلاعه هي التفاضلات dx^1, dx^2, dx^3 . كل وجهين من وجوهه

عمودين على أحد المحاور الإحداثية و موازيين بالتالي للمستوي المشكل بالمحورين الآخرين . لرصد تغير توابع الإجهادات في البداية مثلا باتجاه المحور الإحداثي x^1 ننشر توابع الإجهادات المؤثرة على وجه متوازي المستطيلات العمودي على المحور x^1 و هي $\sigma^{11},\sigma^{12},\sigma^{13}$ وذلك باتجاه المحور x^1 وفق سلسلة تايلور

$$\sigma^{11}(x^1+dx^1,x^2,x^3)=\sigma^{11}(x^1,x^2,x^3)+\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial x^1}\frac{dx^1}{1!}+\frac{\partial^2\sigma^{11}}{(\partial x^1)^2}\frac{(dx^1)^2}{2!}+\cdots$$

$$\sigma^{12}(x^1+dx^1,x^2,x^3)=\sigma^{12}(x^1,x^2,x^3)+\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^1}\frac{dx^1}{1!}+\frac{\partial^2\sigma^{12}}{(\partial x^1)^2}\frac{(dx^1)^2}{2!}+\cdots$$

$$\sigma^{13}(x^1+dx^1,x^2,x^3)=\sigma^{13}(x^1,x^2,x^3)+\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial x^1}\frac{dx^1}{1!}+\frac{\partial^2\sigma^{13}}{(\partial x^1)^2}\frac{(dx^1)^2}{2!}+\cdots$$

(2.1)

و بشكل مماثل نحصل على تغير توابع الإجهادات باتجاه المحورين الآخرين x^2,x^3 . بعد إهمال كافة حدود المراتب العليا في سلسلة تايلور نحصل على الحالة الإجهادية المبنية في الشكل (2-1) .

بافتراض أن محصلة القوى الحجمية المؤثرة على واحدة الحجوم من الجسم هي $\bar{f}$ و أن مركبات هذه المحصلة في اتجاه المحاور الإحداثية x^1,x^2,x^3 هي على التوالي $\bar{f}^1,\bar{f}^2,\bar{f}^3$ ، نحصل بكتابة معادلة القوى المؤثرة على متوازي المستطيلات باتجاه المحور x^1 على المعادلة التالية :

$$(\sigma^{11}+\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial x^1}dx^1)dx^2dx^3+(\sigma^{21}+\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^2}dx^2)dx^1dx^3+\sigma^{31}+\frac{\partial\sigma^{31}}{\partial x^3}dx^3)dx^1dx^2$$

$$-\sigma^{11}dx^2dx^3-\sigma^{21}dx^1dx^3-\sigma^{31}dx^1dx^2-\bar{f}^1dx^1dx^2dx^3=0 \qquad (2.2-a')$$

و بالاختصار و القسمة على $dx^1dx^2dx^3$ ينتج :

$$\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial\sigma^{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma^{31}}{\partial x^3}+\bar{f}^1=0 \qquad (2.2-a)$$

و بشكل مماثل نحصل بكتابة معادلة توازن القوى في اتجاه المحورين الآخرين x^2,x^3 على :

$$\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^1}+\frac{\partial\sigma^{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma^{32}}{\partial x^3}+\bar{f}^2=0 \qquad (2.2\text{-b})$$

$$\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial x^1}+\frac{\partial\sigma^{23}}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma^{33}}{\partial x^3}+\bar{f}^3=0 \qquad (2.2\text{-c})$$

المعادلات الثلاثة(2.2-c) ، (2.2-b) ، (2.2 – a) تأخذ باستخدام طريقة الكتابـــة بـالقرائن الشكل :

$$\frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial x^{j}} + \bar{f}^{i} = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

و إذا كتبنا الحد $\frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial x^{j}}$ بالشكل σ^{ji},j (كتابة قرينة الاشتقاق في الأسفل جوهريـــة) تـأخذ المعادلة السابقة الشكل :

$$\sigma^{ji},j + \bar{f}^{i} = 0 \qquad (2.3)$$

إن تطبيق معادلات عزوم القوى حول ثلاثة محاور مارة بمركز ثقل متوازي المستطيلات و موازيـة للمحاور x^1, x^2, x^3 على التوالي تعطينا خاصية تناظر الإجهادات الآنفـــة الذكــر . و هــذه المعادلات هي على التوالي :

$$\begin{aligned} \sigma^{23} &= \sigma^{32} \\ \sigma^{31} &= \sigma^{13} \qquad (2.4) \\ \sigma^{12} &= \sigma^{21} \end{aligned}$$

أو

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ji} \qquad (2.5)$$

و بالتالي تقدم لنا علاقات التوازن ثلاث معادلات فقط من أجل حساب مجاهيل نظريـــة المرونـــة الخمسة عشر و تصاغ هذه العلاقات بالشكل :

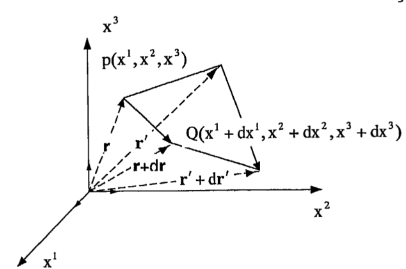
$$\sigma^{ij},j + \bar{f}^{i} = 0 \qquad (2.6)$$

من الواضح أن معادلات التوازن الثلاثة هذه غير كافية لحساب الإجهادات الستة المجهولة .

2-2- علاقات التشوهات –الانتقالات

من المعلوم أنه لتعيين الحالة الانتقالية لجسم متشوه يلزمنا معرفة مركبات الانتقالات في اتجاه المحاور الإحداثية لكل نقطة من نقاط الجسم ، أما وضعية التشوه فيلزمنا لتحديدها تحديدا تاما معرفـــة

الانتقالات النسبية بين أي نقطتين متجاورتين تفاضليا حيث يكون البعد بينهما مختلـــف بمقــدار تفاضلي فقط.وهذا يقتضي أن تبقى الارتباطات الداخلية لذرات الجسم مصانـــة ولا يحـــدث أي كسر



شكل 2-2 ليف من الجسم قبل وبعد التشوه

بـــين أجـــزاء الجســـم .لنفـــرض أن النقطتـــــين $Q(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ و $p(x^1, x^2, x^3)$ متجاورتين تفاضليا و البعد بينهما ds ، قد انتقلتا بعد وضعيـــة التشـــوه إلى الوضعية الجديدة حيث أصبح البعد بينهما ds' شكل (2-2) ، و لنفرض أن مركبات انتقـــالات النقطة p هي u^i فالشعاع :

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3 = u^i\mathbf{e}_i \tag{2.7}$$

يحدد الوضعية الانتقالية للنقطة p تماما . سوف نعتبر في البدء مركبات الإجهادات u_i . شـــعاع المكان للنقطة p هو :

$$\mathbf{r} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 = x^i\mathbf{e}_i \tag{2.8-a}$$

و للنقطة p' هو :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u} \tag{2.8-b}$$

البعدds بين النقطتين p و Q هو الجذر التربيعي لتزايد شعاع المكان **dr**

و يمكن حسابه بأخذ الجذر التربيعي للجداء السلمّي :

$$\mathbf{dr} = dx^1\mathbf{e}_1 + dx^2\mathbf{e}_2 + dx^3\mathbf{e}_3 = dx^i\mathbf{e}_i \equiv dx^j\mathbf{e}_j \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{dr.dr} &= dx^1dx^1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + dx^1dx^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + dx^1dx^3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\\ &+ dx^2dx^1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + dx^2dx^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + dx^2dx^3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\\ &+ dx^3dx^1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + dx^3dx^2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + dx^3dx^3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\\ &= dx^idx^j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\end{aligned} \tag{2.10}$$

و بملاحظة العلاقة (1.6) يعبر عن الجداء السلمي السابق بالشكل

$$(ds)^2 = \mathbf{dr.dr} = dx^idx^j\delta_{ij} \tag{2.11}$$

التباعد بين النقطتين p' و Q' يحدده الشعاع $\mathbf{dr}'$

$$\mathbf{dr}' = \mathbf{dr} + \mathbf{du} \tag{2.12}$$

$\mathbf{du}$ هو التفاضل الكلي للشعاع $\mathbf{u}$ و يساوي التفاضل الكلي لمركباته:

$$\mathbf{du} = du^1\mathbf{e}_1 + du^2\mathbf{e}_2 + du^3\mathbf{e}_3 = du^i\mathbf{e}_i \tag{2.13}$$

التفاضل الكلي للمركبة الأولى du^1 هو :

$$du^1 = \frac{\partial u^1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial u^1}{\partial x^3}dx^3 = \frac{\partial u^1}{\partial x^j}dx^j \tag{2.14}$$

و بشكل مماثل نحصل على التفاضل الكلي للمركبتين الأخريين :

$$\begin{aligned}du^2 &= \frac{\partial u^2}{\partial x^j}dx^j\\ du^3 &= \frac{\partial u^3}{\partial x^j}dx^j\end{aligned} \tag{2.15}$$

و منه يصبح التفاضل الكلي للشعاع $\mathbf{du}$:

$$\mathbf{du} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j}dx^j\mathbf{e}_i \tag{2.16}$$

و الشعاع $\mathbf{dr}'$ يأخذ الشكل :

$$\mathbf{dr}' = dx^i e_i + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j \mathbf{e}_i = dx^m \mathbf{e}_m + \frac{\partial u_m}{\partial x^n} dx^n \mathbf{e}_n \qquad (2.17)$$

نشكل الآن الجداء السلمّي $\mathbf{dr}'.\mathbf{dr}'$ الذي هو مربع المسافة بين p' و Q' أي :

$$(ds')^2 = \mathbf{dr}'.\mathbf{dr}' = dx^i dx^m \delta_{im} + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j dx^m \delta_{im}$$

$$+ \frac{\partial u^m}{\partial x^n} dx^l \delta_{im} + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{du^m}{\partial x^n} dx^j dx^n \delta_{im} \qquad (2.18)$$

نلاحظ أنه في التركيب السابق قد دخلت قرائن متعددة و هي i,j,m,n و كلها تـــأخذ القيـــم 1,2,3 . نحاول الآن إعادة صياغة هذا التركيب بحيث نستخدم قرائن متجانسة في حدوده . الحـد الأول من هذا التركيب يمكن صياغته بالشكل :

$$dx^i dx^m \delta_{im} \equiv dx^i dx^j \delta_{ij} \qquad (2.19)$$

و الحدان الثاني و الثالث تعاد صياغتهما بالإستعانة بالعلاقة (1.17) .

$$\frac{\partial u^l}{\partial x^j} dx^j dx^m \delta_{im} = \frac{\partial u_m}{\partial x^j} dx^j dx^m \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dx^i dx^j \qquad (2.20)$$

$$\frac{\partial u^m}{\partial x^n} dx^i dx^n \delta_{im} = \frac{\partial u_i}{\partial x^n} dx^i dx^n \equiv \frac{\partial u_j}{\partial x^i} dx^i dx^j \qquad (2.21)$$

أما الحد الأخير فيصاغ بالشكل :

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial u^m}{\partial x^n} dx^j dx^n \delta_{im} = \frac{\partial u_m}{\partial x^j} \frac{\partial u^m}{\partial x^n} dx^j dx^n = \frac{\partial u_m}{\partial x^i} \frac{\partial u^m}{\partial x^j} dx^i dx^j \qquad (2.22)$$

يمكن التأكد من صحة هذه العلاقات بفك التراكيب السابقة مع مراعاة القرائن المستقلة و القرائن التي يتم عليها الجمع إضافة إلى ملاحظة أن قرينة الاشتقاق $\frac{\partial u_i}{\partial x^j}$ تكتب في الأسفل أي بالشكل $u_{i,j}$. و تصبح العلاقة (2.18) مكافئة للصيغة :

$$(ds')^2 = dx^i dx^j \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dx^i dx^j + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} dx^i dx^j + \frac{\partial u_m}{\partial x^i} \frac{\partial u^m}{\partial x^j} dx^i dx^j \qquad (2.23)$$

إن مربع التطاول الذي حصل بين p و Q عند انتقالهما إلى الوضعية الجديدة p' و Q' هو:

$$(ds')^2 - (ds)^2 = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dx^i dx^j + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} dx^i dx^j + \frac{\partial u_m}{\partial x^i} \frac{\partial u^m}{\partial x^j} dx^i dx^j$$

$$= (\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_m}{\partial x^i}\frac{\partial u^m}{\partial x^j})dx^i dx^j \qquad (2.24)$$

نعرف الآن موترة غرين Green للتشوهات :

$$(ds')^2 - (ds)^2 = 2\varepsilon_{ij}dx^i dx^j \qquad (2.25)$$

بالمقارنة بين العلاقتين (2.24) و (2.25) نحصل على موترة التشوهات :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_m}{\partial x^i}\frac{\partial u^m}{\partial x^j})$$

$$= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i}u^m{}_{,j}) \qquad (2.26)$$

بنشر هذه العلاقة مع الأخذ بعين الاعتبار أن مركبات الانتقالات المنسوبة إلى جملة القاعدة الأساسية وإلى جملة القاعدة الضدية هي نفسها في حالة الجمل الإحداثية الديكارتية ويظهر الاختلاف فيهما فقط في حالة الإحداثيات المنحنية، نحصل على ست علاقات (بسبب خاصية التناظر $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) والمعروفة بعلاقات التشوهات الانتقالات في حالة السلوك الهندسي غير الخطي.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u_1}{\partial x^1})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial x^1})^2 + (\frac{\partial u_3}{\partial x^1})^2\right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u_1}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial u_3}{\partial x^2})^2\right]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u_1}{\partial x^3})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial x^3})^2 + (\frac{\partial u_3}{\partial x^3})^2\right]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^1}\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1}\frac{\partial u_3}{\partial x^2})$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2}\frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2}\frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2}\frac{\partial u_2}{\partial x^3});$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_1}{\partial x^1}\frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}) \qquad (2.27)$$

إذا اعتبرنا أن مشتقات الانتقالات صغيرة جدا أو أصغر بكثير من الواحد فيمكن إهمال جداءاتها مع بعضها البعض

$$\frac{\partial u_m}{\partial x^i} \langle\langle 1; (\frac{\partial u_m}{\partial x^i}\frac{\partial u^m}{\partial x^j} \approx 0 \qquad (2.28)$$

وتتبسط العلافات السابقة إلى :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x^1}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^2}); \qquad \text{or} \qquad \varepsilon_{ij}\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}) == \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x^3}; \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^3})$$

(2.29)

وهي العلاقات المعروفة في مجال ميكانيك الإنشاءات الخطي (حالة السلوك الهندسي الخطي).وهذه العلاقات هي الأخرى ست معادلات تفاضلية جزئية نستطيع فيها تعيين كافة التشوهات المجهولـة إذا ما علمت مركبات الانتقال الثلاثة .

2-3- قانون المادة

قانون المادة هي علاقات تربط بين حالة الإجهادات و حالة التشوهات الحاصلة في جسم مـا. وفي مجال ميكانيك الإنشاءات الخطي يفترض أن تكون مادة الإنشاءات قيد الدراسة متجانسـة أي أن خواص هذه المادة لا تتغير من نقطة إلى أخرى . كما سنفترض أن خواص المادة في نقطـة مـا واحدة في كل الاتجاهات و لا تتغير بتغير الاتجاه و يقال عندها أن المادة متناحيـة isothrope وسوف نعتبر هنا أيضا أن المادة مرنة . و هذه الخاصية تقتضي بأن تنعدم الإجهادات و التشوهات الناجمة عن حمولات ما عند إزالة هذه الحمولات . أسهل افتراض لسلوك المادة هو السلوك الخطـي و الذي يعبر عنه بقانون هوك Hooke و الشكل العام له هو :

$$\sigma^{ij} = c^{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.30}$$

حيث $c^{ijk\ell}$ هي معاملات المرونة للمادة . عدد هذه المعاملات وفق للعلاقـة (2.30) هـي 81 معامل باعتبار أن كل قرينة تأخذ القيم 1,2,3 على التوالي . غير أن خاصية تناظر الإجـهادات تقتضي بأن تكون المعاملات c^{ijkl} مساوية للمعاملات c^{jikl} و خاصية تناظر التشوهات تقتضـي بأن تكون المعاملات c^{ijkl} مساوية للمعاملات c^{ijlk} و بالتالي يكون عدد المعاملات المسـتقلة

فقط 36 معاملا. عدد المعادلات التي تعطيها العلاقة (2.30) دون اعتبار التناظر هي تسع معادلات حيث i, j قرائن مستقلة لا يجري عليها الجمع بينما k,l قرائن يجري عليها الجمع . و باعتبار خواص التناظر يصبح عدد المعادلات المستقلة ست معادلات فقط . و في حالة المادة المتجانسة المتناحية يأخذ قانون هوك الشكل :

$$\begin{vmatrix}\sigma^{11}\\ \sigma^{22}\\ \sigma^{33}\\ \sigma^{12}\\ \sigma^{23}\\ \sigma^{31}\end{vmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{vmatrix}1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & 1-2\nu & & \\ & & & & 1-2\nu & \\ & & & & & 1-2\nu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\end{vmatrix} \tag{2.31}$$

E معامل المرونة أو معامل يونغ ، ν معامل بواسون . هنا يجب الانتباه أن $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$ الواردة في العلاقة (2.29) هي نصف مثيلاتها $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ و المعروفة عادة في الكتب التي تعتمد الطريقة المصفوفية في كتابة علاقات نظرية المرونة .

علاقات الإجهادات – التشوهات (2.30) هي علاقات قابلة للعكس – و معكوسها يعطي علاقات التشوهات – الإجهادات :

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\end{vmatrix} = \frac{1}{E}\begin{vmatrix}1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 1+\nu & & \\ & & & & 1+\nu & \\ & & & & & 1+\nu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\sigma^{11}\\ \sigma^{22}\\ \sigma^{33}\\ \sigma^{12}\\ \sigma^{23}\\ \sigma^{31}\end{vmatrix} \tag{2.32}$$

و الشكل العام لهذه العلاقات هو :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma^{kl} \tag{2.33}$$

حيث $S_{ijk\ell}$ هي معاملات المطاوعة للمادة . تساهم علاقات الإ جهادات– التشوّهات في نظرية المرونة بست معادلات جبرية مستقلة خطياً . في حالة السلوك الفيزيائي غير الخطي تكون معاملات المرونة المعرفة في العلاقة (2.30) تابعة أيضاً لحالة التشوّهات .

2-4- شروط التوافق

شروط التوافق هي علاقات تربط مشتقات التشوّهات ببعضها البعض و هي لا تضيف أي معادلات إضافية تساهم في إيجاد حلول نظرية المرونة . و إنما هي شروط يجب أن تحققها توابع التشوّهات و بالتالي أيضاً الانتقالات لكي يتحقق ما يلي :

عند اقتطاع متوازي المستطيلات بأبعاد تفاضلية dx^1, dx^2, dx^3 من جسم يتعرض لتشوّهات ما يجب أن يملأ تماماً الفراغ الذي خلفه بعد تشوّهه و تشوّه الجسم الذي اقتطع منه . تعين توابع الانتقالات الثلاثة u_i الحالة الحركية (الكينماتيكية) للجسم تعيناً تاماً والحالة الحركية تتضمن حالة الانتقالات و حالة التشوّهات . المجاهيل الحركية في نظرية المرونة هي تسعة ثلاثة انتقالات و ست تشوّهات . وحتى تعين توابع الانتقالات الثلاثة الحالة الحركية المتضمنة تسعة مجاهيل تعيناً وحيداً يجب أن تتواجد بين توابع التشوّهات الستة المحسوبة من ثلاثة انتقالات ! (3-6) معادلة مستقلة ، أي ست معادلات مستقلة و هذه المعادلات يمكن الحصول عليها بالشكل التالي :

بافتراض أن القرائن i, j, k, ℓ تتحول على x^1, x^2, x^3 نحصل باشتقاق العلاقات (2.29) مرتين بتراكيب مختلفة على :

$$\varepsilon_{ij,k\ell} = \frac{1}{2}(u_{i,jk\ell} + u_{j,ik\ell})$$

$$\varepsilon_{k\ell,ij} = \frac{1}{2}(u_{k,\ell ij} + u_{\ell,kij})$$

$$\varepsilon_{\ell j,ki} = \frac{1}{2}(u_{\ell,jki} + u_{j,\ell ki})$$

$$\varepsilon_{ki,\ell j} = \frac{1}{2}(u_{k,i\ell j} + u_{i,k\ell j}) \qquad (2.34)$$

بجمع العلاقة الأولى والثانية ينتج :

$$\varepsilon_{ij,k\ell} + \varepsilon_{k\ell,ij} = \frac{1}{2}(u_{i,jk\ell} + u_{j,ik\ell} + u_{k,\ell ij} + u_{\ell,kij}) \qquad (2.35)$$

و بجمع العلاقة الثالثة و الرابعة نحصل على :

$$\varepsilon_{\ell j,ki} + \varepsilon_{ki,\ell j} = \frac{1}{2}(u_{\ell,jki} + u_{j,\ell ki} + u_{k,i\ell j} + u_{i,k\ell j}) \qquad (2.36)$$

بالمقارنة نجد أن :

$$\varepsilon_{ij,k\ell} + \varepsilon_{k\ell,ij} = \varepsilon_{\ell j,ki} + \varepsilon_{ki,\ell j} \qquad (2.37)$$

العلاقات السابقة تحتوي على 81 معادلة تنتج من إعطاء القرائن i, j, k, ℓ التبـــاديل x^1, x^2, x^3 وست منها فقط معادلات مستقلة خطياً و المعادلات البقية إما معادلات تافهة غير ذي أهميـــة أو معادلات تنتج من المعادلات الستة المستقلة بتراكيب خطية ، و العلاقات الستة المستقلة خطياً هي:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{(\partial x^1)^2} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x^1\partial x^2}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{(\partial x^3)^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{(\partial x^2)^2} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x^2\partial x^3}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{(\partial x^3)^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{(\partial x^1)^2} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial x^1\partial x^3}\\
&\frac{\partial}{\partial x^1}\left(-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x^2\partial x^3}\\
&\frac{\partial}{\partial x^2}\left(-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^1}\right) = \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^1\partial x^3}\\
&\frac{\partial}{\partial x^3}\left(-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x^1\partial x^2}
\end{aligned} \qquad (2.38)$$

لنعتبر أن جسما ما يشكل وسطا مستمرا يتعرض لحمولات خارجية . يتشوه هذا الوسط تحـــت تأثير الحمولات الخارجية و يغير شكله . إذا لم يحدث كسر في هذا الجسم نتيجة تطبيق الحمولات سيبقى الجسم مشكلا وسطا مستمرا . لنتصور الآن أن هذا الجسم مقسم إلى عدد لا نهائي مـــن متوازيات المستطيلات ذات الأبعاد التفاضلية . بنتيجة تشوه الجسم تتشـــوه أيضـــا متوازيـــات المستطيلات هذه ،لإعادة تشكيل الجسم يجب تجميع متوازيات المستطيلات هذه بعد تشـوهها . و

المعادلات (2.38) تضمن إعادة هذا التجميع بشكل يبقى الجسم فيه كوسط مستمر . يستفاد أحياناً من معادلات شروط التوافق في تشكيل المعادلة التفاضلية العامة لنظرية المرونة بدلالة الإجهادات .

2-5- المعادلات التفاضلية العامة لنظرية المرونة :

بإيجاز ما سبق يتضح أنه لإيجاد المجاهيل الكينماتيكية (انتقالات و تشوهات) و المجاهيل الستاتيكية (الإجهادات) الخمسة عشر لنظرية المرونة . لدينا المعادلات التالية:

3- معادلات توازن و هي معادلات تفاضلية جزئية .

6- معادلات تربط التشوهات بالانتقالات و هي أيضا معادلات تفاضلية جزئية .

6- معادلات تربط الإجهادات بالتشوهات و هي معادلات جبرية .

هناك إمكانيات عدة لصياغة المعادلات التفاضلية العامة لنظرية المرونة و هذه الإمكانيات تنضوي تحت ثلاث حالات .

الحالة الأولى : صياغة المعادلات التفاضلية العامة بدلالة الانتقالات فقط . إذ يمكن تعويض علاقات التشوهات – الانتقالات في علاقات الإجهادات – التشوهات فنحصل على علاقات تربط بين الإجهادات و الانتقالات و تعوض العلاقات الأخيرة الناتجة في معادلات التوازن فنحصل على المعادلات التفاضلية العامة بدلالة الانتقالات . يعمد عادة أثناء إجراءات هذه الصياغة إلى إدخال فرضيات تسهيلية حسب الحالة التي نعالجها (إطارات ، شرائح ، بلاطات ، . . .) ،إذ يستعاض عادة عن الانتقالات في كل نقطة من المقطع بالانتقالات مثلا في مركز ثقل المقطع و الدورانات مثلا حول المحاور الرئيسية المارة بمركز ثقل المقطع . كمثال على هذه الفرضيات التسهيلية فرضية برنولي BERNOULI ، فرضية تيموشنكو TIMOSHONKO ، فرضيات فلاسوف VLASOV . كما يستعاض عن الإجهادات في المقطع بتكاملها على المقطع المعتبر بعد إدخال فرضيات تسهيلية أيضا لتوزع الإجهادات (فرضية التوزع المنتظم للإجهادات فتل سانت فينانت (ST.VENANT)) ، و نتيجة هذه التكاملات تمثل قوى المقطع . إذا أجريت مثل هذه

الفرضيات التسهيلية نحصل عوضاً عن علاقات الإجهادات – الانتقالات على علاقات تربط بين قوى المقطع وبين الانتقالات والدورانات في نقاط مميزّة وحول محاور مميزّة للمقطع (علاقات قوى المقطع – الانتقالات) . تطبق بعدها علاقات التوازن على قوى المقطع وتعوض علاقات قوى المقطع – الانتقالات في معادلات التوازن الناتجة فنحصل على المعادلة العامة للمسألة موضوع البحث . تتميّز المعادلة التفاضلية العامة للحالة الأولى بأنها تحتوي على عدد أقل من المجاهيل (ثلاثة انتقالات) ولكن هذا العدد القليل من المجاهيل مقترن بارتفاع مرتبة المعادلات التفاضلية بالنسبة للحالات الأخرى.ويتم استخدام هذه الحالة عندما تعرض شروط طرفية مسبقة للانتقالات على السطح الخارجي للجسم موضوع البحث.

الحالة الثانية : صياغة المعادلات التفاضلية العامة بدلالة الإجهادات فقط . يتم صياغة المعادلات التفاضلية بدلالة الإجهادات باستخدام علاقات التوازن وشروط التوافق . و هي في الحالة العامة معادلات معقدة . إلا أن صياغتها لمادة مرنة متناحية سهلة . تستخدم مثل هذه الصياغة عند وجود شروط طرفية مفترضة مسبقا للإجهادات يجب تحقيقها على السطح الخارجي للجسم موضوع الدراسة . درجة المعادلات التفاضلية هذه هي أخفض منها للحالة الأولى و هذه ميزة مناسبة لكنها مقترنة أحيانا بصعوبات وذلك إذا أردنا حساب الانتقالات لأن حسابها يجري عن طريق التكامل . يلجأ عادة في مثل هذه الحالة لإدخال ما يسمى بتوابع الإجهادات وقد أدخلها الرياضي الإنكليزي المعروف AIRY . فإذا ما حققت هذه التوابع معادلات التوازن (وهذا ما افترضه AIRY) فإن صياغة المعادلة التفاضلية تصبح أبسط و قريبة من شكلها في الحالة الأولى و بذلك تزداد مرتبة المعادلة التفاضلية .

الحالة الثالثة : صياغة المعادلات التفاضلية العامة بدلالة الانتقالات والإجهادات معا. تستخدم هذه الحالة عند وجود شروط طرفية مفترضة مسبقا للإجهادات و شروط طرفية مفترضة مسبقا للانتقالات والمعادلات التفاضلية العامة تبقى على شكل مجموعتين من المعادلات التفاضلية الجزئية . المجموعة الأولى و تأخذ شكل معادلات التوازن المكتوبة بدلالة الإجهادات . و المجموعة الثانية هي علاقة الإجهادات بمشتقات الانتقالات .و نحصل عليها بتعويض علاقات التشوهات – الانتقالات في قانون المادة (أوعلاقات الإجهادات – التشوهات) .

2-6- الشروط الطرفية :

يتطلب إيجاد الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية إعطاء شروط طرفية مسبقة كافية لتعيين ثوابت الحلول العامة . و الشروط الطرفية المسبقة هي في حالتنا هذه شروط معطاة على السطح الخارجي للجسم موضوع الدراسة . و هي إما انتقالات معلومة على السطح الخارجي أو قوى معلومة (أو إجهادات) مطبقة على هذا السطح . تمثل الانتقالات المعلومة على جزء السطح الخارجي الشروط الطرفية الهندسية و القوى المعلومة على جزء السطح الخارجي الشروط الطرفية الميكانيكية و فيمايلي سنعبر بالمعادلات الرياضية عن هذه الشروط .

2-6-1- الشروط الطرفية الهندسية :

لنرمز لجزء السطح الخارجي للجسم الذي تكون فيه الانتقالات معلومة s_u ، و للانتقالات المعلومة على جزء هذا السطح $\overline{u}_i$. فإذا كانت توابع الانتقالات u_i تمثل حلا للمعادلات التفاضلية فهذه التوابع يجب أن تحقق الشروط الطرفية للانتقالات أي أنها سوف تتطابق مع الانتقالات المعلومة $\overline{u}_i$ على جزء السطح الخارجي و يعبر عن هذا التطابق بالمعادلة :

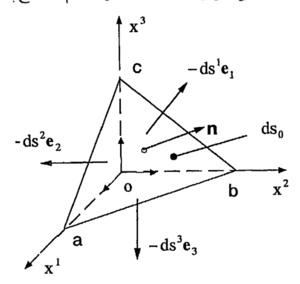
$$u_i = \overline{u}_i \quad \text{on} \quad s_u \tag{2.39}$$

2-6-2- الشروط الطرفية الميكانيكية :

نرمز لجزء السطح الخارجي الذي تكون عليه القوى و بالتالي الإجهادات معلومة s_σ و هو يساوي إلى السطح الخارجي الكلي s منقوصا منه جزء السطح s_u .

لنقتطع من السطح الخارجي هرماً oabc أبعاده تفاضلية شكل (2-3) ، وجوهه الثلاثة oca, obc, oab و التي مساحتها ds_1, ds_2, ds_3 واقعة في المستويات x^3x^1, x^2x^3, x^1x^2

على التوالي والوجه الرابع abc يمثل جزءاً تفاضلياً من السطح s_o . نوجه نواظم هذه السطوح وفق قاعدة اليد اليمنى . وفق هذه القاعدة يكون ناظم السطح oab الموجب متجهاً



شكل 2-3 : هرم مقتطع من السطح الخارجي

باتجاه المحور x^3 ، و هو اتجاه إبهام اليد اليمنى ، إذا دار oa وفق أصابع اليد اليمنى ليتطابق مع ob . و هكذا يمكن استنتاج اتجاه الناظم الموجب لبقية السطوح . الحالة الإجهادية على السطوح oca,obc,oab متطابقة مع تلك التي في الشكل (2-1) أما على السطح abc ذي المساحة ds_o فتؤثر القوة المعطاة $\overline{T}ds_o$ و المعلومة مسبقاً ،ومركباتها على المحاور الإحداثية: $\overline{T}ds_0 = \overline{T}^i ds_o e_i$ حيث $\overline{T}$ هو الإجهاد الكلي على واحدة السطح ، $\overline{T}^i$ مركبات هذا الإجهاد في اتجاه المحاور الإحداثية .على الوجه oab تؤثر القوة:

$$\sigma^{31}ds_3e_1 + \sigma^{32}ds_3e_2 + \sigma^{33}ds_3e_3$$

و على الوجه obc القوة :

$$\sigma^{11}ds_1e_1 + \sigma^{12}ds_1e_2 + \sigma^{13}ds_1e_3$$

و على الوجه oac القوة:

$$\sigma^{12}ds_2e_1 + \sigma^{22}ds_2e_2 + \sigma^{23}ds_2e_3$$

و مجموع هذه القوى المؤثرة يمكن التعبير عنه بالكتابة بالقرائن بالشكل : $\sigma^{ij}ds_j e_i$
معادلات توازن هذه القوى تقتضي أن يكون :

$$-\sigma^{ij}ds_j e_i + \overline{T}^i ds_o e_i = 0 \tag{2.41}$$

و بمقارنة المركبات مع بعضها البعض نجد أن :

$$\sigma^{ij}ds_j = \overline{T}^i ds_o \tag{2.42}$$

أو

$$\sigma^{ij}\frac{ds_j}{ds_o} = \overline{T}^i \tag{2.43}$$

ولكن مركبات شعاع الناظم على السطح abc على المحاور الإحداثية x^1, x^2, x^3 هـي علـى التوالي :

$$n_1 = \frac{ds_1}{ds_o}; n_2 = \frac{ds_2}{ds_o}; n_3 = \frac{ds_3}{ds_o} \tag{2.44}$$

أو باستخدام كتابة القرائن :

$$n_j = \frac{ds_j}{ds_o} \tag{2.45}$$

وختاما يعبر عن الشروط الطرفية الميكانيكية بالمعادلة :

$$\sigma^{ij}n_j = \overline{T}^i; \quad \text{on} \quad s_\sigma \tag{2.46}$$

2-7- ملاحظات حول قابلية الحل

برهن كيرشهوف KIRCHHOFF أنه في المجال الخطي لنظرية المرونـــة يوجـــد حـــل وحيـــد للمجاهيل الستاتيكية و الكينماتيكية (الحركية). وهذا لا يعني أنه بإمكاننا إيجاد هذا الحل تحليليـا . هناك حلول تحليلية وأغلبها لحالات هندسية بسيطة حتى أن هناك في المجال غير الخطي حلـــول وحيدة لبعض حالات التحميل البسيطة مع الأشكال الهندسية البسيطة للمنشآت. هناك أمثلة علـى عدم وحدانية الحل في الحالات غير الخطية : عند دراسة الاستقرار في المنشآت يحدث أحيانـــا في

حالة التوازن الحرج أن تزداد الانتقالات دون زيادة ملموسة في الحمل الذي أدى إلى هذه الحالة و ذلك عندما يصل مقدار الحمل إلى الحمل الحرج. وهذا يعني أنه يقابل لحالة تحميل معينة أكثر مـن وضعية انتقالية . في حالة السلوك المرن المثالي – اللدن المثالي للمادة يمكن أن يصبح المنشأ مسـتقرا عند حمل معين ، و عند زيادة هذا الحمل يبقى الاستقرار قائما. وهذا يعني أنه لا نستطيع تحديـد حالة إجهادات معينة مقابلة لحالة التشوهات الناشئة . في الحالة العامة لمعادلات نظرية المرونـة في المجال الخطي لا نستطيع عادة إيجاد حلول المعادلات التفاضلية الجزئية و الجبرية بشكل تحليلـي . و لذلك يلجأ إلى استخدام الطرق العددية . و من الطرق الهامة التي استخدمت في هذا المضمـار طريقة العناصر المنتهية التي لاقت رواجا واسعا منذ بداية الستينات من هـذا القـرن ، و اقـترن استخدام هذه الطريقة باستخدام طرق الطاقة كمعايير أو ضوابط لمقدار صحة الحلول التي حصـل عليها و سيتم في الفصل الثالث شرح مبادىء الطاقة الأساسية للحالة العامة و التي بنيت عليـها طريقة العناصر المنتهية – نموذج الانتقالات و طريقة العناصر المنتهية – نموذج الإجهادات .

2-8 –المصادر العلمية

1. Washizu, K
Variational Methods in Elasticicty and Plasticity
Oxford : Pergamon Press , 1987.

2. Zienkiewicz , O . C .
Methode der Finiten Elemente
VEB Fachbuchverlag , Leipzig 1987.

3- Goeldner , H .
Lehruch Hohere Festigkitslehre , Band 1 und 2
VEB Fachbuchverlag , Leipzig 1984.

4- Goeldner, H .
Arbeitsbuch Hohere Festigkeitslehre
VEB Fachbuchverlag , Leipzig 1981.

3- مبادىء الطاقة الأساسية و الموسعة

قبل البدء بقراءة هذا الفصل يجب دراسة الفقرات المتعلقة بقواعد حساب المتغيرات بعناية فائقة و ذلك من أجل الفهم المتكامل للاشتقاقات التي سترد أثناء دراسة هذا الفصل. يقصد بمبادىء الطاقة الأساسية تلك التي يمكن اشتقاقها مباشرة من معادلات نظرية المرونة دون الاعتماد على مبادىء أخرى كنقطة انطلاق . ومبادىء الطاقة الموسعة تلك التي تتخذ مبدءاً أساسياً كنقطة انطلاق لها. وتستخدم مضاريب لاغرنج لتحرير المبادىء الأساسية من بعض الشروط الواجب تحقيقها و ذلك تلافياً للمصاعب التي قد تولدها مثل هذه الشروط . هناك مبدءان أساسيان للطاقة في مجال ميكانيك الإنشاءات الخطي، مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري وهو يشكل القاعدة النظرية والمعيار الأساسي لطريقة العناصر المنتهية – نموذج الانتقالات، ومبدأ الطاقة المتممة الأصغري و هو يشكل المعيار الأساسي لطريقة العناصر المنتهية – نموذج الإجهادات. في الطريقة الأولى تمثل الانتقالات المتغيرات العشوائية التي يتم افتراضها وفق نواظم و ضوابط معينة تتعلق بالمسألة المطروحة بينما تكون في الطريقة الثانية الإجهادات هي المتغيرات العشوائية. سوف نرى أن الانتقالات أو الإجهادات العشوائية التي يمكن اختيارها للتعبير عن الحالة الانتقالية أو الإجهادية يجب أن تحقق شروط طرفية يصعب تحقيقها عادة". لذلك تستخدم مضاريب لاغرنج للاستغناء عن الشروط الطرفية و إعطاء حرية أكثر في اختيار المتغيرات العشوائية. فباستخدام مضاريب لاغرنج يمكن تعديل مبادىء الطاقة الأساسية للحصول على مبادىء طاقة موسعة.فمثلاً يمكن تعديل مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري للحصول على مبدأ الطاقة الكامنة المعدل الذي يختلف عن سابقه بإمكانية اختيار توابع عشوائية للإجهادات على سطح الوسط المدروس ، إضافة لاختيار توابع الانتقالات ضمن الوسط. المبدأ الأخير يمكن تعديله أيضاً للحصول على مبدأ الطاقة المعمم . والأخير يمكن تعديله أيضاً للحصول على مبدأ هيلنغر– رايسنر Hellinger-Reissner . كذلك يمكن تعديل مبدأ الطاقة المتممة الأصغري للحصول على مبدأ الطاقة المتممة المعدل ونستطيع اعتماداً على الأخير اختيار توابع للانتقالات على السطح الخارجي للوسط المدروس إضافة لإمكانية اختيار توابع الإجهادات ضمن الوسط المدروس . مبادىء الطاقة المعدّلة تشكل أسس طرق العناصر

المنتهية للنموذج المختلط و النموذج الهجين. وسوف نتخذ مبدأ الطاقة المتممة المعدل كمثال على مبادىء الطاقة المعدلة لانتشاره الواسع إضافة لكونه نموذج مناسب في معالجة بعض الأوساط الإنشائية المعقدة طبولوجياً و التي تتميز بتلاقي سطوحها وفق خطوط منكسرة كالمنشآت المثنية المستوية (foalded Structures) (المكونة من بلاطات وشرائح متصلة ببعضها البعض وفق خطوط منكسرة). بالطبع لم نذكر كل مبادىء الطاقة المعدلة التي يمكن اشتقاقها و يمكن للقارىء المختص الرجوع إلى المراجع المذكورة في نهاية الفصل .

3-1- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري

3-1-1- العمل الداخلي الكامن لقوى التشوّه

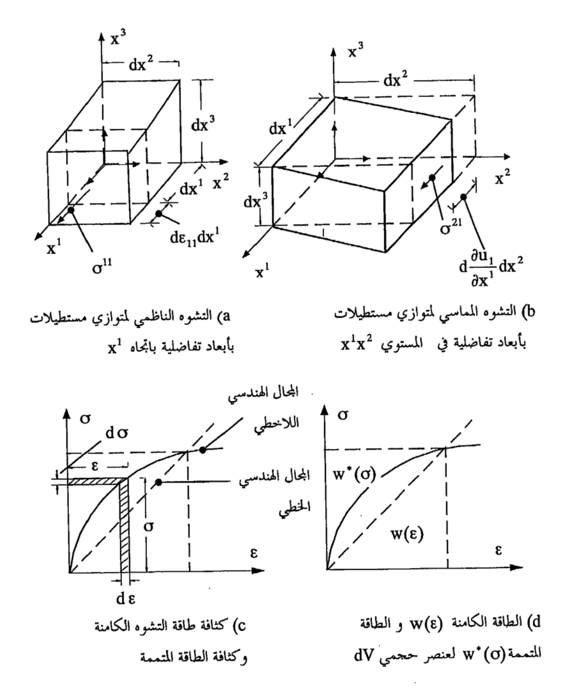
لنأخذ متوازي مستطيلات بأبعاد تفاضلية مقتطعاً من جسم ما و لنفترض تزايداً للتشوّهات باتجاه المحور x^1 بالمقدار $d\varepsilon_{11} = d(\frac{\partial u_1}{\partial x^1})$ و تزايداً للتشوّهات القاصة في المستوي x^1x^2 بمقدار $2d\varepsilon_{21}$ و هو المقدار $d(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u^1}{\partial x^2})$. تؤثر الإجهادات الناظمية σ^{11} على السطح الذي مساحته dx^2dx^3 . و محصلة هذه الإجهادات هي القوة $\sigma^{11}dx^2dx^3e_1$ و الممثلة بشعاع يتجه باتجاه المحور x^1 . و مقدار الانتقال الحاصل و الناتج عن تزايد التشوّه الناظمي بالمقدار $d\varepsilon_{11}$ يمكن التعبير عنه بشعاع الانتقال $d\varepsilon_{11}dx^1e_1$ ، و العمل الداخلي المنجز هو الجداء السلّمي لشعاع القوة وشعاع الانتقال أي :

$$\sigma^{11}dx^2dx^3e_1dx^1d(\frac{\partial u_1}{\partial x^1})e_1$$

و هو مساو للمقدار :

$$\sigma^{11}d\varepsilon_{11}dV$$

حيث dV حجم متوازي المستطيلات بأبعاده التفاضلية . والجداء السلّمي للشعاعين e_1 و e_1 مساو للواحد و بشكل مماثل ينتج العمل الذي تنجزه قوى التشوّه من تزايد التشوّه الناظمي $d\varepsilon_{22}$ $d\varepsilon_{33}$ و هو على التوالي : $\sigma^{33}d\varepsilon_{33}dV, \sigma^{22}d\varepsilon_{22}dV$. بالنسبة لعمل القوى القاصة نجد



a) التشوه الناظمي لمتوازي مستطيلات بأبعاد تفاضلية باتجاه x^1

b) التشوه المماسي لمتوازي مستطيلات بأبعاد تفاضلية في المستوي x^1x^2

c) كثافة طاقة التشوه الكامنة وكثافة الطاقة المتممة

d) الطاقة الكامنة $w(\varepsilon)$ و الطاقة المتممة $w^*(\sigma)$ لعنصر حجمي dV

شكل 3-1- العمل الداخلي لقوى التشوه

أن جزء تزايد التشوهات القاصة $d(\frac{\partial u_2}{\partial x^1}+\frac{\partial u_1}{\partial x^2})$ الذي يؤدي إلى انتقال في اتجاه الإجهادات σ^{21} هو المقدار $d\frac{\partial u_1}{\partial x^2}$ شكل (b -1-3). و باعتبار أن التشوه صغير جدا فإن تغير زاوية القص مساو لقوس الزاوية نفسها و طول القوس هو $(d\frac{\partial u_1}{\partial x^2})dx^2$ و بالتالي يكون شعاع الانتقال في اتجاه σ^{21} مساو للمقدار $(d\frac{\partial u_1}{\partial x^2})dx^2 e_1$ ، تؤثر الإجهادات σ^{21} على المستوي ذي المساحة dx^3dx^1 و شعاع القوة المحصلة لهذه الإجهادات هو : $\sigma^{21}dx^3dx^1 e_1$ و بالتالي يصبح العمل الداخلي المنجز مساو إلى : $\sigma^{21}(d\frac{\partial u_1}{\partial x^2})dx^2dx^3dx^1 e_1.e_1$ أو $\sigma^{21}du_{1,2}dV$

. بشكل مماثل نجد أن هذا العمل لمركبات الإجهادات المماسية المتبقية σ^{13},σ^{12} $\sigma^{32},\sigma^{31},\sigma^{23}$ هو على التوالي : $\sigma^{12}du_{2,1}dV$ ، $\sigma^{13}du_{3,1}dV$ ، $\sigma^{23}du_{2,3}dV$ ، $\sigma^{31}du_{1,3}dV$ ، $\sigma^{32}du_{2,3}dV$. و عمل القوى المماسية على التفاضل الحجمي dV يصبح :

$$\sigma^{12}du_{2,1}dV+\sigma^{21}du_{1,2}dV+\sigma^{13}du_{3,1}dV+\sigma^{31}du_{1,3}dV+\sigma^{23}du_{3,2}dV+\sigma^{32}du_{2,3}dV$$

و هو مساو إلى :

$$\sigma^{12}d\varepsilon_{12}dV+\sigma^{21}d\varepsilon_{21}dV+\sigma^{13}d\varepsilon_{13}dV+\sigma^{31}d\varepsilon_{31}dV+\sigma^{23}d\varepsilon_{23}dV+\sigma^{32}d\varepsilon_{32}dV$$

يمكن التأكد من ذلك بتبديل التشوهات المماسية بقيمها من العلاقات (2.27) . و عند تزايد التشوهات من القيمة 0 و حتى القيمة النهائية ε يصبح العمل الداخلي لمجموع القوى الناظمية و المماسية و يرمز له بالرمز $dW(\varepsilon)$ على التفاضل الحجمي dV كمايلي:

$$dW(\varepsilon)=(\int_0^{\varepsilon_{11}}\sigma^{11}d\varepsilon_{11}+\int_0^{\varepsilon_{12}}\sigma^{12}d\varepsilon_{12}+\int_0^{\varepsilon_{13}}\sigma^{13}d\varepsilon_{13}+\int_0^{\varepsilon_{21}}\sigma^{21}d\varepsilon_{21}+\int_0^{\varepsilon_{22}}\sigma^{22}d\varepsilon_{22}+\int_0^{\varepsilon_{23}}\sigma^{23}d\varepsilon_{23}$$

$$+\int_0^{\varepsilon_{31}}\sigma^{31}d\varepsilon_{31}+\int_0^{\varepsilon_{32}}\sigma^{32}d\varepsilon_{32}+\int_0^{\varepsilon_{33}}\sigma^{33}d\varepsilon_{33})dV=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma^{ij}d\varepsilon_{ij}dV \quad (3.1)$$

يسمى تغير هذا المقدار بالنسبة لواحدة الحجوم من الجسم بكثافة الطاقة الكامنة للجسم .

$$w(\varepsilon)=\int_{o}^{\varepsilon_{ij}}\sigma^{ij}d\varepsilon_{ij} \tag{3.2}$$

و التفاضل التام لهذا المقدار هو :

$$dw(\varepsilon)=\sigma^{ij}d\varepsilon_{ij} \tag{3.3}$$

في حالة الأجسام المرنة يكون التابع $w(\varepsilon)$ متعلقا فقط بحالة التشوهات ، بغض النظر عن كيفية حصول هذه التشوهات . ومخطط الإجهادات – التشوهات يتبع نفس المنحني عند التحميل و عند إزالة هذا التحميل . و التفاضل التام للتابع $w(\varepsilon)$ هو :

$$dw(\varepsilon)=\frac{\partial w(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij} \tag{3.4}$$

بمقارنة (3.3) مع (3.4) ينتج :

$$\sigma^{ij}=\frac{\partial w(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{3.5}$$

حتى الآن حسب العمل الداخلي الناتج عن تغير حالة التشوهات بالنسبة لعنصر حجمي تفاضلي dV. لحساب العمل الكلي الناتج على كامل الجسم يجب إجراء تكامل العلاقة (3.1) على كامل حجم الجسم .

$$W(\varepsilon)=\int_{V}w(\varepsilon)dV=\int_{V}\left(\int_{o}^{\varepsilon_{ij}}\sigma^{ij}d\varepsilon ij\right)dV \tag{3.6}$$

وهذا التعبير يمثل العمل الداخلي الكامن لقوى التشوه و هو يساوي الطاقة المختزنة في الجسم أو ما يسمى طاقة التشوه الداخلي .

3-1-2- عمل القوى الخارجية

ليكن لدينا جسما ما يخضع بالإضافة إلى محصلة القوى الحجمية $\overline{f}^{i}$ المؤثرة على واحدة الحجوم من الجسم dV إلى قوى خارجية $\overline{T}^{i}$ تؤثر على وحدة السطح dsمن جزء السطح الذي تكون

فيه القوى مفترضة s_σ . لنفرض تزايدا في تابع الانتقالات $u^i(x^1,x^2,x^3)$ الذي يصف الحالة الانتقالية للجسم مقداره التفاضل التام لهذا التابع . في هذه الحالة تنجز هذه القوى العمل التالي :

$$
\begin{aligned}
dW(V) &= \int_V \bar{f}^i e_i du^j e_j dV + \int_{s_\sigma} \bar{T}^i e_i du^j e_j ds \\
&= \int_V \bar{f}^i du^j \delta_{ij} dV + \int_{s_\sigma} \bar{T}^i du^j \delta_{ij} ds \\
&= \int_V \bar{f}^i du_i dV + \int_{s_\sigma} \bar{T}^i du_i ds
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

و ذلك لأن القوى المجهولة T^i المؤثرة على جزء السطح الذي تكون فيه الانتقالات مفترضة s_u لا تؤدي عملا باعتبار أن التفاضل التام للانتقالات على هذا السطح مساو للصفر (تفاضل قيمة معلومة ثابتة) . فإذا افترضنا أن جملة القوى الخارجية المطبقة على الجسم هي جملة محافظة أي أن القوى الخارجية لا تغير شدتها و لا اتجاهها أثناء هذا الانتقال فإن العمل المنجز عند تغير الحالة الانتقالية من الوضع البدائي $u_i(a)$ إلى الوضع النهائي $u_i(b)$ يصبح :

$$
\begin{aligned}
W(u) &= \int_{u_i(a)}^{u_i(b)} dw(u) = \int_V \bar{f}^i dV \int_{u_i(a)}^{u_i(b)} du_i) + \int_{s_\sigma} \bar{T}^i ds (\int_{u_i(a)}^{u_i(b)} du_i) \\
&= \int_V \bar{f}^i \left[u_{i(b)} - u_{i(a)} \right] dV + \int_{s_\sigma} \bar{T}^i \left[u_{i(b)} - u_{i(a)} \right] ds
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

تمكنا هنا من فصل التكاملين الحجمي والمنحني او بالأحرى إخراج القوى خارج إشارة التكامل المنحني لعدم تعلق هذه الأخيرة بالطريق المسلوك . والعلاقة (3.8) تعني أيضا أن العمل الخارجي لا يتعلق بالمنحني الذي حصل عليه الانتقال أو طريق الانتقالات المسلوك و إنما فقط بوضعيتي الانتقالات البدائية و النهائية.

3-1-3- ملخص معادلات نظرية المرونة في المجال الخطي و الشروط الطرفية

نلخص الآن معادلات نظرية المرونة في المجال الخطي لتسهيل الرؤيا الواضحة لما سنقوم به من اشتقاقات لاحقة . معادلات نظرية المرونة هي كما وردت في الفصل الأول:

1) معادلات التوازن :

$$\sigma^{ij}{}_{,j} + \bar{f}^{i} = 0 \qquad (3.9)$$

2) علاقات التشوهات – الانتقالات :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (3.10)$$

3) قانون المادة :

$$\varepsilon^{ij} = c^{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} \qquad (3.11)$$

4) الشروط الطرفية الهندسية :

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad s_u \qquad (3.12)$$

5) الشروط الطرفية الميكانيكية :

$$\sigma^{ij}n_j - \bar{T}^i = 0 \quad \text{on} \quad s_\sigma \qquad (3.13)$$

أو

$$T^i - \bar{T}^i = 0; T^i = \sigma^{ij}n_j \quad \text{on} \quad s_\sigma \qquad (3.14)$$

المعادلات السابقة تمثل ملخصا لما ورد في الفصل الأول . و هنا نود التلميح إلى الشروط الطرفية . فالتوابع u_i على s_u و T^i على s_σ هي توابع مشتقة من التوابع u_i ، σ^{ij} على التوالي التي تصف الحالة الانتقالية و الإجهادية على الجسم . أما $\bar{u}_i$ و $\bar{T}^i$. فهي قيم معلومة مسبقا و لذلك ميزت بالإشارة —

3-1-4- اشتقاق مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري

لنفترض أن جسما ما يشكل وسطا مستمرا موجود في حالة توازن . أي أن معادلات التوازن الداخلية لمتوازي مستطيلات بأبعاد تفاضلية مقتطع من الجسم (المعادلات (3.9)) محققة بالإضافة إلى تحقق توازن الجسم تحت تأثير القوى الخارجية $\bar{T}^i$ المؤثرة على جزء السطح الخارجي و بتعبير آخر يفترض أن الشروط الطرفية الميكانيكية (3.14) محققة . و لنفرض أيضا أن الجسم يخضع لشروط طرفية هندسية على جزء السطح الخارجي s_u ممثلة بالمعادلات (3.12) .

لنعطي هذا الجسم انتقالاً وهمياً مقداره المتغير الأول لتوابع الانتقالات الحقيقية $\delta u^i(x^1, x^2, x^3)$ دون المساس بشروطه الطرفية الهندسية عندها يكون :

$$\int_V (\sigma^{ij}_{\ ,j} + \bar{f}^i)\delta u_i dV + \int_{s_\sigma} (T^i - \bar{T}^i)\delta u_i ds = 0 \qquad (3.15)$$

في العلاقة (3.15) خفضت قرائن توابع الانتقالات δu^i لتصبح δu_i بعد مراعاة كون العمل الداخلي و العمل الخارجي هو الجداء السلمّي لأشعة القوى و أشعة الانتقالات كما ورد توضيحها في الفقرتين 3-1-1 و 3-1-2 ، و الإشارة السالبة في الحد الأول تدل على أن اتجاه تزايد القوى الداخلية دوماً معاكس لاتجاه تزايد الانتقالات . إن الانتقال الرياضي من المعادلتين (3.9) و (3.14) إلى المعادلة (3.15) يعني إنشائياً الاستغناء عن تحقق معادلات التوازن الداخلية على متوازي المستطيلات بأبعاد تفاضلية و استبدالها بتحقق معادلات التوازن على كامل حجم الجسم . كما يعني بشكل مماثل الاستغناء عن تحقق الشروط الطرفية الميكانيكية على هرم بأبعاد تفاضلية مقتطع من السطح الخارجي s_σ و استبدالها بتحقق الشروط الطرفية الميكانيكية على كامل السطح s_σ . لندخل الآن بعض التحويلات الرياضية على المعادلة (3.15) بغية تفسير مكوناتها إنشائيا . يمكن كتابة مشتق جداء مضاريب بالشكل :

$$-\int_V (\sigma^{ij}\delta u_i)_{,j} dV = -\int_V \sigma^{ij}_{\ ,j}\delta u_i dV - \int_V \sigma^{ij}\delta u_{i,j} dV \qquad (3.16)$$

الحد اليساري من المعادلة السابقة هو تكامل على حجم الجسم V لتفرق المقدار $\sigma^{ij}\delta u_i$ و يمكن تحويله إلى تكامل على سطح الجسم الخارجي الكلي s $(s = s_\sigma + s_u)$; وفق مقولة غاوص (Gauss) في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي :

$$-\int_V (\sigma^{ij}\delta u_i)_{,j} dV = -\int_S \sigma^{ij} n_j \delta u_j dS \qquad (3.17)$$

بتعويض المعادلة (3.17) في المعادلة (3.16) و إعادة ترتيب الحدود الأخيرة نحصل على :

$$-\int_V \sigma^{ij}_{\ ,j}\delta u_i dV = \int_V \sigma^{ij}\delta u_{i,j} dV - \int_S \sigma^{ij} n_j \delta u_i dS$$

$$= \int_V \sigma^{ij}\delta u_{i,j} dV - \int_{S_\sigma} \sigma^{ij} n_j \delta u_i dS - \int_{S_u} \sigma^{ij} n_j \delta u_i dS \qquad (3.18)$$

هنا تم تقسيم التكامل السطحي على s إلى تكاملين سطحيين على أجزاء السطح s_σ, s_u . لنعيد الآن صياغة المعادلة (3.15) بمساعدة المعادلة (3.18) فنحصل على ما يلي:

$$\int_V \sigma^{ij}\delta u_{i,j}dV - \int_V \bar{f}^i\delta u_i dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}^i\delta u_i ds$$

$$-\int_{S_\sigma}(\sigma^{ij}n_j - T^i)\delta u_i ds - \int_{S_u}\sigma^{ij}n_j\delta u_i ds = 0 \qquad (3.19)$$

المقدار $\sigma^{ij}n_j$ هو نفسه T^i (انظر العلاقة (3.14)) و هو الإجهاد علـــى وحـــدة الســـطح الخارجي الناشىء من تعويض معادلات سطح الجسم في توابع الإجهادات الداخلية و الحد قبـــل الأخير مساو بالتالي للصفر . الحد الأخير مساو للصفر باعتبار أننا اشترطنا تحقق الشروط الطرفيـة الهندسية إذ أن متغيّر مقدار معلوم مكافىء للصفر .

$$u_i = \bar{u}_i ; \delta u_i = \delta \bar{u}_i = 0 \quad \text{on} \quad s_u \qquad (3.20)$$

أما المقدار $\delta u_{i,j}$ في الحد الأول فهو مكافىء لتغير التشوهات $\delta\varepsilon_{ij}$ مع مراعاة خاصيـــة التنـــاظر لموترة التشوهات .

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) = \delta u_{i,j} \qquad (3.21)$$

بعد هذه الاعتبارات تصبح العلاقة (3.19) مكافئة للتالي :

$$\int_V \sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV - \int_V \bar{f}^i\delta u_i dV - \int_{s_\sigma} \bar{T}^i\delta u_i ds = 0 \qquad (3.22)$$

بتفحص العلاقة (3.22) نجد أن الحد الأول منها يمثل العمل الداخلي الكامن لقوى التشـــوه و أن الحدين الأخيرين يمثلان عمل القوى الخارجية . و العلاقة (3.22) ككل تمثل مبدءا هامـــا مـــن مبادىء ميكانيك الإنشاءات و هو مبدأ الانتقالات الوهمية . ينص هذا المبدأ على أن مجموع العمل الداخلي الكامن لقوى التشوه و العمل الخارجي للقوى المؤثرة على جسم مستمر يجري انتقـــالا وهميا دون المساس بالشروط الطرفية الهندسية مساو للصفر شرط أن يكون الجسم معـــزولا (أي دون إضافة طاقة خارجية) و أن تكون القوى المؤثرة على الجسم محافظة (أي لا تغير شـــدتها أو اتجاهها أثناء الانتقال الوهمي) . هذا المبدأ ساري المفعول سواء في المجال الفيزيائي الخطي بالإضافة إلى المجال الهندسي الخطي و غير الخطي لأننا حتى الآن لم نضع أية شروط يجـــب تحققـــها أثنـــاء الاشتقاق و التي تحدد مجال الاستخدام . لنقصر الآن بحثنا على المجال الخطي و لنشـــترط ســـلوكا فيزيائيا خطيا للمادة أي تحقق قانون هوك (3.11) عندها نستطيع إخراج إشارة المتغير خارج الحد الأول وفق الشكل :

$$\delta(\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}) = \delta(c^{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell}\varepsilon_{ij}) = c^{ijk\ell}(\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{k\ell}$$

(3.23)

$$+\varepsilon_{k\ell}\delta\varepsilon_{ij}) = 2c^{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell}\delta\varepsilon_{ij} = 2\sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij}$$

كما نستطيع إخراج إشارة المتغير خارج الحدين الأخيرين باعتبار أن متغير قيمة معلومـــة مســـاو للصفر. و بعد هذه الاشتراطات نحصل على مبدأ الطاقة الكامنة الذي يمكن كتابته بالشكل :

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int_V \varepsilon_{ij}c^{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell}dV - \int_V \bar{f}^i u_i dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}^i u_i ds\right) = 0$$

(3.24)

$$\delta\Pi = \delta(\Pi_i + \Pi_a) = \delta\Pi_i + \delta\Pi_a = 0$$

حيث Π_i الطاقة الكامنة لقوى التشوه و Π_a طاقة القوى الخارجية و هي مكافئة لمعكوس عمل القوى الخارجية أما Π فهي الطاقة الكامنة للجسم. في هذا السياق لا بد أن نذكر أن التســـمية الرياضية للقيمة Π هي ما نطلق عليه اسم تابعي أو (functional) هذا التابعي يـــأخذ قيمـــة حدية كما هو واضح من العلاقة (3.25) إذ أن متغيره الأول مساو للصفر . لتحديد ماهية هـــذه القيمة الحدية إن كانت قيمة صغرى أو عظمى نبحث عن إشارة المتغير الثاني للقيمة التابعية .

المتغير الأول للتابعي Π وفق العلاقة (3.24) هو :

$$\delta\Pi = \int_V c^{ijk\ell}\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{k\ell}dV - \int_V \bar{f}^i \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}^i \delta u_i ds \qquad (3.25)$$

و المتغير الثاني بعد الأخذ بعين الاعتبار أن التابع الذي يجري أخذ متغيره هو ε_{ij} أو u_i و ليـــس $\delta\varepsilon_{ij}$ أو δu_i هو :

$$\delta^2\Pi = \int_V \delta\varepsilon_{ij}c^{ijk\ell}\delta\varepsilon_{k\ell}dV \geq 0 \qquad (3.26)$$

و هذا المقدار موجب دوما لأنه يحوي على مربع متغير التشوهات و على معاملات الصلابة للمادة الموجبة دوما ، و هذا المربع موجب دوما سواء أخذت التشوهات قيمة سالبة أم موجبة. بنـــاء" على ذلك نستنتج أن الطاقة الكامنة تأخذ في حالة الأجسام المرنة الموجودة في حالة توازن نهايـــة حدية صغرى .

3-1-4- شروط استخدام مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري

من خطوات الاشتقاق في الفقرة السابقة يتبين أن مجال استخدام مبدأ الطاقة الكامنـــة الأصغـــري مقتصر على المجال الفيزيائي الخطي. و هو المجال الذي يسري فيه مفعول قانون هوك للمادة. وهذا الشرط وصفناه أثناء عملية الاشتقاق عندما استبدلنا σ^{ij} بمكافئها $c^{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell}$ في العلاقــة (3.23) . أما في المجال الهندسي الخطي و غير الخطي فمبدأ الطاقة الكامنة الأصغري ساري المفعول. و يمكــن استخدامه حتى في حالة الانتقالات الكبيرة و ذلك لأن الشرط الوارد في العلاقة (3.21) لا يتطلب سوى أن تكون موترة التشوهات متناظرة وهذا محقق إذا استخدمت العلاقـــات (2.26) لحالـــة السلوك الهندسي غير الخطي بدل استخدام العلاقة (2.29) لحالة السلوك الهندسي الخطي. اشترطنا أيضا أثناء الاشتقاق انعدام متغير الانتقالات على جزء السطح الخـــارجي الـــذي تكـــون عليـــه الانتقالات معلومة مسبقا (s_u). وبالتالي يجب أثناء اختيار توابع الانتقالات أن نراعـــي تحقـــق الشروط الطرفية الهندسية. بعد افتراض الانتقالات المحققة للشروط الطرفيـــة الهندســـية . يجـــب استخدام علاقات التشوهات – الانتقالات، العلاقة (2.26) لحالة السلوك الهندســـي اللاخطـــي أوالعلاقة (2.29) لحالة السلوك الهندسي الخطي، للحصول على توابع التشوهات. بعدها يســـتخدم قانون المادة (3.11) للحصول على توابع الإجهادات. ومعنى ذلك أن الاستخدام يفترض التحقـــق الدقيق لهذه العلاقات(على عناصر تفاضلية مقتطعة من الجسم) . بعد هذا يمكن تقييم قيمة تابعي الطاقة الكامنة وأخذ متغيره ،الذي يؤدي إلى تحقيق معادلات التوازن (3.9) بشكل تكاملي فقط (على كامل الوسط المستمر أو الجسم) و الشروط الطرفية الميكانيكية (3.14) على s_σ. لا بـــد في النهاية أن نذكر أن مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري يشكل الأساس النظري لطريقة الانتقالات .

3-2- مبدأ الطاقة المتممة الأصغري

3-2-1- العمل الداخلي المتمم

يراد حساب العمل الداخلي لقوى التشوه من أجل تزايد الإجهادات (على متوازي المســـتطيلات بأبعاد تفاضلية مقتطع من جسم ما) بمقدار تفاضلي $d\sigma^{ij}$. بعد اتباع خطوات مشابهة للفقـــرة

2-1-1 في تحصيل مركبات الإجهادات على سطوح متوازي المستطيلات التفاضلي إلى قوى مؤثرة على هذه السطوح و تحديد الانتقالات الموافقة و الناتجة عن التشوهات ε_{ij} سوف نجد أن تفاضل العمل الداخلي لقوى التشوه و الذي سنسميه العمل الداخلي المتمم تمييزا له عن العمل الداخلي الكامن ، مساو للمقدار:

$$dW^*(\sigma) = \int_0^{\sigma^{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma^{ij} dV \qquad (3.27)$$

يسمى تغير هذا المقدار لواحدة الحجوم من الجسم بكثافة الطاقة المتممة .

$$w^*(\sigma) = \int_0^{\sigma^{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma^{ij} \qquad (3.28)$$

و التفاضل التام له هو :

$$dw^*(\sigma) = \varepsilon_{ij} d\sigma^{ij} \qquad (3.29)$$

في حالة الأجسام المرنة يكون $w^*(\sigma)$ تابعا للإجهادات فقط و بالتالي يعطى تفاضله التام بالعلاقة التالية :

$$dw^*(\sigma) = \frac{\partial w^*(\sigma)}{\partial \sigma^{ij}} d\sigma^{ij} \qquad (3.30)$$

بمقارنة (3.30) مع (3.29) ينتج :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial w^*(\sigma)}{\partial \sigma^{ij}} \qquad (3.31)$$

و العمل الداخلي المتمم على حجم الجسم يؤخذ بتكامل كثافة الطاقة المتممة على الحجم

$$W^*(\sigma) = \int_V \left(\int_0^{\sigma^{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma^{ij} \right) dV \qquad (3.32)$$

3-2-2-اشتقاق مبدأ الطاقة المتممة الأصغري

سوف نقتصر في اشتقاق مبدأ الطاقة المتممة الأصغري على المجال الفيزيائي الخطي و على المجال الهندسي الخطي ، حيث يسري مفعول العلاقات (3.9) إلى (3.14) . لنفرض أننا أزحنا جسما

عن وضعية توازنه بتطبيق توابع إجهادات وهمية $\delta\sigma^{ij}$ في الحجم V و أخرى موافقة لهـــا علـــى جزء السطح s_σ وتحقق المساواة $\delta\sigma^{ij}n_j = \delta T^i$. فإذا استغنينا عن التحقق الدقيـــق لعلاقـــات التشوّهات-الانتقالات (3.10) و الشروط الطرفية الهندسية (3.12) و اكتفينا بتحققها تكامليـــاً على كامل حجم و سطح الجسم عندها نستطيع أن نكتب :

$$\int_V \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\delta\sigma^{ij}dV + \int_{S_u}(u_i - \overline{u}_i)\delta\sigma^{ij}n_j ds = 0 \tag{3.33}$$

باعتبار تناظر مشتقات الانتقالات $(u_{i,j} = u_{j,i})$ و إتباع خطوات مشابهة لتلك التي انتقلنا بهـــا من العلاقة (3.16) إلى العلاقة (3.18) أي كتابة مشتق جداء مضاريب و استخدم مقولة غاوص في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي ، نجد أن :

$$-\int_V \delta\sigma^{ij}u_{i,j}dV = \int_V \delta\sigma^{ij}{}_{,j}u_i dV - \int_{s_\sigma}\delta\sigma^{ij}n_j u_i ds - \int_{s_u}\delta\sigma^{ij}n_j u_i ds \tag{3.34}$$

بتعويض (3.34) في (3.33) و اختصار الحدود المتشابهة نحصل على :

$$\int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma^{ij}dV - \int_V \delta\sigma^{ij}{}_{,j}u_i dV - \int_{s_u}\delta\sigma^{ij}n_j\overline{u}_i ds - \int_{s_\sigma}\delta\sigma^{ij}n_j u_i ds = 0 \tag{3.35}$$

فإذا اخترنا توابع الإجهادات الوهمية محققة بشكل دقيق لمعـــادلات التـــوازن (3.9) و الشـــروط الطرفية الميكانيكية (3.13) يكون :

$$\delta\sigma^{ij}{}_{,j} + \delta\overline{f}^{\,i} = 0 \ ; \ \delta\sigma^{ij}{}_{,j} = 0 \tag{3.36}$$

$$\delta\sigma^{ij}n_j + \delta\overline{T}^i = 0 \ ; \ \delta\sigma^{ij}n_j = 0 \quad \text{on} \quad s_\sigma \tag{3.37}$$

وبالتالي تتبسط العلاقة (3.35) إلى :

$$\int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma^{ij}dV - \int_{s_u}\delta\sigma^{ij}n_j\overline{u}_i ds = 0 \tag{3.38}$$

الحد الأول يمثل العمل الداخلي المتمم على كامل حجم الجسم .

و هذه العلاقة تمثل مبدءا آخر من ميادىء ميكانيك الإنشاءات و هو مبدأ القوى الوهمية . يسري مفعول هذا المبدأ أيضا في المجال الفيزيائي غير الخطي أيضا و ذلك لأننا في اشتقاقاتنا الســـابقة لم نشترط سريان مفعول أي قانون للمادة . للحصول على مبدأ الطاقة المتممة الأصغـــري ســـوف

نشترط سلوكا فيزيائيا خطيا للمادة عندها نستطيع التعبير عن التشوهات بدلالة الإجهادات وفـق العلاقة (2.33) و نخرج إشارة المتغير خارج الحد الأول .

$$\delta(\varepsilon_{ij}\sigma^{ij}) = \delta(s_{ijk\ell}\sigma^{k\ell}\sigma^{ij}) = s_{ijk\ell}(\sigma^{ij}\delta\sigma^{k\ell} + \sigma^{k\ell}\delta\sigma^{ij}) = 2S_{ijk\ell}\sigma^{k\ell}\delta\sigma^{ij} = 2\varepsilon_{ij}\delta\sigma^{ij} \tag{3.39}$$

إشارة المتغير يمكن خراجها خارج الحد الأخير من (3.39) باعتبار متغير $\overline{u}_i$ مساو للصفر (قيمـة معلومة مسبقا) فنحصل على :

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int_V \sigma^{ij}s_{ijk\ell}\sigma^{k\ell}dV - \int_{s_u}\sigma^{ij}n_j\overline{u}_i ds\right) = 0 \tag{3.40}$$

القيمة السلمية بين القوسين الصغيرين تمثل الطاقة المتممة و يرمز لها عادة" بالرمز Π_c . و معـنى ذلك انه وفق الاشتراطات السابقة ينعدم المتغير الأول للطاقة المتممة لجسم مرن تحت تأثير مجموعـة قوى متوازنة .

$$\Pi_c = \frac{1}{2}\int_V \sigma^{ij}s_{ijk\ell}\sigma^{k\ell}dV - \int_{s_u}\sigma^{ij}n_j\overline{u}_i ds \quad ; \quad \delta\Pi_c = 0 \tag{3.41}$$

بحساب المتغير الثاني Π_c مع اعتبار أن التغيير يجري على σ^{ij} وليس على $\delta\sigma^{ij}$ نجد أن :

$$\delta^2\Pi_c = \int_V \delta\sigma^{ij}s_{ijk\ell}\delta\sigma^{k\ell}dV \geq 0 \tag{3.42}$$

و هذا المقدار موجب دوما لأن معاملات الليونة موجبة و مربع الإجهادات الاختياريـة مقـدار حدوده موجبة دوما . و منه ينتج أن الطاقة المتممة تأخذ أيضا حالة حدية صغرى .

3-2-3- شروط استخدام مبدأ الطاقة المتممة الأصغري

يقتصر سريان مفعول مبدأ الطاقة المتممة الأصغري المشتق في الفقرة السابقة على المجال الفيزيـائي الخطي و على المجال الهندسي الخطي و من الواضح في العلاقة (3.33) أن علاقات التشـوهات – الانتقالات و الشروط الطرفية الهندسية يتم تحقيقها تكامليا على حجم و سطح الجسم المعتـبر . بينما يجب أن تحقق توابع الإجهادات المفترضة معادلات التوازن والشروط الطرفيـة الميكانيكيـة تحقيقا دقيقا . نقطة الانطلاق الأساسية في استخدام مبدأ الطاقة المتممة إذا هي افـتراض توابـع

للإجهادات بثوابت اختيارية . وهذا الاختيار كما قلنا مقيد بالشروط الآنفة الذكر . بعد هذا الافتراض يمكن تقييم الطاقة المتممة Π_c المعرفة في العلاقة (3.41). .توابع الإجهادات على جزء السطح S_u هي توابع يتم الحصول عليها من توابع الإجهادات المفترضة للوسط الحجمي بتعويض معادلات أطراف الجسم الممثلة عادة لسطوح الجسم و تقييم جداءات الإجهادات في نواظم هذه السطوح . يمثل مبدأ الطاقة المتممة الأصغري الأساس النظري لطريقة القوى المعروفة في ميكانيك الإنشاءات .

3-3- مبادىء الطاقة الموسعة

لاستخدام مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري يلزمنا اختيار توابع عشوائية لكن اختيارها مقيد بتحقيقها للشروط الطرفية الهندسية . ولاستخدام مبدأ الطاقة المتممة الأصغري يلزمنا اختيار توابع إجهادات عشوائية واختيارها بدوره مقيد بتحقيقها للشروط الطرفية الميكانيكية . ومسألة الاستخدام تغدو بالمعنى الرياضي بحثا عن قيم حدية للطاقة الكامنة والطاقة المتممة بشروط طرفية . غالبا ما يكون تحقيق الشروط الطرفية مصحوبا بمشاكل يصعب التغلب عليها وخاصة عند استخدام مبدأ الطاقة المتممة. لذلك يلجأ عادة إلى تحويل مسألة البحث عن القيم الحدية بشروط طرفية إلى بحث عن قيم حدية بدون شروط طرفية بإدخال مضاريب لاغرنج إلى مبادىء الطاقة الأساسية لنحصل على مبادىء الطاقة الموسعة التي سنشرحها بشكلها الرياضي في الفقرة الآتية. ولكن النهاية الحدية الصغرى التي تتميز بها الطاقة الكامنة أو الطاقة المتممة تصبح نهاية حدية غير معروفة إن كانت صغرى أم عظمى ويترتب على عدم المعرفة هذه جهل بطبيعة تقارب الحل الناتج عن استخدام مبادىء الطاقة الموسعة إلى الحل الصحيح. بينما يجب أن يتقارب الحل الناتج عن الاستخدام الصحيح لمبادىء الطاقة الأساسية من الجهة العليا لأن الحل الصحيح يمثل النهاية الحدية الصغرى. لا بد من التنويه هنا أن استخدام مضاريب لاغرنج إنشائيا مشابه لاستخدامها رياضيا إلا أنه في المجال الإنشائي يجب تفسير مضاريب لاغرنج إنشائيا من حيث ماهيتها و من حيث أماكن فرضها

في الوسط الإنشائي . و ستتضح هذه المعاني في الفقرات و الفصول القادمة أثناء تعديل مبدأ الطاقة المتممة الأصغري و استخدامه على بعض نماذج المنشآت .

1-3-3- مضاريب لاغرنج و النهايات الحدية لتوابع بمتحولات مستقلة

ليكن لدينا التابع :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \qquad (3.43)$$

حيث $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متحولاته المستقلة ، و لنفرض أن هذا التابع معرف و مستمر في مجال ما و قابل للاشتقاق في مجال تعريفه . فالشرط اللازم لوجود النهاية الحدية لهذا التابع :

$$y^o = f(x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots, x_n^0) \qquad (3.44)$$

هو انعدام مشتقاته الجزئية بالنسبة للمتحولات المستقلة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عند النقطة $x^o_1, x^o_2, \ldots, x_n$ أي :

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots, x_n^0) = 0 \qquad (3.45)$$

هذا الشرط لازم و ليس كافيا بعد لوجود نهاية حدية أو لتحديد ماهية هذه النهاية الحدية إن كانت صغرى أم عظمى . نقبل بأن الشرط الكافي لوجود نهاية حدية للتابع (3.43) هو أن يكون معين مصفوفة مشتقاته الجزئية من المرتبة الثانية عند النقطة $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ اكبر من الصفر .

$$\det\begin{pmatrix} f_{,x_1x_1} & f_{,x_1x_2}\ldots\ldots & f_{,x_1x_n} \\ f_{,x_2x_1} & f_{,x_2x_2}\ldots & f_{,x_2x_n} \\ f_{,x_nx_1} & f_{,x_nx_2}\ldots & f_{,x_nx_n} \end{pmatrix} > 0 \qquad (3.46)$$

و النهاية الحدية هي نهاية صغرى إذا كانت مصفوفة المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية موجبة بالتعريف أما ما عدا ذلك فالنهاية حدية عظمى . و أما في حال انعدام معين المصفوفة المذكورة فلا نستطيع تحتيم وجود نهاية حدية . و مصفوفة المشتقات الجزئية هي موجبة بالتعريف إذا كانت قيم معينات مصفوفاتها الجزئية المتنامية كلها موجبة أي :

$$f_{,x_1x_1} \rangle 0; \begin{vmatrix} f_{,x_1x_1} & f_{,x_1x_2} \\ f_{,x_2x_1} & f_{,x_2x_2} \end{vmatrix} \rangle 0 ;... \begin{vmatrix} f_{,x_1x_1} & f_{,x_1x_2} ..... & f_{,x_1x_n} \\ f_{,x_2x_1} & f_{,x_2x_2} ... & f_{,x_2x_n} \\ f_{,x_nx_1} & f_{,x_nx_2} ... & f_{,x_nx_n} \end{vmatrix} \rangle 0 \qquad (3.47)$$

كمثال على تحديد النهاية الحدية لتابع بمتحولين مستقلين نأخذ التابع :

$$y = x_1^3 x_2^2 (1 - x_1 - x_2) \qquad (3.48)$$

قاعدة انعدام المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى تؤدي إلى :

$$f_{,x_1} = x_1^2 x_2^2 (3 - 4x_1 - 3x_2) = 0$$

$$(3.49)$$

$$f_{x_2} = x_1^3 x_2 (2 - 2x_1 - 3x_2) = 0$$

والنقاط المحتملة للنهاية الحدية هي $(\frac{1}{2},\frac{1}{3}),(c_2,0),(0,c_1)$ حيث c_2, c_1 ثوابت لا على التعيين . إذ أنه عند كل النقاط السابقة تنعدم جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى . و هذا الشرط لم يكن كافيا لتحديد النهاية الحدية . لنحدد الآن توابع مصفوفة المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية (3.46) و نحسب قيم معينها عند النقاط المحتملة كقيم حدية فنجد أن :

$$f_{,x_1x_1} = x_1 x_2^2 (6 - 12x_1 - 6x_2)$$
$$f_{,x_1x_2} = f_{,x_2x_1} = x_1^2 x_2 (6 - 8x_1 - 9x_2) \qquad (3.50)$$
$$f_{,x_2x_2} = x_1^3 (2 - 2x_1 - 6x_2)$$

و معين المصفوفة عند النقطة $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ هو:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{3}{144} \rangle 0 \qquad (3.51)$$

و بما أن أحد المعينات الجزئية المتنامية للمصفوفة و هوالتالي:

$$f_{,x_1x_1} = -\frac{1}{9} \langle 0 \qquad (3.52)$$

أصغر من الصفر فالمصفوفة ليست موجبة بالتعريف و النهاية الحدّية عند النقطة $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ هي نهاية حدّية عظمى . أما في بقية النقاط المحتملة كنهاية حدّية فإن معين المصفوفة مطـــابق للصفـــر و لا نستطيع عند هذه النقاط التحدث عن نهايات حدّية . كما أسلفنا تستخدم مضـــاريب لاغرنـــج لتحويل مسألة البحث عن قيم حدّية لتابع ما أو قيمة تابعية بشروط طرفية إلى بحث عن قيم حدّية دون شروط طرفية . لنفرض أننا نبحث عن قيمة حدّية لتابع بعدة متحولات مستقلة .

$$y = (x_1, x_2, ..., x_n) \quad (3.53)$$

المتحولات المستقلة لهذا التابع مرتبطة مع بعضها البعض بالشرط الطرفي .

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad (3.54)$$

و نريد الآن البحث عن قيمة حدية للتابع (3.53) تحقق الشرط الطرفي (3.54) . نشـــكل الآن التابع :

$$F(x_1 x_2, ..., x_n \lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \quad (3.55)$$

حيث λ مضروب لاغرنج الذي أدخل بالنسبة لتابع لاغرنج F كمتحول مستقل. يستعاض الآن عن الشرط اللازم لوجود نهاية حدية للتابع f بالشرطين التاليين للتابع F :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad (3.57)$$

يلاحظ أن الشرط الطرفي (3.54) محتوى في الشرط اللازم لوجود نهاية حدية لتابع لاغرنـــج كمثال تطبيقي نأخذ التابع :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1) \quad (3.58)$$

الذي نود البحث عن نهاية حدية له تحقق الشرط :

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4 = 0 \quad (3.59)$$

لإيجاد النهاية الحدية التي تحقق الشرط السابق نقوم بحساب أحد المتحـــولات المســـتقلة بدلالـــة المتحولين الآخرين من الشرط الطرفي نفسه و نعوضه في المعادلة (3.58) فنحصل علـــى معادلـــة

بمتحولين مستقلين فقط ، فإذا قمنا بحذف المتحول x_1 نحصل بتطبيق شرط النهاية الحدّية (3.45) على المعادلتين التاليتين :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 10x_2 + 12x_3 + 18 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 12x_2 + 20x_3 + 28 = 0 \quad (3.60)$$

بحل هاتين المعادلتين يمكن حساب إحداثيات النقطة الحدّية على المحورين x_2, x_3 ،ويجري حساب x_1 من المعادلة (3.59) . و نجد بالنتيجة أن النهاية الحدّيــة تمثلــها النقطــة الــتي إحداثياتهــا $(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{8}{7})$ و يمكن التأكد أن هذه النقطة تمثل نهاية حدّية صغرى . الآن سوف نبحث عــن النهاية الحدّية باستخدام تابع لاغرنج . يأخذ تابع لاغرنج وفق العلاقة (3.55) الشكل :

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4) \quad (3.61)$$

و الشرط اللازم لوجود النهاية الحدية يفضي إلى المعادلات التالية:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2(x_2 - 1) + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2(x_3 - 1) + 3\lambda = 0 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4 = 0$$

بحل هذه المعادلات نحصل على قيمة مضروب لاغرنج $\lambda = \frac{10}{7}$ و إحداثيات النقطـــة الحديـــة $(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{8}{7})$. لنرى ماذا تمثل هذه النهاية الحدية بالنسبة لتابع لاغرنج F إذا ما حذفنا منـــه المتحولات x_1, x_2, x_3 ، بمساعدة المعادلات الثلاثة الأولى من (3.62) . بعد هـــذا الإجـــراء نحصل على تابع لاغرنج الممثل بالمعادلة :

$$F(\lambda) = -\frac{14}{4}\lambda^2 + 10 = 0 \qquad (3.63)$$

و القيمة $\lambda = \frac{10}{7}$ تمثل فعلا النهاية الحدية للتابع $F(\lambda)$ ولكنها أصبحت نهاية حدية عظمى .
وهكذا بعد استخدام مضاريب لاغرنج في تحويل مسالة البحث عن نهاية حدية بشروط طرفية إلى البحث عن نهاية حدية دون شروط طرفية لا يمكن الجزم بطبيعة النهاية الحدية التي سوف نحصل عليها . و هذه إحدى مساوىء مبادىء الطاقة المعدلة بمضاريب لاغرنج مقترنة بإحدى الطرق التقريبية كطريقة العناصر المنتهية إذ أننا لا نستطيع الجزم بأن الحل الناتج يقارب الحل الصحيح من الجهة العليا أو من الجهة الدنيا ، و إنما نستطيع القول أن الحل الناتج يمثل النهاية الحدية المطلوبة .

3-3-2- مبدأ الطاقة المتممة المعدل

أثناء اشتقاق مبدأ الطاقة المتممة الأصغري في الفقرة 3-2-2 أوضحنا أنه يجب أن نختار توابع الإجهادات الوهمية محققة بشكل دقيق لمعادلات التوازن و الشروط الطرفية الميكانيكية. غالبا ما يرتبط تحقيق الشروط الطرفية الميكانيكية باستخدام توابع الإجهادات المفترضة بصعوبات ليس من السهل التغلب عليها . و لذلك نحول مسألة البحث عن نهاية حدية أصغرية للطاقة المتممة بشروط طرفية إلى بحث عن نهاية حدية لتابعي مناسب معدل للطاقة المتممة بدون شروط طرفية، و ذلك بإضافة الشروط الطرفية الميكانيكية وتشكيل تابع لاغرنج كما أسلفنا في الفقرة السابقة . في هذه الحالة يصبح لدينا حرية أكثر في اختيار توابع الإجهادات الافتراضية إذ أنه يطلب فقط أن تحقق هذه التوابع معادلات التوازن ، وهذا غالبا ما يكون سهل التحقيق . نشكل الآن تابع لاغرنج للطاقة المتممة على غرار الشكل الرياضي في الفقرة السابقة بإضافة الشروط الطرفية الميكانيكية إلى القيمة التابعية للطاقة المتممة (3.41). بعد ضرب هذه الشروط بمضاريب لاغرنج λ_i نحصل على الطاقة المتممة المعدلة :

$$\Pi_{ch} = \tfrac{1}{2}\int_V \sigma^{ij} S_{ijk\ell}\sigma^{k\ell} dV - \int_{s_u} \sigma^{ij} n_j \bar{u}_i ds - \int_{s_\sigma} (\sigma^{ij} n_j - \bar{T}^i)\lambda_i ds \qquad (3.64)$$

λ_iيمثل عددا من مضاريب لاغرنج المكافئة لعدد الشروط الطرفية الموجودة . و هذه المضـــاريب ذات الطبيعة الرياضية البحتة الآن يجب أن تفسر إنشائيا من شروط النهاية الحدية . فحتى نحصـــل على نهاية حدية للطاقة المتممة المعدلة Π_{ch} يجب أن ينعدم متغيرها الأول ، و هذا يعني أن :

$$\delta\Pi_{ch} = \int_V \delta\sigma^{ij} s_{ijk\ell}\sigma^{k\ell} dV - \int_{s_u} \delta\sigma^{ij} n_j \bar{u}_i ds$$

$$- \int_{s_\sigma} \sigma^{ij} n_j \lambda_i ds - \int_{s_\sigma} (\sigma^{ij} n_j - \bar{T}^i)\delta\lambda_i ds = 0 \qquad (3.65)$$

نعيد صياغة الحد الأول بالشكل :

$$T_1 = \int_V \delta\sigma^{ij} s_{ijk\ell}\sigma^{k\ell} dV = \int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma^{ij} dV$$

$$= \int_V \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{j,i})\right]\delta\sigma^{ij} dV + \int_V \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\delta\sigma^{ij} dV \qquad (3.66)$$

لقد تم إضافة و طرح الحد الأخير من المعادلة السابقة إلى الحد الأول مـــن المعادلـــة (3.65) . العلاقة (3.65) تأخذ بالاستفادة من قاعدة اشتقاق جداء مضاريب :

$$(u_i\delta\sigma^{ij})_{,j} = u_{i,j}\delta\sigma^{ij} + u_i\delta\sigma^{ij}{}_{,j} \qquad (3.67)$$

و اعتبار التناظر:

$$\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\delta\sigma^{ij} = u_{i,j}\delta\sigma^{ij} = (u_i\delta\sigma^{ij})_{,j} - u_i\delta\sigma^{ij}{}_{,j} \qquad (3.68)$$

و استخدام تكامل غاوص في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي :

$$\int_V (u_i\delta\sigma^{ij})_{,j} dV = \int_s u_i\delta\sigma^{ij} n_j ds = \int_{s_u} u_i\delta\sigma^{ij} n_j ds + \int_{s_\sigma} u_i\delta\sigma^{ij} n_j ds \qquad (3.69)$$

و ملاحظة أن توابع الإجهادات الافتراضية تحقق معادلات التوازن التالية بدقة:

$$\int_V (u_i\delta\sigma^{ij}{}_{,j}) dV = 0 \qquad (3.70)$$

الشكل التالي:

$$T_1 = \int_V \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\delta\sigma^{ij} dV + \int_{s_u} \delta\sigma^{ij} n_j u_i ds + \int_{s_\sigma} \delta\sigma^{ij} n_j u_i ds \qquad (3.71)$$

بتعويض هذا الحد في العلاقة (3.65) و تجميع الحدود المتوافقة نحصل على :

$$\delta\Pi_{ch} = \int_V \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\delta\sigma^{ij} dV + \int_{s_u} \delta\sigma^{ij} n_j (u_i - \overline{u}_i) ds$$

$$+ \int_{s_\sigma} \delta\sigma^{ij} n_j (u_i - \lambda_i) ds - \int_{s_\sigma} (\sigma^{ij} n_j - \overline{T}^i)\delta\lambda_i ds = 0 \qquad (3.72)$$

و باعتبار أن المتغيرات $\delta\sigma^{ij}$, $\delta\sigma^{ij}n_j$, $\delta\lambda_i$ عشوائية فحتى ينعدم المتغير الأول للطاقة المتممة المعدلة يجب أن تتحقق المعادلات التالية :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = 0 \quad \text{in} \quad V \\
&u_i - \overline{u}_i = 0 \quad \text{on} \quad s_u \\
&u_i - \lambda_i = 0 \quad \text{on} \quad s_\sigma \qquad (3.73) \\
&\sigma^{ij} n_j - \overline{T}^i = 0 \quad \text{on} \quad s_\sigma
\end{aligned}$$

من هذه العلاقات نستخدم العلاقة الثالثة فقط لنستدل على المعنى الإنشائي لمضاريب لاغرنج .

$$\lambda_i = u_i \quad \text{on} \quad s_\sigma \qquad (3.74)$$

و معنى ذلك أن مضاريب لاغرنج تمثل الانتقالات على s_σ (السطح الذي تكون عليه القوى معلومة مسبقا) .هذه الانتقالات يسمح الآن باختيارها باستقلالية تامة عن الحالة الإجهادية المفترضة . بالعودة الآن إلى العلاقة (3.65) و تبديل λ_i بمكافئها u_i نحصل على :

$$\delta\Pi_{ch} = \int_V \delta\sigma^{ij} S_{ijk\ell} \sigma^{k\ell} dV - \int_{s_u} \delta\sigma^{ij} n_j \overline{u}_i ds -$$

$$- \int_{s_\sigma} \delta\sigma^{ij} n_j u_i ds - \int_{s_\sigma} (\sigma^{ij} n_j - \overline{T}^i)\delta u_i ds = 0 \qquad (3.75)$$

بعد ملاحظة متغير الجداء :

$$\delta \int_{s_\sigma} \sigma^{ij} n_j u_i ds = \int_{s_\sigma} \delta\sigma^{ij} n_j u_i ds + \int_{s_\sigma} \sigma^{ij} n_j \delta u_i ds \qquad (3.76)$$

و مراعاة (3.39) في إخراج إشارة المتغير خارج الحد الأول و إمكانية إخراجها خارج الحد الثالث و الجزء الأخير من الحد الرابع للعلاقة (3.75) نجد أن :

$$\delta\Pi_{ch} = \delta\left\{ \frac{1}{2}\int_V \sigma^{ij} S_{ijk\ell} \sigma^{k\ell} dV - \int_{s_u} \sigma^{ij} n_j \overline{u}_i ds - \int_{s_\sigma} (\sigma^{ij} n_j - \overline{T}^i) u_i ds \right\} = 0 \qquad (3.77)$$

و مبدأ الطاقة المتممة المعدل يعبر عنه ختاما بالعلاقتين الرياضيتين .

$$\Pi_{ch} = \frac{1}{2}\int_V \sigma^{ij} S_{ijk\ell} \sigma^{k\ell} dV - \int_{s_u} \sigma^{ij} n_j \bar{u}_i ds - \int_{s_\sigma} (\sigma^{ij} n_j - \bar{T}^i) u_i ds = 0 \qquad (3.78)$$

$$\delta\Pi_{ch} = 0 \qquad (3.79)$$

القيمة التابعية Π_{ch} تحتوي على توابع الإجهادات الافتراضية في الحجم V كمجاهيل. من هـــذه التوابع تشتق توابع الإجهادات على السطوح التي تكون فيها الانتقالات و الإجهادات معلومـــة . إضافة إلى الإجهادات المفترضة لدينا توابع انتقالات افتراضية على جزء السطح الذي تكون فيـــه الإجهادات معلومة (s_σ) كمجاهيل مستقلة أخرى . في الفصول اللاحقة سوف نطبق هذا المبدأ على بعض النماذج الإنشائية . إن إدخال مضاريب لاغرنج لتحقيق شرط أو مجموعـــة شـــروط طرفية على مبدأ الطاقة الكامنة أو على مبدأ الطاقة المتممة و على المبادىء المعدلة منهما يفضي إلى مبادىء معدلة أخرى لا مجال لحصرها في سياق هذا الكتاب .

3-4-المصادر العلمية

بالإضافة إلى المصادر المستخدمة في الفصول السابقة استخدمت المصادر التالية :

1 . Pian , T.H.H
Finite element method by variational principle with relaxed continuity requirement in : Variational methods in Engineering vol 1-2 Southampton uni . Perss , Southampton England 1973

2. Wunderlich , W .
Ein verallgemeinertes Variationsverfahren zur vollen oder teilweisen Diskretisierung mehrdimensionaler elastizitaetsprobleme Ing . Archiv 39 (1970) p . 230 - 247 .

3. Pian , T . H . H . ; Tong , p .
Basis of finite element method for solid continua Int . j . Num. Meth. Eng. . vol 1 (1969) p. 3 - 38 .

4. Washizu , K .

some considerations of basic theory for the finite element method , Advanced compt . Methods in structure (Mech . and Design edited by J. T. oden ; R. W. clough and y. yamamoto) , P. 39 - 53 , UAH Press. ,. Alabama (1972) .

5. Zurmuehl , R .
Matrizen und ihre technischen Anwendung ,Spinger - Verlag . Berlin Goettingen . Heiedelberg , 1984 .

6 . Gellert , W . Kaestner , H . ; Hellwich , M , Kleine Enzyklopaedie Mathematik ,VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1986 .

7 . Gellert , W. ; Kaestner , H. ; Neuber , S.
Lexikon der Mathematik ,VEB Bibliographisches Institut ,Leipzig 1985

8 . Atluri , S . N . , Gallagher , R .H .; Zienkiewicz , O . C ;. Hybrid and Mixed Finite Element Methods John Wiley & sons ; chichester , New York , Brisbane Toronto , Singapore , 1983 .

9 . Cook , K . D
concepts and application of finite element analysis, John Wiley & sons , New York. Chichester. Brisbane. Toronto. singapore , 1981 .

10 . Toupin , R . A . ,Washington , D . C .
A variational principle for mesh - type analysis of mechanical systems , Transaction of ASME , Journal of Applied Mechanics , vol . 74 (1952) . p .151 - 152 .

11 . Fraejs DE Veubeke , B . M . ; Geradin , M . ; Huch , A , H ogge , A . structural Dynamics and Heat conduction, Int. centre of mechanical sciences , courses and Lectures,No . 126 , springer - verlag , Wien - Neu york , 1972 .

12 . Gladwell , G . M . L . ; Zimmerman , G .
on energy and complementary energy formulations of acoustics and structural vibration problems, Int . J of Sound and Vibration 3 (1966) 3 , p . 233 - 241 .

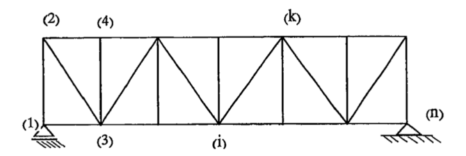
4- طريقة العناصر المنتهية – نموذج الانتقالات في حل المسائل وحيدة البعد

سوف تعرض في البدء طريقة العناصر المنتهية – نموذج الانتقالات في حل المسائل الوحيدة البعد على عناصر الجوائز الشبكية بتفصيل مسهب بغية التقدم المبسط للطريقة والإسهام السـريع في استيعابها من قبل القارىء المبتدىء . في معالجة عناصر الجوائز الشبكية سوف يفترض أن :

– قضبان الجائز تنقل القوى دون احتكاك

– اتصالات القضبان مع بعضها البعض مركزية أي أن محاور القضبان المتصلة بعقدة ما تتقاطع في مركز العقدة .

– تحميل الجائز الشبكي يتم إما بقوى محورية على العناصر أو بقوى مركزة على العقد

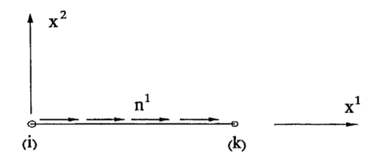


شكل 4-1 جائز شبكي بـ n عقدة

4-1- معادلات نظرية المرونة في قضيب من جائز شبكي

لنقتطع من جائز شبكي قضيب ما (شكل 4-1) منسوب إلى جملة محاور إحداثية محليـة.و محمل بحمولة محورية موزعة $\overline{n}^1$ تابعة للإحداثي x^1 شكل (4-2).وفق الافتراضات المدّونـة أعلاه يتعرض قضيب الجائز الشبكي لقوى مقطع محورية أو لإجهادات محورية $\sigma^{x^1x^1}$ باتجاه

x^1 و تنعدم بقية الإجهادات . كما أن التشوّهات الحاصلة تقتصر على التشوّه المحوري .ولهذا سوف نختصر هنا كتابة القرائن فعوضاً عن $\sigma^{x^1x^1}$ سنكتب σ^{11} وتستبدل $\varepsilon_{x^1x^1}$ بالرمز ε_{11} و $E^{x^1x^1x^1x^1}$ ببساطة بالرمز E وهكذا...



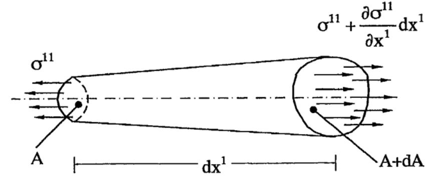
شكل 4-2 : قضيب من جائز شبكي ،حالة التحميل ، الإحداثيات الخاصة .

وبناء على ذلك تتقلص معادلات نظرية المرونة الخمسة عشر لتصبح على الشكل التالي :

* معادلات التوازن :

تتقلص معادلات التوازن الثلاثة إلى معادلة توازن واحدة باتجاه x^1 و هي :

$$-\sigma^{11}A+(\sigma^{11}+\frac{d\sigma^{11}}{dx^1}dx^1)(A+dA)+\overline{n}^1dx^1=0 \qquad (4.1)$$



شكل 4-3 : عنصر تفاضلي من قضيب الجائز الشبكي

و ذلك بافتراض توزع منتظم للإجهادات على سطوح المقاطع و بعد اختصار الحدود المتشابهة وإهمال الجداءات التفاضلية من المرتبة الثانية و القسمة على dx^1 تصبح هذه المعادلة كما يلي :

$$\sigma^{11}\frac{dA}{dx^1}+\frac{d\sigma^{11}}{dx^1}A+\bar{n}^1=0 \qquad (4.2)$$

أو

$$\frac{d}{dx^1}(\sigma^{11}A)+\bar{n}^1=0 \qquad (4.3)$$

و الجداء $\sigma^{11}.A$ يمثل القوة N^1 في المقطع A و يستعاض عـــادة عـــن معـــادلات تـــوازن الإجهادات بمعادلات توازن قوى المقطع .

* علاقات التشوهات – الانتقالات :

تتقلص علاقات التشوهات – الانتقالات الستة في الحالة الخطية إلى العلاقة :

$$\varepsilon_{11}=\frac{du_1}{dx^1}=u_{1,x^1} \qquad (4.4)$$

و ذلك باعتبار أن التشوهات البقية معدومة .

* قانون المادة :

يحتوي قانون المادة على علاقة واحدة أيضا تربط الإجهاد الناظمي بالتشوه و هو لحالة السلوك الخطي بوجود تشوهات مسبقة .

$$\sigma^{11}=E(\varepsilon_{11}-\bar{\varepsilon}_{11}) \qquad (4.5)$$

و التشوهات المسبقة قد تحصل نتيجة تأثيرات خارجية كاختلاف درجات الحرارة و هبـــوط المساند أو غيرها . و المعادلات السابقة تمثل المعادلات الأساسية لنظرية المرونة في الحالة الخاصة المدروسة . يمكن الحصول على علاقات الإجهادات – الانتقالات بتعويض العلاقـــة (4.4) في (4.5) :

$$\sigma^{11}=(u_{1,x^1}-\bar{\varepsilon}_{11}) \qquad (4.6)$$

و المعادلة التفاضلية التي تحكم المسألة نحصل عليها بتعويض الأخيرة في معادلة التوازن (4.3) .

$$\left[EA(u_{1,x^1}-\bar{\varepsilon}_{11})\right]_{,x^1}+\bar{n}^1=0 \qquad (4.7)$$

4-2- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري :

يمكن الحصول على مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري لهذه الحالة الخاصة باتباع خطوات مماثلة لما ورد في الفقرة 3-1-4 و يكتفى الآن بذكره في حالة عدم وجود تشوهات مسبقة .

$$\Pi = \sum_{e}\left(\frac{1}{2}\int_{0}^{\ell} \varepsilon_{11} EA \varepsilon_{11} dx^{1} - \int_{0}^{\ell} \overline{n}^{1} u_{1} dx^{1}\right) - \sum_{m} \overline{F}^{(m)} u_{1(m)} \qquad (4.8)$$

$$\delta\Pi = 0 \qquad (4.9)$$

حيث :

Σ_{e} المجموع على عناصر الجائز الشبكي

$\overline{F}^{(m)}$ القوة المركزة في العقدة (m)

$\sum\limits_{m}$ المجموع على عقد الجائز الشبكي المحملة بقوة مركزة

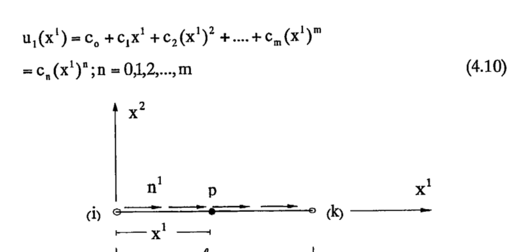
ℓ طول عنصر الجائز الشبكي

من الواضح أن الحد الأول من الطرف اليميني للعلاقة (4.8) يمثل طاقة التشوه للقوى الداخلية و الحدين الأخيرين من الطرف نفسه يمثلان عمل القوى الخارجية المؤلفة من قوى خطية موزعة وفق محاور العناصر و قوى مركزة في عقد الجائز الشبكي .

4-3- خوارزميات طريقة العناصر المنتهية – نموذج الانتقالات .

لنقتطع من الجائز الشبكي قضيبا (i)(k) و ننسبه إلى جملة محاور إحداثية محلية ليكن $u_{1}(x^{1})$ انتقال نقطة ما p ضمن العنصر و $u_{1(k)}, u_{1(l)}$ انتقالات العقدتين (k),(i) على التوالي في اتجاه x^{1} . إن البدء بتوابع انتقالات اختيارية مبرر نظريا أثناء اشتقاق مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري و الذي يشكل الأساس النظري لحلنا هذا . لذلك من الممكن افتراض انتقال النقطة p ككثير حدود بثوابت اختيارية:

$$u_1(x^1) = c_o + c_1 x^1 + c_2 (x^1)^2 + ... + c_m (x^1)^m$$
$$= c_n (x^1)^n ; n = 0,1,2,..., m \tag{4.10}$$



شكل 4-4 : قضيب من جائز شبكي كعنصر منتهي ، الجملة الإحداثية

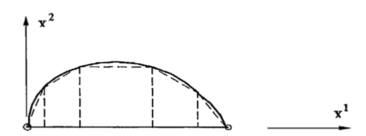
هذا الافتراض الرياضي البحت له ما يبرره نظرياً . يمكن أن يفترض عوضاً عن كثير الحدود هذا أي توابع رياضية أخرى محققة لشروط الاستمرارية و قابلية الاشتقاق . كمحاكمة منطقية نستنتج أنه إذا عبر التابع (4.10) فعلا عن انتقال أي نقطة ضمن العنصر المنتهي $(i)(k)$ بدلالة الإحداثي x^1 فيجب أن يعطي انتقالات العقدتين $(i),(k)$ إذا ما عوضنا إحداثيي العقدتين المذكورتين $x^1 = 0$, $x^1 = \ell$ على التوالي في التابع نفسه .

$$u_{1(i)} = c_o + 0 + 0 + \cdots\cdots$$
$$u_{1(k)} = c_0 + c_1\ell + c_2\ell^2 + \cdots \tag{4.11}$$

وهذا ما تقتضيه أيضا الشروط الطرفية الهندسية على مستوى العنصر المنتهي. نلاحظ من المعادلتين السابقتين أنه يمكن أن نعطي ثابتين اختياريين فقط مضمونا ميكانيكيا و أنه يمكن تحديدهما بدلالة انتقال العقدتين $(i),(k)$. بناء على ذلك نجد أن عدد الثوابت الاختيارية الممكن تضمينها معنى ميكانيكيا أو الممكن تحديدها على الإطلاق مساو لعدد درجات الحرية للعنصر المنتهي

و الخطوة التالية تتلخص الآن في تحديد الثوابت الاختيارية $c_o, c_1, c_2, ...$ لكثير الحدود المفترض (4.10) . يفضل عادة اختيار التابع الافتراضي أبسط ما يمكن و من المراتب الدنيا إذ يمكن تقريب التوابع من المراتب العليا بتوابع بسيطة من المراتب الدنيا بعد تقسيمها إلى مجالات متجاورة شكل

(5-4) و العكس ليس ممكنا . لذلك نختار لمسألتنا المطروحة الثابت c_1 و بالتالي كثير الحدود من المرتبة الأولى ليعبر عن التابع (الخط المستمر)التقريبي المفترض (4.10).



شكل 4-5:تابع من المراتب العليا مقرب بتابع خطي (الخط المنقط)

$$u_1(x^1) = c_0 + c_1 x^1 = c_n (x^1)^n ; n = 0,1 \tag{4.12}$$

و بناء على ذلك تصبح العلاقتان (4.11) بالشكل :

$$u_{1(i)} = c_o$$
$$u_{1(k)} = c_0 + c_1 \ell \tag{4.13}$$

نكتب هاتين العلاقتين باستخدام الكتابة بالقرائن بغية التعبير العام عن خوارزميات الطريقة .

$$u_{1(p)} = c_n A^n{}_{(p)} \;\; ; \;\; (p) = (i),(k); n = 0,1 \tag{4.14}$$

$$A^n{}_{(p)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \ell \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

إذ أن الصيغة (4.14) هي نفسها الصيغة التي يتم الحصول عليها للعناصر المنتهية الثنائية البعد و الثلاثية البعد و الاختلاف هو في حجم الثوابت و انتقالات العقد و المصفوفة المعلومة $A^n{}_{(p)}$. يمكن الآن تعيين الثوابت الاختيارية c_n بحل جملة المعادلات (4.14) بدلالة انتقالات العقد .

$$c_n = (A^n{}_{(p)})^{-1} u_{1(p)} = B^{(p)}{}_n u_{1(p)} \tag{4.16}$$

حيث المصفوفة $B^{(p)}{}_n$ هي مقلوب المصفوفة $A^n{}_{(p)}$ وهي مكافئة للتالي :

$$B^{(p)}{}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

بتعويض الثوابت الاختيارية (4.16) في العلاقة (4.12) نحصل على علاقة تربط بين الانتقـال لنقطة ما $p(x^1)$ ضمن العنصر المنتهي و انتقالات عقده و هي :

$$u_1(x^1) = B^{(p)}{}_n.(x^1)^n.u_{1(p)} \quad ; \; .n = 0,1 \; ; \; (p)(=(i),(k) \tag{4.18}$$

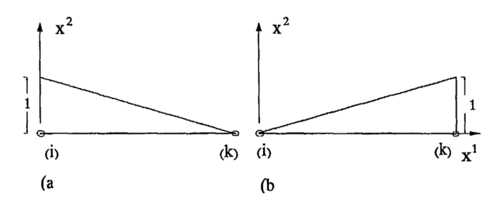
وهي تفصيليا :

$$u_1(x^1) = \left[\; 1-\frac{x^1}{\ell} \quad \frac{x^1}{\ell} \;\right]\begin{bmatrix} u_{1(i)} \\ u_{1(k)} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

أو باستخدام القرائن :

$$u_1(x^1) = N^{(p)}u_{1(p)} \quad ; \quad N^{(p)} = B^{(p)}{}_n(x^1)^n \tag{4.20}$$

حيث $N^{(p)}$ هي ما يطلق عليه عادة توابع الشكل (form function) . ولها خاصية مشـتركة لكل العناصر المنتهية ، هي تساوي الواحد في العقدة المعتبرة عند تعويض إحداثياتهـا فيـها و الصفر في باقي العقد . بتعويض إحداثي العقدة $(i)(x^1 = 0)$ في العلاقة (4.19) نحصل علـى تابع الشكل الممثل بالشكل)(a–6–4) و بتعويض إحداثي العقدة $(k)(x^1 = \ell)$ في نفـس العلاقة نحصل على تابع الشكل الممثل بالشكل)(b–6–4) .يمكن الآن الحصول على تشوهات نقطة ما ضمن العنصر المنتهي بدلالة انتقالات عقد العنصر باستخدام علاقات التشـوهات – الانتقالات . بتطبيق العلاقة(4.4) نحصل على :



شكل 4-6 : توابع الشكل في العنصر المنتهي

$$\varepsilon_{11} = N^{(p)}{}_{,x^1} u_{1(p)} \equiv N^{(q)}{}_{,x^1} u_{1(q)} \tag{4.21}$$

حيث (q) قرينة مماثلة لـــ (p). و الشكل التفصيلي لهذه العلاقة هو :

$$\varepsilon_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1(i)} \\ u_{1(k)} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

بعد ذلك تقيم طاقة التشوه الداخلي الواردة في العلاقة (4.8) لعنصر منتهي لتصبح :

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_0^\ell \varepsilon_{11}\, EA\, \varepsilon_{11}\, dx^1 = \int_0^\ell u_{1(p)}\, N^{(p)}{}_{,x_1}\, EA\, N^{(q)}{}_{,x^1}\, u_{1(q)}\, dx^1$$

$$= \frac{1}{2} u_{1(p)}\, k^{1(p)1(q)}\, u_{1(q)}$$

(4.23)

حيث $k^{1(p)1(q)}$ مصفوفة الصلابة للعنصر المنتهي و هي تساوي :

$$k^{1(p)1(q)} = \int_0^\ell N^{(p)}{}_{,x^1}\, EA\, N^{(q)}{}_{,x^1}\, dx^1 \tag{4.24}$$

و هي تفصيليا مساوية لما يلي :

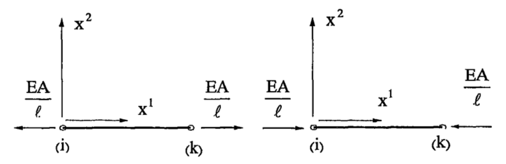
$$k^{1(p)1(q)} = \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{1(i)1(i)} & k^{1(i)1(k)} \\ k^{1(k)1(i)} & k^{1(k)1(k)} \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

لمعرفة ماهية مصفوفة القساوة نطبق على العنصر (i)(k) في العقدة (i) قوة باتجاه x^1 مساوية لـــ $\frac{EA}{\ell}$ و بالتالي الإجهاد الحاصل في المقطع عند (i) هو $\frac{E}{\ell}$ و التشوه الحاصل $\frac{1}{\ell}$. التشوه الحاصل من جهة أخرى هو مقدار تطاول العنصر على طوله الأصلي $\frac{\Delta\ell}{\ell}$ و منـــه نستنتج أن الانتقال الحاصل في النقطة (i) مكافىء إذا لواحدة الانتقالات . إذا $k^{1(i)1(i)}$ يمثـل القوة الناشئة في (i) باتجاه محور العنصر لانتقال في (i) مقداره واحدة الانتقالات في اتجاه محور العنصر . في العقدة (k) تنشأ قوة معاكسة لتلك المطبقة في (i) و مقدارها $-\frac{EA}{\ell}$ و هـــي مكافئة للمقدار $k^{1(k)1(i)}$ أي أن $k^{1(k)1(i)}$ هو القوة الناشئة في (k) باتجاه محـــور العنصـــر

لانتقال مقداره واحدة الانتقالات في (I) في اتجاه محور العنصر. و بشكل مماثل يمكن تفسير المقادير $k^{1(k)1(i)}$ ، $k^{1(k)1(k)}$.

ولانتقالات للعقد مقاديرها $u_{1(q)}$ تنشأ قوى مقطع طرفية مساوية للمقدار :

$$F^{1(p)} = k^{1(p)1(q)} u_{1(q)} \tag{4.26}$$



شكل 4-7 : قوى المقطع الطرفية لانتقال واحدي في العقدة (i)

شكل 4-8 : قوى المقطع الطرفية لانتقال واحدي في العقدة (k)

هذه العلاقة يمكن استنتاجها مباشرة من مبدأ الانتقالات الوهمية فالمتغير الأول لطاقة التشوه الداخلية (4.23) مساو لما يلي :

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\delta u_{1(p)} k^{1(p)1(q)} u_{1(q)} + \frac{1}{2} u_{1(p)} k^{1(p)1(q)} \delta u_{1(q)} = \delta u_{1(p)} k^{1(p)1(q)} u_{1(q)} \tag{4.27}$$

و هو مكافىء لعمل القوى الداخلية الناشئة من انتقالات وهمية للعقد مقدارها $\delta u_{1(p)}$. فيما لو اعتبرنا قوى المقطع الطرفية قوى خارجية و أعطينا انتقالا وهميا للعقدتين (i)(k) مقداره $u_{1(i)}, u_{1(k)}$ يكون العمل الخارجي الوهمي :

$$\delta\Pi_a = F^{1(i)}\delta u_{1(i)} + F^{1(k)}\delta u_{1(k)} = \delta u_{1(p)} F^{1(p)} \tag{4.28}$$

مبدأ الانتقالات الوهمية يقتضي أن يكون العمل المنجز مساويا لعمل القوى الداخلية .

$$\delta u_{1(p)} F^{1(p)} = \delta u_{1(p)} k^{1(p)1(q)} u_{1(q)} \tag{4.29}$$

و منه نحصل على العلاقة (4.26) . بعد تقييم طاقة التشوه الداخلية في المحاور الإحداثية الخاصة سوف يجري تقييم الحد الممثل لعمل القوى الخارجية المحورية الموزعة على طول العناصر المنتهية

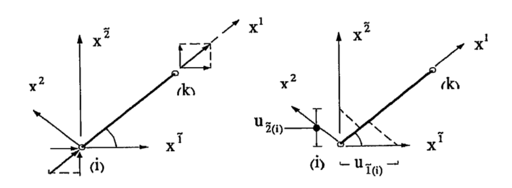
لتحويلها إلى حمولات مكافئة مركزة على العقد . بافتراض أن $\bar{n}^1$ تابع القوة المحورية الموزعة معبر عنه بالتابع للإحداثي x^1 $\quad \bar{n}^1 = \bar{n}^1(x^1)$ عندها يكون العمل الخارجي لهذه القوة :

$$\Pi_a = \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) u_1 dx^1 = (\int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) N^{(p)} dx^1) u_{1(p)} = \bar{f}^{1(p)} u_{1(p)} \qquad (4.30)$$

حيث $\bar{f}^{1(p)}$ القوة المركزة على العقدتين (i),(k) من عنصر منتهي و المكافئة للقوى المحورية الموزعة و هي تفصيلياً :

$$\bar{f}^{1(p)} = \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) N^{(p)} dx^1 = \begin{bmatrix} \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1)(1-\frac{x^1}{\ell})dx^1 \\ \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1)\frac{x^1}{\ell}dx^1 \end{bmatrix} \qquad (4.31)$$

تم حتى الآن إيجاد مصفوفة القساوة و بالتالي قوى المقطع الطرفية و القوى المركزة على العقد المكافئة للقوى الموزعة في المحاور الإحداثية المنطبقة على محور العنصر و بناء على ذلك فالمعادلات السابقة في الفقرات 3-3,2-3,1-3 سارية المفعول بالنسبة لحالة الجوائز الشبكية المستوية و الفراغية على السواء . قبل تجميع هذه القوى و كتابة معادلات التوازن على العقد لا بد من نسب هذه المقادير إلى جملة محاور إحداثية عامة .



شكل 4-10- العلاقة بين انتقالات العقد في المحاور الإحداثية العامة و الخاصة

شكل 4-11- قوى المقطع الطرفية في المحاور الإحداثية العامة و الخاصة

4-4- عنصر منتهي لجائز شبكي مستوي :

4-4-1- تحويل مصفوفة القساوة من المحاور الإحداثية الخاصة إلى المحاور الإحداثية العامة :

بالنظر إلى الشكل (4-10) نجد أن انتقال العقدة (i) بمقدار $u_{\tilde{1}(i)}$ باتجاه $x^{\tilde{1}}$ و $u_{\tilde{2}(i)}$ باتجاه $x^{\tilde{2}}$ يؤدي إلى انتقالها باتجاه x^1 (مع اعتبار k ثابتة) بالمقدار :

$$u_{1(i)} = u_{\tilde{1}(i)} \cos\alpha + u_{\tilde{2}(i)} \sin\alpha \tag{4.32}$$

و كذلك الأمر بالنسبة للعقدة k :

$$u_{i(k)} = u_{\tilde{1}(k)} \cos\alpha + u_{\tilde{2}(k)} \sin\alpha \tag{4.33}$$

بتجميع هاتين العلاقتين بالشكل المصفوفي نحصل على :

$$\begin{bmatrix} u_{1(i)} \\ u_{1(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\tilde{1}(i)} \\ u_{\tilde{2}(i)} \\ u_{\tilde{1}(k)} \\ u_{\tilde{2}(k)} \end{bmatrix}$$

$$u_{1(p)} = T_1^{\tilde{\ell}} u_{\tilde{\ell}(p)} \;;\; \tilde{\ell} = x^{\tilde{1}}, x^{\tilde{2}} \tag{4.34}$$

و تصبح طاقة التشوه الداخلي بدلالة شعاع الانتقالات $u_{\tilde{\ell}(p)}$ المنسوب إلى جملة المحاور الإحداثية العامة بالشكل :

$$\Pi_i = \frac{1}{2} u_{\tilde{\ell}(p)} T_1^{\tilde{\ell}} k^{1(p)1(q)} T_1^{\tilde{n}} u_{\tilde{n}(q)} = \frac{1}{2} u_{\tilde{\ell}(p)} k^{\tilde{\ell}(p)\tilde{n}(q)} u_{\tilde{n}(q)} \tag{4.35}$$

و المنشور المصفوفي لهذا الجداء هو :

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\left[u_{\tilde{1}(i)} u_{\tilde{2}(i)} u_{\tilde{1}(k)} u_{\tilde{2}(k)}\right]$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ & & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ & & & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\tilde{1}(i)} \\ u_{\tilde{2}(i)} \\ u_{\tilde{1}(k)} \\ u_{\tilde{2}(k)} \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

$k^{\bar{\ell}(p)\bar{n}(q)}$ المصفوفة المربعة السابقة تمثل مصفوفة القساوة لعنصر منتهي لجائز شبكي في المحاور الإحداثية العامة .

2-4-4- شعاع الحمولات الخارجية في المحاور الإحداثية العامة :

يتم تحويل شعاع الحمولات الخارجية المركزة على العقد و المكافئة للحمولات الموزعة ضمن العناصر أيضا بتقييم العمل الخارجي (4.30) بدلالة شعاع الانتقالات $u_{\bar{\ell}(p)}$ المنسوب إلى جملة المحاور الإحداثية العامة . و ذلك بتعويض العلاقة (4.34) في العلاقة (4.30) فنحصل على :

$$\Pi_a = \bar{f}^{1(p)} T_1^{\bar{\ell}} u_{\bar{\ell}(p)} \tag{4.37}$$

و الشكل المفصل لهذه العلاقة هو :

$$\Pi_a = \left[u_{\bar{1}(i)} u_{\bar{2}(i)} u_{\bar{1}(k)} u_{\bar{2}(k)} \right] \begin{bmatrix} \cos\alpha \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1)(1-\frac{x^1}{\ell})dx^1 \\ \sin\alpha \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1)(1-\frac{x^1}{\ell})dx^1 \\ \cos\alpha \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1)\frac{x^1}{\ell}dx^1 \\ \sin\alpha \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1)\frac{x^1}{\ell}dx^1 \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

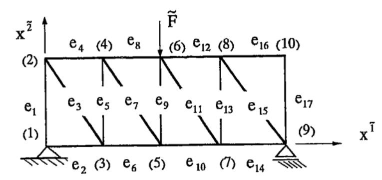
أو :

$$\Pi_a = \frac{1}{2} \left[u_{\bar{1}(i)} u_{\bar{2}(i)} u_{\bar{1}(k)} u_{\bar{2}(k)} \right] \begin{bmatrix} \bar{f}^{1(i)} \cos\alpha \\ \bar{f}^{1(i)} \sin\alpha \\ \bar{f}^{1(k)} \cos\alpha \\ \bar{f}^{1(k)} \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

و هو ما يمكن استنتاجه مباشرة من الشكل 4-11 . بعد تحويل مصفوفات القساوة للعناصر و أشعة الحمولات المكافئة للحمولات الموزعة إلى المحاور الإحداثية العامة يمكن أن يتم الجمع

لتشكيل المعادلات الجبرية الخطية العامة لكامل المنشأ و التي تحوي انتقالات العقد كمجاهيل ، فالطاقة الكامنة للمنشأ تأخذ بتعويض القيم المحسوبة للطاقة الداخلية و الخارجية (4.37) , (4.35) بدلالة الانتقالات المنسوبة إلى المحاور الإحداثية العامة في العلاقة (4.8) الشكل :

$$\Pi = \sum_e \left(\frac{1}{2} u_{\bar{\ell}(p)} T_1^{\bar{\ell}} k^{1(p)1(q)} T_1^{\bar{n}} u_{\bar{n}(q)} - \bar{f}^{1(p)} T_1^{\bar{\ell}} u_{\bar{\ell}(q)}\right) - \sum_m \bar{F}^{\bar{\ell}(m)} u_{\bar{\ell}(m)} \qquad (4.40)$$



شكل 4-12 : ترقيم عقد جائز شبكي

حيث تم تحويل الحد الأخير على غرار الحد قبل الأخير إلى المحاور الإحداثية العامة . بعد إجراء الجمع على كامل عناصر المنشأ و تشكيل مصفوفة القساوة العامة بتجميع شعاع الانتقالات ليصبح ممتداً على كامل عقد المنشأ نحصل على :

$$\Pi = \frac{1}{2} u_{\bar{\ell}(L)} k^{\bar{\ell}(L)\bar{n}(N)} u_{\bar{n}(N)} - \bar{f}^{\bar{\ell}(L)} u_{\bar{\ell}(L)} \qquad (4.41)$$

حيث (N) , (L) قرينتان تتحولان على كامل عقد المنشأ.

بأخذ المتغير الأول للطاقة الناتجة و ملاحظة تناظر مصفوفة القساوة العامة و إخراج $\delta u_{\bar{\ell}(L)}$ كعامل مشترك خارج قوسين ينتج :

$$\delta u_{\bar{\ell}(L)} (k^{\bar{\ell}(L)\bar{n}(N)} u_{\bar{n}(N)} - \bar{f}^{\bar{\ell}(L)}) = 0 \qquad (4.42)$$

و باعتبار $\delta u_{\bar{\ell}(L)}$ عشوائية تكون العلاقة (4.42) مكافئة للصفر إذا و فقط إذا كان :

$$k^{\bar{\ell}(L)\bar{n}(N)} u_{\bar{n}(N)} - \bar{f}^{\bar{\ell}(L)} = 0 \qquad (4.43)$$

هذه المعادلات جبرية خطية تحوي شعاع الانتقالات لكل عقد المنشأ $u_{\tilde{n}(N)}$ كمجهول ، أما $k^{\tilde{\ell}(L)\tilde{n}(N)}$ فهي مصفوفة القساوة العامة و هي مصفوفة مربعة متنـــاظرة و شـــاذة ، $\bar{f}^{\tilde{\ell}(L)}$ شعاع الحمولات الخارجية على كامل عقد المنشأ . تصبح هذه المعادلات قابلة للحـــل بعـــد تعويض الشروط الطرفية للانتقالات (2.39) فيها و سنستعرض بناء المعادلات العامـــة علـــى الجائز الشبكي المبين في الشكل (4-12) .

يتم البدء بترقيم عقد الجائز الشبكي بحيث يكون الفارق بين أي عقدتين متجاورتين أقل مـــا يمكن ،ثم ترقم عناصر المنشأ و يمكن أن يكون هذا الترقيم اختياريا دون مراعاة أية شـــروط. تشكل بعدها مصفوفة القساوة العامة والتي تحـــوي $\tilde{\ell}(L) \times \tilde{n}(N) = 20 \times 20$ عنصـــرا بتجميع مصفوفات العناصر بعد حسابها وتحويلها إلى جملة المحاور الإحداثية العامـــة. تتـــألف مصفوفة القساوة لعنصر جائز شبكي مستوي من 4×4 عنصرا وتحتوي هذه المصفوفة علـــى أربع مصفوفات جزئية كل منها 2×2 عنصرا وهي تمثل كما رأينا القوى الطرفية التي تنشـــأ في عقدة ما نتيجة واحدة الانتقالات في العقدة نفسها أو في عقدة أخرى. وقبل إضافة مصفوفة العنصر إلى مصفوفة القساوة العامة تجزأ هذه الأولى إلى مصفوفاتها الجزئية حيث تضاف كـــل مصفوفة جزئية في مكانها المناسب في المصفوفة العامة. فمثلا مصفوفة العنصر e_8 والذي يملك العقد $(6),(4)$ تحتوي على المصفوفات الجزئية $k_{e_8}^{1(4)1(4)}, k_{e_8}^{1(4)1(6)}, k_{e_8}^{1(6)1(4)}, k_{e_8}^{1(6)1(6)}$ والتي ستكتب رموزها $k_{e_8}^{44}, k_{e_8}^{46}, k_{e_8}^{64}, k_{e_8}^{66}$ اختصارا ، نجد أنها أضيفت على الشكل التالي:

المصفوفة الجزئية $k_{e_8}^{44}$ أضيفت في السطور 2×4 والأعمدة 2×4 للمصفوفة العامة.

المصفوفة الجزئية $k_{e_8}^{46}$ أضيفت في السطور 2×4 والأعمدة 2×6 للمصفوفة العامة.

المصفوفة الجزئية $k_{e_8}^{64}$ أضيفت في السطور 2×6 والأعمدة 2×4 للمصفوفة العامة.

المصفوفة الجزئية $k_{e_8}^{66}$ أضيفت في السطور 2×6 والأعمدة 2×6 للمصفوفة العامة.

وهكذا يتم تجميع مصفوفات العناصر جميعها بنفس الأسلوب. ويجري تجميع أشعة الانتقـــالات لعقد المنشأ في شعاع عام يحتوي على $\tilde{n}(N) = 20$ عنصرا وهو يمثل مجاهيل جملة المعادلات الخطية النهائية. وكذلك الأمر بالنسبة لأشعة الحمولات الخارجية المركزة على العقد حيـــث تجمع في شعاع عام يحوي على $\tilde{\ell}(L) = 20$ عنصرا وهو يمثل الطرف الثاني لجملة المعادلات الجبرية.بعد هذه الإجراءات نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$
\begin{bmatrix}
k^{11}e_1 + k^{11}e_2 & k^{12}_{e_1} & k^{13}_{e_2} & & & & & & & \\
k^{21}_{e_1} & k^{22}_{e_1} + k^{22}_{e_3} + k^{22}_{e_4} & k^{23}_{e_3} & k^{24}_{e_4} & & & & & & \\
k^{31}_{e_2} & k^{32}_{e_3} & k^{33}_{e_2} + k^{33}_{e_5} + k^{33}_{e_5} & k^{34}_{e_5} & k^{35}_{e_6} & & & & & \\
 & k^{42}_{e_4} & k^{43}_{e_5} & k^{44}_{e_4} + k^{44}_{e_5} + k^{44}_{e_7} + k^{44}_{e_8} & k^{45}_{e_7} & k^{46}_{e_8} & & & & \\
 & & k^{53}_{e_6} & k^{54}_{e_7} & k^{55}_{e_6} + k^{55}_{e_7} + k^{55}_{e_9} + k^{55}_{e_{10}} & k^{56}_{e_9} & k^{57}_{e_{10}} & & & \\
 & & & k^{64}_{e_8} & k^{65}_{e_9} & k^{66}_{e_8} + k^{66}_{e_9} + k^{66}_{e_{11}} + k^{66}_{e_{12}} & k^{67}_{e_{10}} & k^{68}_{e_{12}} & & \\
 & & & & k^{75}_{e_{10}} & k^{76}_{e_{11}} & k^{77}_{e_{10}} + k^{77}_{e_{11}} + k^{77}_{e_{13}} + k^{77}_{e_{14}} & k^{78}_{e_{13}} & k^{79}_{e_{14}} & \\
 & & & & & k^{86}_{e_{12}} & k^{87}_{e_{13}} & k^{88}_{e_{12}} + k^{88}_{e_{13}} + k^{88}_{e_{15}} + k^{88}_{e_{16}} & k^{89}_{e_{15}} & k^{810}_{e_{17}} \\
 & & & & & & k^{97}_{e_{14}} & k^{98}_{e_{15}} & k^{99}_{e_{14}} + k^{99}_{e_{15}} + k^{99}_{e_{17}} & k^{910}_{e_{17}} \\
 & & & & & & & k^{108}_{e_{16}} & k^{109}_{e_{17}} & k^{1010}_{e_{16}} + k^{1010}_{e_{17}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \\ u_{(3)} \\ u_{(4)} \\ u_{(5)} \\ u_{(6)} \\ u_{(7)} \\ u_{(8)} \\ u_{(9)} \\ u_{(10)} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{4.44}
$$

يترقيم مناسب لعقد المنشأ كما هو الحال في الشكل (4-12) تأخذ مصفوفة القساوة العامة شكلا شريطيا لأعظم فرق بين رقمي عقدتين متجاورتين مضافا إليه واحد .

×	*	*
×	*	*
×	*	*
×	*	*
×	*	*
×	*	*
×	*	*
×	*	*
×	*	0
×	0	0

عناصر القطر الرئيسي

السطر الأول بدءاً من عناصر القطر الرئيسي

السطر الثاني بدءاً من عناصر القطر الرئيسي

.

.

السطر الأخير بدءاً من عناصر القطر الرئيسي

0	0	×	*	*
0	*	×	*	*
*	*	×	*	*
*	*	×	*	*
*	*	×	*	*
*	*	×	*	*
*	*	×	*	*
*	*	×	*	*
*	*	×	*	0
*	*	×	0	0

شكل 4-13 : اختزان نصف المصفوفة بعرض الشريط فقط

شكل 4-14 : اختزان كامل المصفوفة بضعف عرض الشريط – واحد

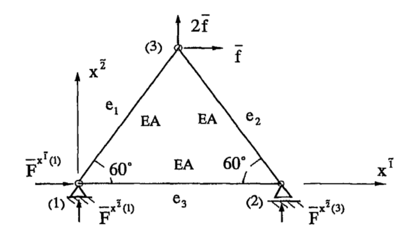
وهذا ما يسدي فائدة كبيرة أثناء استخدام الحاسوب لحل جملة المعادلات الخطية ، إذ يمكن الاستغناء عن العمليات الصفرية . و يتم الاختزان باستبعاد العناصر الصفرية و ترتيب عناصر القطر الرئيسي في عمود واحد تحت بعضها البعض كما في الشكلين (4-13) , (4-14) . من المعلوم أن طرق حل المعادلات الجبرية الخطية تنضوي تحت مجموعتين . المجموعة الأولى و تسمّى الطرق المباشرة و التي يتم فيها الحل بشكل مباشر كخوارزميات غاوس للمصفوفات غير المتناظرة و خوارزميات غاوس المعدلة للمصفوفات المتناظرة و طريقة شولسكي للمصفوفات المتناظرة. و يجري اختزان المصفوفة بكاملها أي بضعف عرض الشريط منقوصاً منه واحد شكل (4-14) أثناء استخدام خوارزميات غاوس للمصفوفات غير المتناظرة و اختزان نصف المصفوفة شكل (4-13) للخوارزميات الأخرى . المجموعة الثانية و تسمّى

الطرق غير المباشرة أو طرق التقريب المتتالي نذكر منـــها – طريقـــة التدرجـــات المترافقـــة (conjugate Gradiantc CG) و طريقة أخرى مطوّرة عـــن الســـابقة و تعـــرف بــــ (preconditioned Conjugate Gradiant PCG) و بعض الطرق التي تعتمد التقريـــب المتتالي لا تحتاج إلى تشكيل مصفوفة القساوة العامة لكل المنشأ و إنما لعقدة ما و العقد الأخرى المتصلة معها . و على القارىء العودة إلى كتب الرياضيات المختصّة بمعالجـــة طـــرق حـــل المعادلات الجبرية الخطية لتلبية متطلباته في هذا المجال . بنتيجة حل جملة المعادلات الجبرية الخطية نحصل على انتقالات عقد المنشأ في المحاور الإحداثية العامة . و بما أن قيم التأثير كالانتقـــالات ضمن العنصر و التشوهات و الإجهادات قد فرضت في جملة إحداثيات خاصة فلا بـــد قبـــل التمكن من حساب هذه القيم من تحويل انتقالات العقد إلى المحاور الإحداثية الخاصة . و هنـــا يبدأ الطريق العكسي لحساباتنا ، نعود إلى كل عنصر ابتداء من العنصر الأول و نحول انتقالات العقد المحددة له من المحاور الإحداثية العامة إلى المحاور الإحداثية الخاصة باســـتخدام العلاقـــة (4.34) ، بعدها نستطيع حساب انتقال أي نقطة ضمن العنصر باستخدام العلاقـــة(4.19) و التشوهات في أي نقطة وفق العلاقة (4.22) . و بناء على ذلك نستطيع حساب الإجـهاد في أي نقطة ضمن العنصر باستخدام قانون المادة و قوى المقطع بإجراء تكامل الإجهادات علـــى سطح المقطع والمثال التالي سوف يوضح كل الخطوات النظرية السابقة :

مثال 4-1:

المطلوب حساب الجائز الشبكي المؤلف من ثلاثة قضبان متساوية الصلابة و التي تشكل مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه ℓ و معرض في قمته إلى القوة الأفقية $\bar{f}$ و الشاقولية $2\bar{f}$.
ينصح عادة بتوجيه المحاور الإحداثية الخاصة للقضبان من العقدة الأدنى إلى العقـــدة الأعلـــى فالمحور الخاص للقضيب e_1 يتجه من العقدة (1) باتجاه العقـــدة (2) . بعـــد فـــرض محـــاور الإحداثيات الخاصة و العامة تبقى الخطوة الأولى في الحل إيجاد مصفوفات القساوة للعنـــاصر وللمنشأ .

تقاس الزاوية بين المحاور الإحداثية العامة و الخاصة بتدوير الأولى باتجاه موجب حتى تنطبق على الأخيرة . والاتجاه الموجب يتحدد وفق قاعدة اليد اليمنى .



شكل م4-1 : الجائز الشبكي ، المحاور الإحداثية ،التحميل

مصفوفة القساوة للعنصر e_1 :

وفق ما ورد أعلاه تكون الزاوية $\alpha = 60$ و $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\alpha = \frac{1}{2}$

$$k_{e_1} = \frac{EA}{\ell}\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}$$

وللعنصر e_2 تكون الزاوية $\alpha = 300°$ و $\cos\alpha = \frac{1}{2}; \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$
k_{e_2} = \frac{EA}{\ell}\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}
$$

أما العنصر الثالث فزاويته α مساوية للصفر و $\sin\alpha = 0$ و $\cos\alpha = 1$

$$
k_{e_3} = \frac{EA}{\ell}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

بجمع مصفوفات القساوة و كتابة جملة المعادلات الخطية للمسألة نحصل على الجملة التالية :

$$
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccccccc} & * & * & & & & * \\ * & & & & & & \\ * & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ * & & & & & & \end{array}
$$

$$
\frac{EA}{\ell}\begin{vmatrix} \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{2}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{6}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_{x^{\bar{1}}(1)} \\ u_{x^{\bar{2}}(1)} \\ u_{x^{\bar{1}}(2)} \\ u_{x^{\bar{2}}(2)} \\ u_{x^{\bar{1}}(3)} \\ u_{x^{\bar{2}}(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{F}^{x^{\bar{1}}(1)} \\ \bar{F}^{x^{\bar{2}}(1)} \\ \bar{f} \\ 2\bar{f} \\ 0 \\ \bar{F}^{x^{\bar{2}}(3)} \end{vmatrix}
$$

(Rows 1, 2 and 6 and columns 1, 2 and 6 of the matrix are marked with *.)

يلاحظ أن ردود الأفعال $\overline{F}^{x^{\bar{1}}(1)}, \overline{F}^{x^{\bar{2}}(1)}, \overline{F}^{x^{\bar{2}}(3)}$ في المسندين (1)و(3)علـــى التـــوالي قـــد اعتبرت وكأنها قوى خارجية مؤثرة على الجملة الإنشائية. الشروط الطرفية تقتضي بأن ينعـدم الانتقالين الأفقي والشاقولي في المسند (1) والانتقال الشاقولي في المسند (3) أي :

$$u_{x^{\bar{1}}(1)} = \overline{u}_{x^{\bar{1}}(1)} = 0$$

$$u_{x^{\bar{2}}(1)} = \overline{u}_{x^{\bar{2}}(1)} = 0$$

$$u_{x^{\bar{2}}(3)} = \overline{u}_{x^{\bar{2}}(3)} = 0$$

نحصل على جملة المعادلات التي تحكم المسألة بحذف السطر الذي يحوي القيمة الصفرية للانتقال و العمود المماثل له . و الأسطر و الأعمدة المحذوفة قد رمزت بنجمة * أما جملة المعـــادلات للانتقالات المجهولة فهي المتبقية بعد الحذف و هي :

$$\frac{EA}{\ell}\begin{vmatrix} \frac{2}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{6}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_{x^{\bar{1}}(2)} \\ u_{x^{\bar{2}}(2)} \\ u_{x^{\bar{1}}(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{f} \\ 2\bar{f} \\ 0 \end{vmatrix}$$

و بحلها نحصل على الانتقالات المجهولة للعقد:

$$\begin{vmatrix} u_{x^{\bar{1}}(2)} \\ u_{x^{\bar{2}}(2)} \\ u_{x^{\bar{1}}(3)} \end{vmatrix} = \frac{\bar{f}\ell}{EA}\begin{vmatrix} 1.961 \\ 1.356 \\ -0.077 \end{vmatrix}$$

و المعادلات الثلاثة المتبقية من مجموعة المعادلات أي :

$$\frac{EA}{\ell}\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_{x^{\bar{1}}(2)} \\ u_{x^{\bar{2}}(2)} \\ u_{x^{\bar{1}}(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{F}^{x^{\bar{1}}(1)} \\ \overline{F}^{x^{\bar{2}}(1)} \\ \overline{F}^{x^{\bar{2}}(3)} \end{vmatrix}$$

تعطي ردود الأفعال بعد حساب الانتقالات المجهولة .

$$\begin{vmatrix} \bar{F}^{x^{\bar{1}}(1)} \\ \bar{F}^{x^{\bar{2}}(1)} \\ \bar{F}^{x^{\bar{2}}(3)} \end{vmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} . \frac{\bar{f}\ell}{EA} \begin{vmatrix} 1.961 \\ 1.356 \\ -0.077 \end{vmatrix} = -\bar{f} \begin{vmatrix} 1.000 \\ 1.866 \\ 0.134 \end{vmatrix}$$

لحساب قيم التأثير في نقطة ما p من العنصر e_1 يجب حساب انتقـــال عقدتيــه الطرفيتـــين (1)و(2) في المحاور الإحداثية الخاصة . يجري التحويل وفق العلاقة (4.34) .

$$\begin{vmatrix} u_{x^1(1)} \\ u_{x^1(2)} \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} \frac{\bar{f}\ell}{EA} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.961 \\ 1.356 \end{vmatrix} = \frac{\bar{f}\ell}{EA} \begin{vmatrix} 0 \\ 2.155 \end{vmatrix}$$

و حال الانتقال في العنصر e_1 يمثلها التابع :

$$u_{x^1} = \frac{\bar{f}\ell}{EA} \begin{vmatrix} 1-\frac{x^1}{\ell} & \frac{x^1}{\ell} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 2.155 \end{vmatrix}$$

و حالة التشوّهات تتمثل بالتابع :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\bar{f}\ell}{EA} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 2.155 \end{vmatrix} = u_{x^1,x^1}$$

أما حالة الإجهادات فتتمثل بالتابع :

$$\sigma^{11} = \frac{\bar{f}}{A} \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 2.155 \end{vmatrix}$$

و قوى المقطع نحصل عليها بتكامل تابع الإجهادات على سطح مقطع القضيب :

$$N^{x^1} = \int_A \sigma^{11} dA = \sigma^{11}.A = \bar{f}\begin{vmatrix}-1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\2.155\end{vmatrix}$$

نحصل على الانتقال u_{x^1} أو قيم التشوّه ε_{11} أو قيم الإجهاد σ^{11} و قوة المقطع N^{x^1} في نقطة ما بتعويض إحداثيات هذه النقطة في التوابع الآنفة الذكر. فمثلاً عند النقطة (1) يكون $x^1 = 0$ و عند النقطة (2) يكون $x^1 = \ell$. بشكل مشابه نعالج حسابات قيم التأثير في العنصرين الآخرين فنحصل على قيمة قوة المقطع $N^{x^1} = 0.155\bar{f}$ للعنصر e_2 و $N^{x^1} = -0.077\bar{f}$ للعنصر e_3 . و على القارىء التأكد من صحة الحسابات الأخيرة بإجرائها و إجراء توازن عقد المنشأ . جدير بالذكر هنا أن إشارات قيم التوابع $N^{x^1}, \sigma^{11}, \varepsilon_{11}, u_{x^1}$ التي نحصل عليها في الحل النهائي هي تلك المتبعة في مقاومة المواد و ذلك نظراً لاستخدام العلاقات المعروفة في مقاومة المواد أثناء اشتقاق الطريقة . بينما لاحظنا ان قوى المقطع الطرفية الموجبة و القوى الخارجية الموجبة في طريقة العناصر المنتهية هي تلك التي تتفق باتجاهها مع الاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية المتخذة . بعد هذا المثال التفصيلي لتطبيق طريقة العناصر المنتهية – نموذج الانتقالات ننتقل إلى معالجة هذه الطريقة و ذلك عندما يتعرض المنشأ لمؤثرات خارجية أخرى كالتأثيرات الحرارية و حالة هبوط المساند أو وجود انتقالات مسبقة لبعض العقد .

4-4-3- حالة التأثيرات الحرارية :

لنفرض أن قضيبا من الجائز الشبكي أو عدة قضبان قد تعرضوا لتغير في درجة الحرارة مقداره Δt فالتشوه الحاصل نتيجة ذلك :

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \alpha_t \Delta t \tag{4.45}$$

حيث α_t معامل التمدد لمادة القضيب .

إذا اعتبرنا أن التشوه الحراري الحاصل تشوه مسبق . يكون التشوه الكلي مساو للتشوه الداخلي الحاصل نتيجة تأثير القوى الداخلية ε_{11} مطروحا منه التشوه المسبق الحاصل نتيجة

التأثيرات الحرارية $\bar{\varepsilon}_{11}$. أي أن التشوه الكلي هو $(\varepsilon_{11} - \bar{\varepsilon}_{11})$. مبدأ الطاقة الكامنة لحالة الجوائز الشبكية (4.8) يأخذ بوجود التأثيرات الحرارية الشكل :

$$\Pi = \sum_{e}\left(\frac{1}{2}\int_{0}^{\ell}(\varepsilon_{11} - \bar{\varepsilon}_{11})EA(\varepsilon_{11} - \bar{\varepsilon}_{11})dx^{1} - \int_{0}^{\ell}\bar{n}^{1}u_{1}dx^{1}\right) - \sum_{m}\bar{F}^{(m)}u_{1(m)} \tag{4.46}$$

$$\delta\Pi = 0 \tag{4.47}$$

و المتغير الأول للطاقة الكامنة (4.46) مع اعتبار متغير القيمة المعلومة $\bar{\varepsilon}_{11}$ مساو للصفر $(\delta\bar{\varepsilon}_{11} = 0)$ هو :

$$\delta\Pi = \sum_{e}\left(\int_{0}^{\ell}\varepsilon_{11}EA\delta\varepsilon_{11}dx^{1} - \int_{0}^{\ell}\bar{\varepsilon}_{11}EA\varepsilon_{11}dx^{1} - \int_{0}^{\ell}\bar{n}^{1}\delta u_{1}dx^{1}\right)$$
$$-\sum_{m}\bar{F}^{(m)}\delta u_{1(m)} = 0 \tag{4.48}$$

الحد الأول كما نعلم هو متغير طاقة التشوه الداخلية و الحد الثالث هو متغير طاقة القوى الخارجية الموزعة محولة إلى قوى مركزة على العقد مكافئة للسابقة ، و الحد الأخير يمثل متغير طاقة القوى الخارجية المركزة على العقد . و بتقييم الحد الثاني نحصل على متغير طاقة القوى الناتجة عن التأثيرات الحرارية . و لا بد لإجراء هذا التقييم من تحديد تابع التشوه الحراري $\bar{\varepsilon}_{11}$ في نقطة ما لا على التعيين $p(x^{1})$ من القضيب المعرض للتأثيرات الحرارية . و سندرس الحالة التي يتعرض فيها قضيب ما لتأثيرات حرارية غير منتظمة . فلنفرض أن قضيب ما عقدتيه $(i),(k)$ قد تعرضت لتأثيرات حرارية تتمثل بتغيير درجة حرارة العقدة (i) بمقدار $t_{(i)}$ و تغير درجة حرارة العقدة (k) بمقدار $t_{(k)}$. لتحديد تابع التأثيرات الحرارية ضمن العنصر يمكن أن نستخدم خوارزميات مشابهة لتلك التي حدد فيها تابع الانتقالات ضمن العنصر بدلالة انتقالات العقد (الانتقال من المعادلة (4.12) إلى (4.19)) . بافتراض تغير خطي لتابع التأثيرات الحرارية نحصل على :

$$\Delta t = \begin{vmatrix} 1 - \frac{x^{1}}{\ell} & \frac{x^{1}}{\ell} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_{(i)} \\ t_{(k)} \end{vmatrix} \tag{4.49}$$

أو باستخدام الكتابة بالقرائن

$$\Delta t = N^{(q)}t_{(q)} \ : \ (q) = (i),(k) \tag{4.50}$$

يصبح تابع التشوهات الحرارية

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \alpha N^{(q)} t_{(q)} \qquad (4.51)$$

و بالتالي الحد الممثل للتأثيرات الحرارية .

$$\delta\Pi_t = \int_0^{\ell} \bar{\varepsilon}_{11} EA \delta\varepsilon_{11} dx^1 = \alpha t_{(q)} (\int_0^{\ell} N^{(q)} EA N^{(p)}{}_{,x^1} dx^1) \delta u_{1(p)} = \delta u_{1(p)} \bar{t}^{1(p)} \qquad (4.52)$$

و هو بالتفصيل :

$$\delta\Pi_t = \begin{vmatrix} \delta u_{1(i)} & \delta u_{1(k)} \end{vmatrix} \alpha \frac{EA}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_{(i)} \\ t_{(k)} \end{vmatrix} \qquad (4.53)$$

و شعاع القوى الحرارية $\bar{t}^{1(p)}$ يجب إضافته إلى الحمولات الخارجية بعد تحويلـــه إلى الجملـــة الإحداثية العامة بطريقة مماثلة للشعاع $\bar{f}^{1(p)}$. و فيما يلي سنقدم مثالاً على معالجة التـــأثيرات الحرارية .

مثال 4–2 :

لدينا الجـــائز الشـــبكي المبـــين في الشـــكل م 4–2 ، معـــامل مرونـــة قضبانـــه جميعـــها $E = 21000 kN/cm^2$ و سطوح مقطعها $A = 20 cm^2$ و معـــامل تمددهـــا الطـــولي $\alpha = 0,000012$ يطلب إيجاد القوى في القضبان و الناتجة من ارتفاع درجة حرارة العقـــدة (4) بمقدار $50c^o$.

نوجه محاور القضبان الخاصة كما اتفق عليه سابقاً من رقم العقدة الأدنى إلى رقـــم العقـــدة الأعلى بعد هذا نستطيع حساب القوى الحرارية $\bar{t}^{1(p)}$ المؤثرة في عقدتي القضيب وفق العلاقة (4.53) . وهنا نشير أيضاً إلى أن قياس الزاوية بين المحاور الإحداثية العامة والمحاور الإحداثيـــة الخاصة يتم مثلما استنبطت علاقات التحويل (4.34) أي بتدوير المحاور الإحداثيـــة العامـــة بعكس عقارب الساعة (بالاتجاه الموجب للمحور الثالث) لتنطبق على المحاور الإحداثية الخاصة.

بالطبع ليس هذا إلا اصطلاح ويمكن قياس الزاوية بالشكل الذي نريده ولكن علينـــا عندهـــا استخراج علاقات التحويل وفق اصطلاح الإشارة المعتمد.

لنعد الآن إلى حساب القوى الحرارية في العنصر e_3 :

(2)
(3)
e_2
e_1 3.0m
$x^{\bar{2}}$
e_3
(1) 3.0m
(4)
$x^{\bar{1}}$
4.0m

شكل م 4-2: الجائز الشبكي ، الأبعاد ، الخواص الهندسية ، التحميل الحراري

$$\bar{t}^{p} \equiv \alpha_t \frac{EA}{2}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\begin{bmatrix}t_{(1)}\\ t_{(4)}\end{bmatrix} = \frac{0.000012\cdot 21000.50}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 50\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-315\\ 315\end{bmatrix}$$

الجملة الإحداثية العامة تصنع مع الجملة الإحداثية الخاصة الزاوية $\alpha = 216.87$ وبالتـــالي $\sin\alpha = -0.6, \cos\alpha = -0.8$ و القوى الحرارية $\bar{t}^{\bar{\imath}(p)}$ في المحاور الإحداثية العامة الموافقة للسابقة هي :

$$\bar{t}^{\bar{\ell}(p)} = \begin{vmatrix}-0.8 & -0.6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.8 & -0.6\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-315\\ 315\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}252\\ 189\\ -252\\ -189\end{vmatrix}$$

قوة أفقية وشاقولية مؤثرة في العقدة (1)

قوة أفقية وشاقولية مؤثرة في العقدة (4)

بعد حساب مصفوفة القساوة للعناصر و جمعها إلى مصفوفة القساوة العامة و معالجة الشـــروط الطرفية نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية :

$$EA\begin{vmatrix} 0.256 & 0 \\ 0 & 0.477 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_{\bar{1}(1)} \\ u_{\bar{2}(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 252 \\ 189 \end{vmatrix}$$

بحل هاتين المعادلتين نجد انتقالات العقدة (1) في الجملة الإحداثية العامة .

$$u_{\bar{1}(1)} = \frac{984.375}{EA}; u_{\bar{2}(1)} = \frac{396.226}{EA}$$

لحساب القوى في القضيبين e_1, e_2 نجري الحسابات الإعتيادية كما في المثال السابق إذ نحـول أولا انتقالات عقدتيهما إلى المحاور الإحداثية الخاصة ثم تجرى الحسابات الروتينية للتشوهات و بعدها قوى المقطع . و سنكتفي هنا باعطاء النتيجة :

$$N^{x^1}{}_{e_1} = -132kN; \quad N^{x^1}{}_{e_2} = 109.95$$

و القوة في القضيب e_1 ضاغطة و في e_2 شادة . لحساب القوة في القضيب e_3 نحسب أولا انتقالات عقدتبه في المحاور الإحداثية الخاصة .

$$\begin{vmatrix} u_{1(1)} \\ u_{1(4)} \end{vmatrix} = \frac{1}{EA}\begin{vmatrix} -0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & -0.6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 984.375 \\ 396.226 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{EA}\begin{vmatrix} -1025.236 \\ 0 \end{vmatrix}$$

والحالة الإجهادية في القضيب يعبر عنها قانون المادة (4.5) لحالة التشوهات الحرارية المسبقة .

$$\sigma^{11} = E(\varepsilon_{11} - \bar{\varepsilon}_{11})$$

و القوة في القضيب e_3 هي:

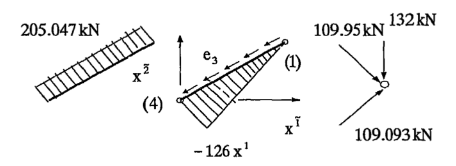
$$N^{x^1} = EA(\varepsilon_{11} - \bar{\varepsilon}_{11}) = EA\varepsilon_{11} - \alpha EA\Delta t$$

و هي بعد التعويض :

$$N^{x^1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -1025.236 \\ 0 \end{vmatrix} - 0.000012 \times 21000 \times 50\begin{vmatrix} 1 - \frac{x^1}{5} & \frac{x^1}{5} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 50 \end{vmatrix} = 205.047 - 126x^1$$

و هذا التابع يعبر عن تغير القوة في القضيب e_3 . حيث يبين هذا التابع أن تغير هذه القـــوة خطي. لنحسب الآن المحصلة الوسطية لهذه القوة و ذلك من اجل إجراء توازن العقـــدة (1) للتحقق من صحة الحل . القوة الوسطية في القضيب هي محصلة القوى المؤثرة عليه و تتألف من القوة الثابتة و مقدارها :

$x^1 = 0$ و القوة الموزعة $-126x^1$ وقيمة القوة الموزعة عند العقدة (1) حيـــث 205.047 هي 0 و عند العقدة (4) حيث $x^1 = 5$ هي -126×5 - و الشدة الموزعة علـــى الطـــول $-126kN/m$ وحصلتها هي مساحة المثلث الممثل لها أي $-\frac{126 \times 5}{2}$ و بالتالي محصلـــة القوة في القضيب $e_3 = 205.047 - 315 = -109.093$ و تصبح العقدة (1) متوازنة تحت تأثير مجموعة القوى المؤثرة عليها (شكل م 4-2-ب) .



شكل م —4—2—ب توازن عقدة الجائز الشبكي

4-4-4- حالة هبوط المساند

بغية إتمام الموضوع بشكل متكامل نود الآن معالجة حالات أخرى كهبوط المساند أو حالـــة وجود انتقالات مسبقة و حالة وجود نوابض عند مساند الجوائز الشبكية . و لنبدأ الآن بحالـة حصول انتقالات مسبقة $\bar{u}_{\bar{\ell}(L)}$ في بعض عقد الجائز الشبكي. في هذه الحالة تأخذ الطاقـــة الكامنة المقيمة في العلاقة (4.40) الشكل :

$$\Pi = \frac{1}{2}(u_{\bar{\ell}(L)} + \bar{u}_{\bar{\ell}(L)})k^{\bar{\ell}(L)\bar{n}(N)}(u_{\bar{n}(N)} + \bar{u}_{\bar{n}(N)}) - \bar{f}^{\bar{n}(N)}(u_{\bar{\ell}(L)} + \bar{u}_{\bar{\ell}(L)}) \tag{4.54}$$

عدد عقد المنشأ $L, N = 1,2,3,...,$

و المتغير الأول للطاقة الكامنة هو :

$$\delta\Pi = \delta u_{\tilde{\ell}(L)}[k^{\tilde{\ell}(L)\tilde{n}(N)}(u_{\tilde{n}(N)} + \overline{u}_{\tilde{n}(N)}) - \overline{f}^{\tilde{n}(N)}] = 0 \qquad (4.55)$$

و ذلك لأن المتغير الأول للانتقالات المعلومة مسبقا مساو للصفر $(\delta\overline{u} = 0)$ و بالتالي جملة المعادلات الخطية لهذه الحالة :

$$k^{\tilde{\ell}(L)\tilde{n}(N)}u_{\tilde{n}(N)} = \overline{f}^{\tilde{n}(N)} - k^{\tilde{\ell}(L)\tilde{n}(N)}\overline{u}_{\tilde{n}(N)} \qquad (4.56)$$

الحد الأخير من الطرف الثاني و هو جداء مصفوفة القساوة العامة في شعاع الانتقالات المسبقة يمثل تأثير هبوط المساند . و المثال التالي يوضح عدديا معالجة هذه الحالة :

مثال 4-3:

يطلب في حالة الجائز الشبكي السابق إيجاد القوى في قضبانه في حالة هبوط المسند (2) مقدار ((1cm) في اتجاه المحور $x^{\tilde{2}}$.

بعد حساب مصفوفة القساوة العامة و ترتيب شعاع الانتقالات المسبقة لكل عقد الجائز الشبكي نستطيع حساب جدائهما :

$$k^{\tilde{\ell}(L)\tilde{n}(N)}\overline{u}_{\tilde{n}(N)} = EA \times$$

$$\begin{vmatrix} 0.256 & 0 & 0 & 0 & -0.126 & 0.096 & -0..128 & -0.096 \\ & 0.477 & 0 & -0.333 & 0.096 & -0.072 & -0.096 & -0.072 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0.128 & -0.96 & 0 & 0 \\ & & & & & 0.072 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0.128 & 0.096 \\ & & & & & & & 0.072 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = EA \begin{vmatrix} 0 \\ 0.333 \\ 0 \\ -0.333 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

وتصبح جملة المعادلات بعد معالجة الشروط الطرفية كما يلي:

$$EA\begin{vmatrix}0.256 & 0 \\ 0 & -0.477\end{vmatrix} = EA\begin{vmatrix}0 \\ -0.333\end{vmatrix}$$

و انتقالات العقدة (1) هي :

$$\begin{vmatrix}u_{x^{\bar{1}}(1)} \\ u_{x^{\bar{2}}(1)}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 \\ -0.698\end{vmatrix} cm$$

نتبع الآن الطريقة الإعتيادية في حسابات القوى في قضبان الجائز الشبكي و نحسبها الآن مفصلة للقضيب e_1 : الانتقالات في الجملة الإحداثية الخاصة لعقدتي القضيب e_1 هي :

$$\begin{vmatrix}u_{x^1(1)} \\ u_{x^1(2)}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 \\ -0.698 \\ 0 \\ -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-0.698 \\ -1\end{vmatrix} cm$$

و القوة في القضيب e_1 :

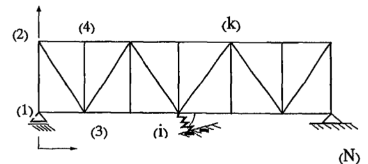
$$N^{x^1} = 21000 \times 20\begin{vmatrix}-\frac{1}{300} & \frac{1}{300}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-0.698 \\ -1\end{vmatrix} \approx -1057kN$$

بحساب القوى في القضيبين الآخرين نحصل على :

$$N^{x^1}{}_{e_2} = 879.48; N^{x^1}{}_{e_3} = -879.48$$

و قوى العقدة (4) متوازنة تحت تأثير القوى السابقة .

4-4-5- معالجة النوابض :



شكل 4-15: حالة نابض يميل بزاوية α في العقدة (i) من جائز شبكي

في حالة وجود نابض ثابت صلابته $c^{1(p)1(q)} = c;(p),(q) = (i)$ يسند عقدة ما (i) من جائز شبكي تكون الطاقة الداخلية المتولدة عن قوى مرونة النابض و الناتجة عن انتقال العقدة (i) باتجاه محور النابض بمقدار $(u_1(i))$ مساوية لما يلي :

$$\Pi_s = \frac{1}{2} u_{1(p)} \; c^{1(p)1(q)} \; u_{1(q)} \;\; ; (p),(q) = (i) \tag{4.57}$$

هذه الطاقة يجب تحويلها بدلالة انتقالات العقدة (i) باتجاهات المحاور الإحداثية العامة . و التحويل يتم بنفس الإسلوب المتبع في العلاقة (4.35) حيث ينتج :

$$\Pi_s = \frac{1}{2} u_{\tilde{\ell}(p)} T_1^{\tilde{\ell}} \; c^{1(p)1(q)} \; T_1^{\tilde{n}} u_{\tilde{n}(q)}; \tilde{\ell}, \tilde{n} = \tilde{1}, \tilde{2} \tag{4.58}$$

و الشكل التفصيلي لهذه العلاقة هو :

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_{\tilde{1}(i)} & u_{\tilde{2}(i)} \end{vmatrix} c \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \sin\alpha \cos\alpha \\ \sin\alpha \cos\alpha & \sin^2 \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{\tilde{1}(i)} \\ u_{\tilde{2}(i)} \end{vmatrix} \tag{4.59}$$

و هذه العلاقة يجب إضافتها إلى الطاقة الكامنة . ويتم هذا بإضافة المصفوفة $T_1^{\tilde{\ell}} c^{1(p)1(q)} T_1^{\tilde{n}}$ في المكان الموافق للعقدة (i) في جملة المعادلة الخطية كما توضح العلاقة (4.61) . أما القوة المحورية في النابض فيتم حسابها بعد حساب الانتقالات المجهولة بحساب انتقال العقدة (i) باتجاه محور النابض وفق علاقة التحويل (4.34) و من ثم تطبيق العلاقة المعروفة :

$$N^s = -c u_1 \tag{4.60}$$

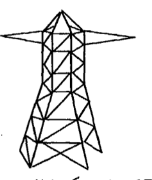
و أخيرا تكون جملة المعادلات الخطية في حالة وجود نابض في العقدة (i) بالشكل :

$$\begin{bmatrix} & & & & \\ & +c\cos^2\alpha & +c\cos\alpha\sin\alpha & & \\ & +c\cos\alpha\sin\propto & +c\sin^2\alpha & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\bar{1}(1)} \\ u_{\bar{2}(1)} \\ \vdots \\ u_{\bar{1}(i)} \\ u_{\bar{2}(i)} \\ \vdots \\ u_{\bar{1}(N)} \\ u_{\bar{2}(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}^{\bar{1}(1)} \\ \bar{f}^{\bar{2}(1)} \\ \vdots \\ \bar{f}^{\bar{1}(i)} \\ \bar{f}^{\bar{2}(i)} \\ \vdots \\ \bar{f}^{\bar{1}(N)} \\ \bar{f}^{\bar{2}(N)} \end{bmatrix}$$

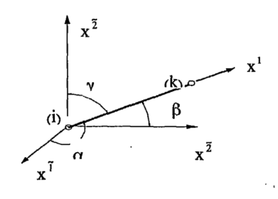
(4.61)

5-4- عنصر منتهي لجائز شبكي فراغي :

لنقتطع من جائز شبكي فراغي (شكل 4-17) عنصر منتهي عقدته ذات الرقم الأدنى (i) و ذات الرقم الأعلى (k) . عادة يوجه محور القضيب x^1 من العقدة (i) إلى العقدة (k) كما أسلفنا و يحدد عادة القضيب بإعطاء إحداثيات عقدتيه في الجملة الإحداثية العامة ولتكن إحداثيات العقدة i $(x^{\bar{1}}{}_{(i)}, x^{\bar{2}}{}_{(i)}, x^{\bar{3}}{}_{(i)})$ و إحداثيات العقدة k $(x^{\bar{1}}{}_{(k)}, x^{\bar{2}}{}_{(k)}, x^{\bar{3}}{}_{(k)})$. إن زوايا الاتجاه للعنصر (i),(k) هي تلك التي يضعها مستقيم مواز للقضيب مار من مبدأ الإحداثيات و موجه بالاتجاه من (i) إلى (k) مع الاتجاهات الموجبة للمحاور الإحداثية الثلاثة $x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}}$. بفرض أن الزوايا مع المحاور $x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}}$ هي على الترتيب α, β, γ يمكن حساب تجيبات هذه الزوايا من مبادىء الهندسة التحليلية :



شكل 4-17- جائز شبكي فراغي



شكل 4-18- عنصر من جائز شبكي فراغي .

المحاور الإحداثية الخاصة و العامة

$$\cos\alpha = \frac{x^{\bar{1}}{}_{(k)} - x^{\bar{1}}{}_{(i)}}{\ell}$$

$$\cos\beta = \frac{x^{\bar{2}}{}_{(k)} - x^{\bar{2}}{}_{(i)}}{\ell} \qquad (4.62)$$

$$\cos\gamma = \frac{x^{\bar{3}}{}_{(k)} - x^{\bar{3}}{}_{(i)}}{\ell}$$

حيث ℓ طول القضيب (k) (i) و يساوي :

$$\ell = \sqrt{(x^{\bar{1}}{}_{(k)} - x^{\bar{1}}{}_{(i)})^2 + (x^{\bar{2}}{}_{(k)} - x^{\bar{2}}{}_{(i)})^2 + (x^{\bar{3}}{}_{(k)} - x^{\bar{3}}{}_{(i)})^2} \qquad (4.63)$$

خلافا للحالة المستوية يحتوي شعاع الانتقالات في المحاور الإحداثية العامة على ثلاث مركبات . و كذلك شعاع القوى الخارجية و هي مركبة في اتجاه كل محور من المحاور الإحداثية العامة . و للحصول على مصفوفة القساوة العامة يجب تقييم طاقة التشوه الداخلي (4.23) المنسوبة إلى الجملة الإحداثية الخاصة للعنصر في جملة المحاور الإحداثية العامة . إن انتقال العقدة (i) بمقدار $u_{\bar{1}(i)}$ باتجاه $x^{\bar{1}}$ و $u_{\bar{2}(i)}$ باتجاه $x^{\bar{2}}$ و $u_{\bar{3}(i)}$ باتجاه $x^{\bar{3}}$ يؤدي إلى انتقالها باتجاه محور القضيب x^1 مع اعتبار k ثابتة بالمقدار :

$$u_{1(i)} = u_{\bar{1}(i)}\cos\alpha + u_{\bar{2}(i)}\cos\beta + u_{\bar{3}(i)}\cos\gamma \qquad (4.64)$$

و كذلك الحال بالنسبة للعقدة k :

$$u_{1(k)} = u_{\bar{1}(k)}\cos\alpha + u_{\bar{2}(k)}\cos\beta + u_{\bar{3}(k)}\cos\gamma \qquad (4.65)$$

وباستخدام الكتابة بالقرائن نستطيع التعبير عن العلاقتين السابقتين بالعلاقة :

$$u_{1(p)} = T_1^{\bar{\ell}} u_{\bar{\ell}(p)} \tag{4.66}$$

و بالتحويل السابق تأخذ طاقة التشوه الداخلي شكلا مشابها للعلاقة (4.35) وهو :

$$\Pi_i = \frac{1}{2} u_{\bar{\ell}(p)} T_1^{\bar{\ell}} k^{1(p)1(q)} T_1^{\bar{n}} u_{\bar{n}(q)} \tag{4.67}$$

حيث :

$$u_{\bar{\ell}(p)} = \lfloor u_{\bar{1}(i)} u_{\bar{2}(i)} u_{\bar{3}(i)} u_{\bar{1}(k)} u_{\bar{2}(k)} u_{\bar{3}(k)} \rfloor \tag{4.68}$$

شعاع انتقالات العقدتين (i) و (k) في المحاور الإحداثية العامة. وعليه تصبح مصفوفة القساوة لعنصر جائز شبكي فراغي محولة إلى المحاور الإحداثية العامة كما يلي:

$$T_1^{\bar{\ell}} k^{1(p)1(q)} T_1^{\bar{n}} = \frac{EA}{\ell} \begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma \\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\beta & -\cos\beta\cos\gamma \\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma & -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & -\cos^2\gamma \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma & \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\beta & -\cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & -\cos^2\gamma & \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} \tag{4.69}$$

أما شعاع الحملات الخارجية المركزة على العقد و المكافئة للحمولات الموزعة ضمن العناصر فيتم تحويلها بتقييم العمل الخارجي (4.30) المنسوب إلى الجملة الإحداثية الخاصة بدلالة شعاع الانتقالات (4.68) المنسوب إلى جملة المحاور الإحداثية العامة و ذلك بتعويض العلاقة (4.66) في العلاقة (4.30) فنحصل على :

$$\Pi_a = \bar{f}^{1(p)} T_1^{\bar{\ell}} u_{\bar{\ell}(p)} \tag{4.70}$$

و هذه العلاقة بالتفصيل :

$$
\Pi_a = \left[u_{\bar{1}(i)} u_{\bar{2}(i)} u_{\bar{3}(i)} u_{\bar{1}(k)} u_{\bar{2}(k)} u_{\bar{3}(k)} \right] \begin{vmatrix} \cos\alpha \int_0^{\ell} \bar{n}^1 (x^1)(1 - \frac{x^1}{\ell}) dx^1 \\ \cos\beta \int_0^{\ell} \bar{n}^1 (x^1((1 - \frac{x^1}{\ell}) dx^1 \\ \cos\gamma \int_0^{\ell} \bar{n}^1 (x^1)(1 - \frac{x^1}{\ell}) dx^1 \\ \cos\alpha \int_0^{\ell} \bar{n}^1 (x^1) \frac{x^1}{\ell} dx^1 \\ \cos\beta \int_0^{\ell} \bar{n}^1 (x^1) \frac{x^1}{\ell} dx^1 \\ \cos\gamma \int_0^{\ell} \bar{n}^1 (x^1) \frac{x^1}{\ell} dx^1 \end{vmatrix} \quad (4.71)
$$

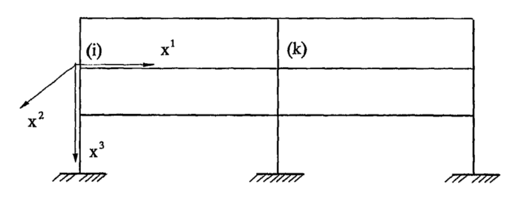
بعد تحويل كافة المؤثرات إلى الجملة الإحداثية العامة يمكن الجمع على كامل المنشأ بشكل مشابه لما ورد في حالة الجوائز الشبكية المستوية مع الفارق البسيط أنه في حالة الجوائز الفراغية تكون المصفوفة الجزئية الخاصة بكل عقدة مؤلفة من 3×3 عنصرا عوضا عن كونها في الحالة المستوية مؤلفة من 2×2 عنصرا .

المصادر العلمية :

1. Rothe, A .
Stabstatik fur Bauingenieure
VEB verlag fur Bauwesen , Berlin 1984 .
2. Bochmann , F .
Statik im Bauwesen , Bd . I , II und III
VEB Verlag fur Bauwesen , Berlin 1977 .
3. Winkler , j ; Aurich , H .
Technische Mechanik
VEB Fachbuch verlag , Leipzig 1987 .

5- معالجة الإطارات المستوية والفراغية بطريقة العناصر المنتهية

يقصد بالمنشآت الإطارية تلك المنشآت الناتجة من الاتصال الصلد لقضبان مقاومة لعزوم الانعطاف مع بعضها البعض (شكل 5-1). هذا الاتصال الصلد يسمح بنقل عزوم الانعطاف وقوى القص والقوى الناظمية. تصنَّف الإطارات عادةً تحت زمر معينة فنجد منها الإطارات الوحيدة الطابق والإطارات متعددة الطوابق، والإطارات الموثوقة والإطارات المتمفصلة ... إلخ. وسوف تعالج هذه الإطارات وفق الافتراضات الكلاسيكية المعروفة لنظرية الإطارات، وهذه الافتراضات هي:



شكل 5-1: منشأ إطاري متعدد الطبقات

ا- طول قضيب الإطار كبير جداً بالنسبة لأبعاد مقطعه.

ب- تأثير القوى القاصة ضئيل بالنسبة لتأثير عزوم الانعطاف بحيث يمكن إهماله.

جـ- محور القضيب مستقيم أو انه محني انحناء بسيطاً جداً بحيث يمكن اعتباره مستقيماً.

د- تؤثر الحمولات الخارجية في مستوي يمر بمحور القضيب وفصله المشترك مع مقطع القضيب يمثل محور عطالة رئيسي للمقطع وهو بنفس الوقت محور تناظر المقطع.

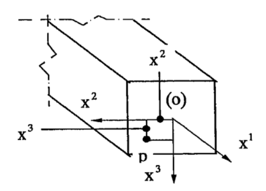
هـ- يفترض أن مادة القضيب مرنة ومتجانسة ويسري فيها مفعول قانون هوك.

و- المقاطع المستوية قبل التشوه تبقى مستوية بعد التشوه (نظرية التشوه الأمثل للمقاطع). كما يفترض أن المقاطع المستوية العمودية على محور القضيب قبل التشوه تبقى عمودية على محور القضيب المتشوه بعد التشوه (نظرية برنولي Bernoulli ونافير Navier).

ز- القوى الخارجية المؤثرة عمودياً على محور القضيب يمكن اعتبارها وكأنها موزعة بانتظام على كامل ارتفاع المقطع.

ى- المقاطع المعرّضة لعزوم فتل تتشوه فقط بدورانها حول محور مزدوجة عزوم الفتل، وتحافظ على شكلها وكأنها شريحة صلدة. بينما يمكن لنقاط المقطع أن تنتقل باتجاه محور المزدوجة لكن تابع انتقالها ليس متعلقاً بالإحداثي المستقل المنطبق على محور المزدوجة (فرضية سانت فينانت Sant Venant).

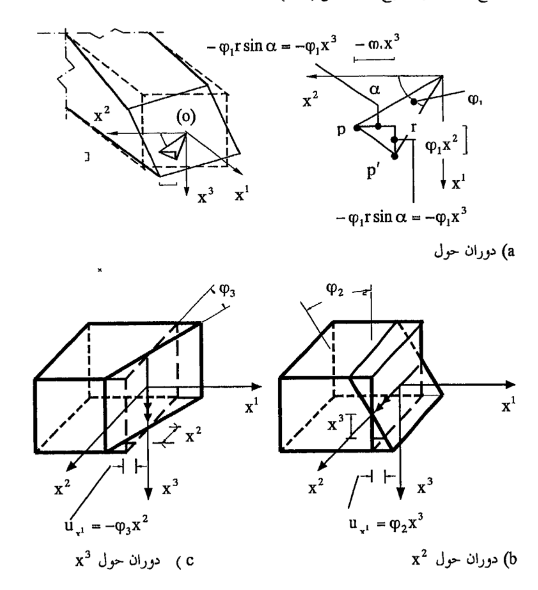
5-1- تخفيض عدد مجاهيل نظرية المرونة:



شكل 5-2: قضيب مقتطع من إطار فراغي

لنستعرض الآن مجاهيل نظرية المرونة لحالة قضيب مقتطع من إطار فراغي (شكل 5-2) يحقق الافتراضات السابقة. لننسب القضيب المقتطع من الإطار إلى جملة محاور إحداثية محلية متعامدة نظامية (x^1, x^2, x^3) بحيث ينطبق محور القضيب على المحور x^1. لتحديد الحالة الانتقالية لمقطع القضيب يجب تحديد انتقالات كل نقطة منه P في اتجاه المحاور الإحداثية الثلاثة وهي على التوالي (u_1,u_2,u_3) وهذه هي نفسها المجاهيل التي تحدد تابع الانتقالات لجسم فراغي. وباعتبار P نقطة ما لاعلى التعيين من نقاط المقطع، يكون عدد المجاهيل اللازمة لتحديد المقطع المتشوه باعتباره جزءا من جسم فراغي لانهائي. ولكن باستخدام الافتراضات التسهيلية السابقة يمكن صياغة انتقال النقطة P بدلالة انتقالات نقطة مركز ثقل المقطع ودورانات المقطع حول المحاور الإحداثية الثلاثة.

لنفترض أن انتقالات نقطة مركز ثقل المقطع باتجاه المحاور x^1, x^2, x^3 هي على التوالي u_1^0 , u_3^0 , u_2^0 , وأن دورانات المقطع حول المحاور نفسها هي على التوالي $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ، نجد باعتماد فرضية المقاطع المستوية والرجوع إلى الشكل (5-3) أن:



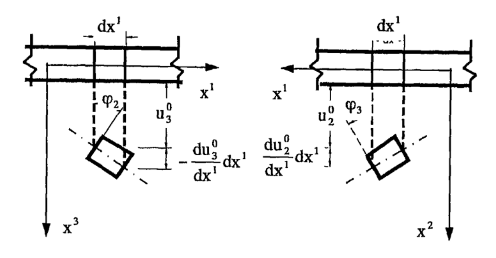
c) دوران حول x^3 b) دوران حول x^2

شكل 5-3: دورانات المقطع حول المحاور الاحداثية

$$u_1 = u_1^0 - \varphi_3 \cdot x^2 + \varphi_2 \cdot x^3$$

$$u_2 = u_2^0 - \varphi_1 \cdot x^3 \qquad (5.1)$$

$$u_3 = u_3^0 - \varphi_1 \cdot x^2$$



شكل 5-4: فرضية برنولي: المقاطع العمودية على محور القضيب قبل التشوه تبقى عمودية علـــى محور القضيب المتشوه بعد التشوه. ا) انتقال تفاضلي باتجاه x^2 . ب) انتقال تفاضلي باتجاه x^3.

باعتبار أن مشتقات الانتقالات صغيرة، يمكن إلباس ظل الزاوية بالزاوية نفسها ويكون الـــدوران عند تغير الانتقالات في عنصر تفاضلي طوله $d\,x^1$ حول x^2 مكـــافىء لـــ $(-\frac{du_3^0}{dx^1})$ ، والإشارة السالبة تعني أن الانتقال الموجب يؤدي إلى زاوية دوران سالبة. وهذه الزاويـــة مكافئـــة (وفق نظرية برنولي) لزاوية دوران المقطع حول x^2 (الزاويتين متساويتين بالتعامد شـــكل 5-4) أي:

$$\varphi_2 = (-\frac{du_3^0}{dx^1}) \qquad (5.2)$$

وبشكل مماثل نجد أن:

$$\varphi_3 = \left(-\frac{du_2^0}{dx^1}\right) \qquad (5.3)$$

وبالتالي بعد افتراض التسهيلات السابقة يمكن التعبير عن انتقالات المقطع في أية نقطة منه بتحديد شعاع الانتقالات:

$$u_i^0 \equiv \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} \qquad (5.4)$$

أما بالنسبة لموتّرة التشوهات فتتقلص لتحتوي فقط على التشوه الناظمي ε_{11} والتشوهات العرضية ε_{12} , ε_{13} ، أما التشوهات المتبقية فهي وفق الفرضية ا) مهملة أي:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{32} = 0 \qquad (5.5)$$

ويكون جزء موتّرة التشوهات الذي يجب تحديده هو:

$$\varepsilon_{1i} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} \qquad (5.6)$$

والإجهادات الحاصلة طبقاً لذلك والتي يجب تعيينها تتلخص في جزء موتّرة الإجهادات

$$\sigma^{1i} \equiv \begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{13} \end{bmatrix} \qquad (5.7)$$

أما الإجهادات المتبقية فتعتبر مهملة (الفرضية ا):

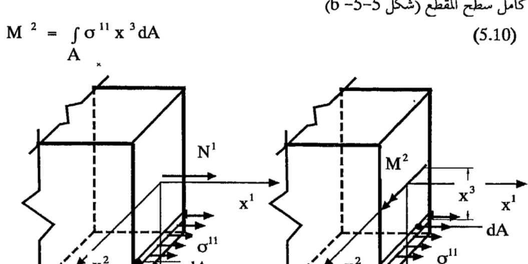
$$\sigma^{22} = \sigma^{33} = \sigma^{23} = 0 \qquad (5.8)$$

يلجأ عادةً إلى استخدام قوى المقطع أثناء كتابة معادلات التوازن على عنصر تفاضلي مقتطع من قضيب الإطار. وقوى المقطع المستقلة التي يجب تحديدها ممثلة بالقوة الناظمية N والتي تتمثل بتكامل الإجهادات الناظمية على سطح المقطع (شكل 5-5- a)

$$N^1 = \int_A \sigma^{11} dA \qquad (5.9)$$

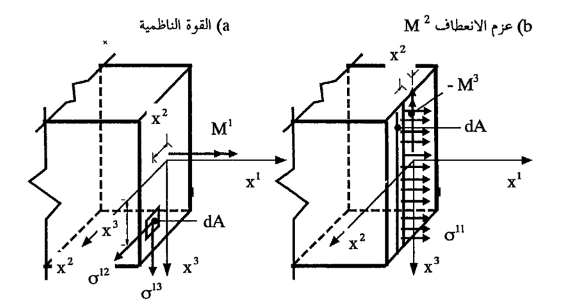
وعزم الانعطاف حول المحور x^2 وهو تكامل عزم القوة التفاضلية $\sigma^{11}\, dA$ حول المحور x^2 علـــى كامل سطح المقطع (شكل 5-5- b)

$$M^2 = \int_A \sigma^{11} x^3 dA \qquad (5.10)$$



a) القوة الناظمية

b) عزم الانعطاف M^2



d) عزم الفتل M^1

c) عزم الانعطافM^3

شكل 5-5: قوى المقطع المستقلة في مقطع من قضيب إطاري.

وعزم الانعطاف حول المحور x^3 هو تكامل عزم القوى التفاضلية $\sigma^{11} dA$ حول المحور x^3 على كامل سطح المقطع (شكل 5-5-c)

$$M^3 = -\int_A \sigma^{11} x^2 dA \tag{5.11}$$

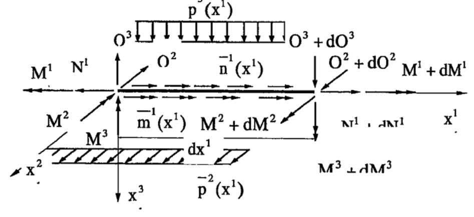
أما عزم الفتل حول المحور x^1 فهو تكامل عزم القوتين التفاضليتين $\sigma^{12} dA$ و $\sigma^{13} dA$ حول المحور x^1 على كامل سطح المقطع (شكل 5-5- d)

$$M^1 = \int_A (-\sigma^{12}x^3 + \sigma^{13}x^2) dA \tag{5.12}$$

أما قوى المقطع المتبقية كقوتي القص Q^2 باتجاه المحور x^2 وQ^3 باتجاه المحور x^3 فهي قوى يمكن حسابها من عزوم المقطع السابقة كما سنرى عند كتابة معادلات التوازن. وفيما يلي سنستعرض معادلات نظرية المرونة لحالة قضيب إطاري فراغي.

5-2- معادلات نظرية المرونة:

5-2-1- معادلات التوازن:



شكل5-6: عنصر تفاضلي مقتطع من قضيب إطاري فراغي (قوى المقطع، الحمولات الخارجية).

لنقتطع من قضيب إطاري فراغي عنصرا تفاضليا بطول $d\,x^1$ تؤثر عليه القوى الخارجية الموزعة $\bar{n}(x^1), \bar{p}^2(x^1), \bar{p}^3(x^1)$ وعزوم الفتل الخارجية الموزعة $\bar{m}^1(x^1)$. نختار الاتجاه الموجب لقوى المقطع $N^1, Q^2, Q^3, M^1, M^2, M^3$ كما في مقاومة المواد معاكسة للمحاور الإحداثية في جزء المقطع اليساري، ولذلك تكون الاتجاهات الموجبة لنفس القوى بعد تزايدها بمقدار تفاضلي على جزء المقطع اليميني موافقة للمحاور الإحداثية حسب قانون التأثير المتبادل. ومعادلات توازن مساقط القوى باتجاه المحاور الإحداثية x^1, x^2, x^3 هي على التوالي:

$$\begin{aligned}
&N^1 + dN^1 - N^1 + \bar{n}^1(x^1).dx^1 = 0\\
&Q^2 + dQ^2 - Q^2 + \bar{p}^2(x^1).dx^1 = 0 \qquad (5.13)\\
&Q^3 + dQ^3 - Q^3 + \bar{p}^3(x^1).dx^1 = 0
\end{aligned}$$

ومعادلات توازن العزوم حول المحاور الإحداثية x^1, x^2, x^3 في نقطة مركز العنصر التفاضلي:

$$\begin{aligned}
&M^1 + dM^1 - M^1 + \bar{m}^1(x^1).dx^1 = 0\\
&M^2 + dM^2 - M^2 - Q^3\frac{dx^1}{2} - (Q^3 + dQ^3).\frac{dx^1}{2} = 0 \qquad (5.14)\\
&M^3 + dM^3 - M^3 + Q^2\frac{dx^1}{2} + (Q^2 + dQ^2).\frac{dx^1}{2} = 0
\end{aligned}$$

وبإهمال الحدود التي تحتوي على مربعات التفاضل نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned}
&\frac{dN^1}{dx^1} = -n^1(x^1) \qquad && \frac{dM^1}{dx^1} = -\bar{m}^1(x^1)\\
&\frac{dQ^2}{dx^1} = -\bar{p}^2(x^1) && \frac{dM^2}{dx^1} = Q^3 \qquad (5.15)\\
&\frac{dQ^3}{dx^1} = -\bar{p}^3(x^1) && \frac{dM^3}{dx^1} = -Q^2
\end{aligned}$$

باشتقاق المعادلتين الخامسة والسادسة من العلاقة السابقة بالنسبة لـــ x^1 وتعويض المعادلتين الثانيــة والثالثة على الترتيب في المعادلتين الناتجتين عن الاشتقاق نحصل على معادلات التوازن التالية لقوى المقطع المستقلة:

$$\frac{dN^1}{dx^1} = -\overline{n}^1(x^1)$$

$$\frac{d^2M^2}{(dx^1)^2} = -\overline{p}^3(x^1)$$

$$\frac{d^2M^3}{(dx^1)^2} = \overline{p}^2(x^1) \qquad (5.16)$$

$$\frac{dM^1}{dx^1} = -\overline{m}^1(x^1)$$

5-2-2- علاقات التشوهات - الانتقالات:

تتمثل علاقات التشوهات - الانتقالات للحالة المدروسة بثلاث علاقات تحـــــدد جـــزء موتـــرة التشوهات (5.6) وهي لحالة السلوك الهندسي الخطي كمايلي:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x^1}$$
$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right) \qquad (5.17)$$
$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1}\right)$$

نكتب الآن التشوه الناظمي ε_{11} بدلالة عناصر شعاع الانتقالات (5.4). فنجد باستخدام المعادلـة الأولى من العلاقات (5.1) والمعادلات (5.2),(5.3) أن:

$$\varepsilon_{11}=\frac{du_1^0}{dx^1}-x^2\frac{d^2u_2^0}{(dx^1)^2}-x^3\frac{d^2u_3^0}{(dx^1)^2} \qquad (5.18)$$

التشوهات العرضية ε_{12} و ε_{13} تكتب بدلالة عناصر شعاع الانتقالات (5.4) وذلك باســـتخدام كافة معادلات العلاقات (5.1) والمعادلات (5.2) , (5.3) بالشكل:

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}(-\varphi_3+\frac{du_0^2}{dx^1}-x^3.\frac{d\varphi_1}{dx^1})=\frac{1}{2}(-x^3.\frac{d\varphi_1}{dx^1}) \qquad (5.19)$$

$$\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}(\varphi_2+\frac{du_0^2}{dx^1}+x^2.\frac{d\varphi_1}{dx^1})=\frac{1}{2}(x^2.\frac{d\varphi_1}{dx^1}) \qquad (5.20)$$

بتجميع العلاقات (5.18), (5.19), (5.20) نحصل على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x^3 & -x^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{-x^3}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{du^0{}_1}{dx^1}\\ -\frac{d^2u^0{}_3}{(dx^1)^2}\\ \frac{d^2u^0{}_2}{(dx^1)^2}\\ \frac{d\varphi_1}{dx^1}\end{bmatrix} \qquad (5.21)$$

$$\varepsilon_{1i}=\bar{X}^{j}_{1i}\ \chi_j$$

حيث χ_j شعاع مشتقات انتقالات نقطة مركز ثقل المقطع.

5-2-3- قانون السلوك:

تمثل علاقات الإجهادات-التشوهات للحالة المدروسة بثلاث علاقات أيضا تحدد جـــزء موتـــرة الإجهادات (5.7) وهي لحالة السلوك الفيزيائي الخطي:

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{1+\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1+\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} \qquad (5.22)$$

$$\sigma^{1i} = C^{1i1j}.\varepsilon_{1j}$$

5-2-4- علاقات قوى المقطع - الانتقالات:

نحصل على قوى المقطع-الانتقالات بإجراء تكاملات الإجـــهادات ,(5.10), (5.11), (5.12), (5.9) بعد تعويض جزء موترة الإجهادات في العلاقات (5.22) بمكافئة من العلاقـــات (5.21) وهي كالتالي:

$$\begin{bmatrix} N^1 \\ M^2 \\ M^3 \\ M^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du^0{}_1}{dx^1} \\ -\frac{d^2u^0{}_3}{(dx^1)^2} \\ \frac{d^2u^0{}_2}{(dx^1)^2} \\ \frac{d\varphi_1}{dx^1} \end{bmatrix} \qquad (5.23)$$

$$M^i = E^{ij}\chi_j$$

حيث I_3, I_2 عزوم عطالة المقطع حول المحورين x^3, x^2 على التوالي وI_D عزم العطالة القطبي له:

$$I_2 = \int_A (x^3)^2 dA$$

$$I_3 = \int_A (x^2)^2 dA \tag{5.24}$$

$$I_D = \int_A [\ (x^2)^2 + (x^3)^2]\ dA = \int_A r^2 dA$$

والتكاملات:

$$\int_A x^2 dA = \int_A x^3 dA = 0 \tag{5.25}$$

معدومة لافتراضنا منذ البداية أن المحاور x^3, x^2 هي محاور تناظر أو محـــاور العطالـــة الرئيســـية للمقطع. أما المعامل G فهو المعامل المعروف في مقاومة المواد كمعامل القص للمادة ويساوي:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{5.26}$$

5-2-5- المعادلات التفاضلية للمسألة :

تتشكل المعادلات التفاضلية التي تحكم المسألة المطروحة بتطبيق الاشتقاقات (5.16) على قـــوى المقطع من العلاقات (5.23) فنحصل على المعادلات التفاضلية التالية:

$$EA \frac{d^2 u_1^0}{(dx^1)^2} = -\overset{-1}{n}(x^1)$$

$$EI_2 \frac{d^4 u_3^0}{(dx^1)^4} = \overline{p}^3 (x^1) \tag{5.27}$$

$$EI_3 \frac{d^4 u_2^0}{(dx^1)^4} = \overline{p}^2 (x^1)$$

$$GI_D \frac{d^2 \varphi_1}{(dx^1)^2} = -\overline{m}^1 (x^1)$$

وهنا نلاحظ أن المعادلات التفاضلية تحوي في ضمنها كل علاقات الوسط الإنشائي أي علاقــات التشوهات–الانتقالات وقانون السلوك ومعادلات التوازن. والحلول الكلاسيكية تعتمد على إيجـاد حلول هذه المعادلات وتحدد ثوابت الحل بحيث تتحقق الشروط الطرفية الكينماتيكية والميكانيكية. ونحن هنا لسنا بصدد دراسة مثل هذه الحلول وإنما ندرس الطرق المتغيراتية في إيجاد حلول هـــــذه المعادلات.

5–3– مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري:

بعد هذا الاستعراض المفصل للمجاهيل الستاتيكية والكينماتيكية المؤثرة في حالة قضيب إطـــــاري مقتطع من منشأ إطاري نستطيع كتابة مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري لحالة الإطارات الفراغية تحت الشروط المفترضة أثناء استعراض المسألة، وذلك بتبديل موترة التشوهات العامة ε_{ij} بجزئها ε_{1i} المحدد في العلاقة (5.6) ومعاملات الصلابة العامة C^{ijkl} بجزئها C^{1i1j} وبعد أخـــذ الافتراضـــات الواردة في بداية هذا الفصل بعين الاعتبار يأخذ مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري بالشكل:

$$\pi = \sum_e \left(\frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{1i} c^{1i1j} \varepsilon_{1j} dv - \int_0^l \overline{p}^i u^0{}_i dl - \sum_m \overline{F}^{l(p)} u^0{}_{l(p)} \right) \tag{5.28}$$

$$\delta\pi = 0 \tag{5.29}$$

حيث:

$\sum_{e}$: المجموع على كامل عناصر المنشأ الإطاري.

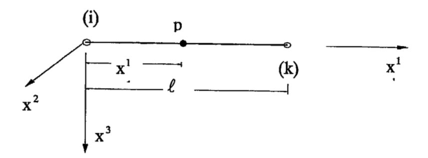
$\overline{F}^{l(p)}$: القوة الخارجية المركزة في الاتجاه l للمحور الإحداثي (بما فيها القوة الخارجية المركـزة) وm هي العقدة التي تؤثر فيها القوة.

$\sum_{m}$: المجموع على العقد المحملة بقوة مركزة أو بعزم مركز.

$u^{0}_{l(p)}$: شعاع انتقالات العقدة المحملة بقوى خارجية (انتقالات ودورانات).

إن الحد الأول من العلاقة (5.28) يمثل طاقة التشوه الداخلي والحد الثاني منها يمثل عمل القـوى الخارجية الموزعة أما الحد الخير فيمثل عمل القوى الخارجية المركزة والعزوم الخارجية المركزة.

5-4- عنصر منتهي إطاري فراغي-نموذج الانتقالات:



شكل 5-7 : قضيب من إطار فراغي كعنصر منتهي ، الجملة الإحداثية

لنقتطع من منشأ إطاري عنصراً منتهياً طوله l وعقدتيه الطرفيتين (i),(k) (شكل 5-7). لكـل عقدة من عقدتيه ست درجات حرية وهي ثلاثة انتقالات في اتجاه المحاور الإحداثية الثلاثة وثلاثـة دورانات حولها. إذاً عدد الثوابت الاختيارية التي يمكن تعيينها هي اثنا عشر ثابتاً اختيارياً وهو مـا يجب أن يحتويه التابع التقريبي للانتقالات. نفترض التابع التقريبي لشعاع الانتقالات (5.4) لنقطـة من محور الجائز تبعد عن العقدة (i) بمقدار x^1 بالشكل:

$$\begin{bmatrix} u_2^0 \\ u_2^0 \\ u_2^0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x^1 & (x^1)^2 & (x^1)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^1 & (x^1)^2 & (x^1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix}$$

$$u^0{}_i = x^n{}_i \, . \, c_n \qquad i=1,2,3,4 \qquad c_n = c_0 \, , c_1 \, , \qquad (5.30)$$

هذه التوابع يجب أن تعطي انتقالات العقدتين (k),(i) عند تعويض إحداثياهما فيها. بتعويـــض إحداثيات العقدتين (k),(i) مع مراعاة العلاقتين (5.2), (5.3) نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\begin{bmatrix} u_1^0{}_{(i)} \\ u_2^0{}_{(i)} \\ u_3^0{}_{(i)} \\ \varphi_{1(i)} \\ \varphi_{2(i)} \\ \varphi_{3(i)} \\ u_1^0{}_{(k)} \\ u_2^0{}_{(k)} \\ u_3^0{}_{(k)} \\ \varphi_{1(k)} \\ \varphi_{2(k)} \\ \varphi_{3(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & l^2 & l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & l^2 & l^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2l & 3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix}$$

$$u^0{}_{l(p)} = A^n{}_{l(p)} \, c_n \qquad l=1,2,.....,6 \qquad (p) = (i),(k) \qquad n= 0,1,......,11$$

(5.31)

إن ترتيب أسطر المصفوفة للحصول على الثوابت المجهولة غير مناسب لإجراء عمليـــة معكـــوس مصفوفة ويمكن ترتيبها بشكل مناسب بتبديل الأسطر ببعضها البعض، والأنسب من ذلك تجـزيء جملة المعادلات وإيجاد الثوابت كمجموعات فمثلاً c_1 , c_0 متعلقة فقط بـــ $u^0_{1(k)}$, $u^0_{1(i)}$ والثوابت c_2 , c_3 , c_4 , c_5 متعلقة بـــ $u^0_{2(I)}$, $\varphi_{3(I)}$, $u^0_{2(k)}$, $\varphi_{3(k)}$ وهكذا.
وحل جملة المعادلات بالنسبة للثوابت الاختيارية هو:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{l^3} & 0 & \frac{3}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{2}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l^2} & 0 & -\frac{2}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{l^2} & 0 & \frac{2}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{l^2} & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{l^3} & 0 & -\frac{1}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{l^3} & 0 & -\frac{1}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^0_{1(i)} \\ u^0_{2(i)} \\ u^0_{3(i)} \\ \varphi_{1(i)} \\ \varphi_{2(i)} \\ \varphi_{3(i)} \\ u^0_{1(k)} \\ u^0_{2(k)} \\ u^0_{3(k)} \\ \varphi_{1(k)} \\ \varphi_{2(k)} \\ \varphi_{3(k)} \end{bmatrix}$$

$$c_n = B^{l(p)}{}_n \, u_{l(p)} \qquad p=1,2,\ldots\ldots,6 \quad (p)=(i),(k) \qquad n=0,1,\ldots,11 \tag{5.32}$$

نحصل على توابع الشكل الممثلة للتوابع التقريبية المفترضة بتعويض الثوابت الاختيارية من العلاقـــة السابقة في العلاقة (5.30):

$$\begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ \varphi_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1^4 & 0 & 0 & 0 & h_2^4 l & 0 & h_3^4 & 0 & 0 & 0 & h_4^4 l \\ 0 & 0 & h_1^4 & 0 & -h_2^4 l & 0 & 0 & 0 & h_3^4 & 0 & -h_4^4 l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1(i)}^0 \\ u_{2(i)}^0 \\ u_{3(i)}^0 \\ \varphi_{1(i)} \\ \varphi_{2(i)} \\ \varphi_{3(i)} \\ u_{1(k)}^0 \\ u_{2(k)}^0 \\ u_{3(k)}^0 \\ \varphi_{1(k)} \\ \varphi_{2(k)} \\ \varphi_{3(k)} \end{bmatrix}$$

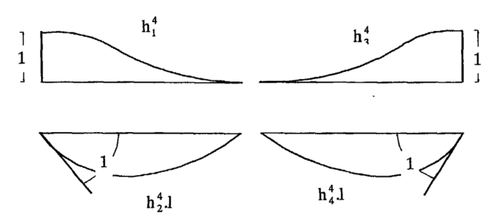
$$u^0{}_i = x^n{}_i B^{l(p)}{}_n u_{l(p)}$$

$$= N^{l(p)}{}_i u_{l(p)} \qquad l=1,2, \dots ,6 \quad (p) = (i) , (k)$$

حيث:

$$\begin{aligned} h_1^2 &= 1-\frac{x^1}{l} \quad ; & h_2^2 &= \frac{x^1}{l} \\ h_1^4 &= 1-3\frac{(x^1)^2}{l}+2\frac{(x^1)^3}{l^3} \quad ; & h_2^4 &= \frac{x^1}{l}-2\frac{(x^1)^2}{l^2}+\frac{(x^1)^3}{l^3} \qquad (5.34) \\ h_3^4 &= 3\frac{(x^1)^2}{l^2}-2\frac{(x^1)^3}{l^3} \quad ; & h_4^4 &= -\frac{(x^1)^2}{l^2}+\frac{(x^1)^3}{l^3} \end{aligned}$$

وهذه التوابع معروفة بكثيرات حدود هيرميت (HERMITE) وكثيرا الحدود الأول والثاني همـــا من المرتبة الثانية وهما ممثلان في الشكل (4-6) أما كثيرات الحدود الأخرى فهي من المرتبة الرابعـة (مرتبة كثيرات حدود Hermite) وهي ممثلة في الشكل 5-8.



شكل 5-8: كثيرات حدود Hermite

من الواضح أن هذه التوابع تحقق خاصية كونها مساوية للواحد في العقدة المعتبرة وللصفر في العقــد الأخرى.

بتقييم شعاع مشتقات التوابع التقريبية للانتقالات الوارد في العلاقة (5.21) نجد أن:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_1^0}{dx^1} \\ -\dfrac{d^2u_3^0}{(dx^1)^2} \\ \dfrac{d^2u_2^0}{(dx^1)^2} \\ \dfrac{d\varphi_1}{dx^1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^{2'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2^{2'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_1^{4''} & 0 & h_2^{4''}l & 0 & 0 & 0 & -h_3^{4''} & 0 & h_4^{4''}l & 0 \\ 0 & h_1^{4''} & 0 & 0 & 0 & h_2^{4''}l & 0 & h_3^{4''} & 0 & 0 & 0 & h_4^{4''}l \\ 0 & 0 & 0 & h_1^{2'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2^{2'} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1(i)}^0 \\ u_{2(i)}^0 \\ u_{3(i)}^0 \\ \varphi_{1(i)} \\ \varphi_{2(i)} \\ \varphi_{3(i)} \\ u_{1(k)}^0 \\ u_{2(k)}^0 \\ u_{3(k)}^0 \\ \varphi_{1(k)} \\ \varphi_{2(k)} \\ \varphi_{3(k)} \end{bmatrix}$$

$$= Nd_i^{l(p)} u_{l(p)} \qquad (5.35)$$

تحسب موتّرة التشوهات المختصرة (5.21) لنقطة لاعلى التعيين من قضيــب الإطــار الفراغــي بتعويض (5.35) في (5.21):

$$\varepsilon_{1j} = \bar{x}^{t}_{1j} \quad Nd^{l(p)}_{t} \quad u_{l(p)} \tag{5.36}$$

حيث $\bar{x}^{t}_{1j}$ هي المصفوفة المعطاة في العلاقة (5.21) وتحتوي على ثلاثة أسطر وأربع أعمدة. يمكن الآن تقييم طاقة التشوه الداخلي من إطار فراغي وهي تساوي:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{1i} C^{1i1j} \varepsilon_{1j} dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l u_{s(q)} \, Nd^{s(q)}_{r} [\int_A (\bar{x}^{r}_{1i} C^{1i1j} \bar{x}^{t}_{1j}) dA] \, Nd^{l(p)}_{t} \, u_{l(p)} dx^1 \tag{5.36}$$

$$= \frac{1}{2} u_{s(q)} (\int_0^l Nd^{s(q)}_{r} \, E^{rt} \quad Nd^{l(p)}_{t} \, dx^1) u_{l(p)} \tag{5.37}$$

$$= \frac{1}{2} u_{s(q)} k^{s(q)l(p)} u_{l(p)}$$

حيث:

$$E^{rt} = \int_0^A \bar{x}^{r}_{1i} c^{1i1j} \bar{x}^{t}_{1j} d \quad A \tag{5.38}$$

مصفوفة تحوي على أربع أسطر وأربع أعمدة وهي مكافئة لمثيلتها في العلاقة (5.23) اما المصفوفة:

$$k^{s(q)l(p)} = \int_0^l Nd^{s(q)}_{r} \, E^{rt} \quad Nd^{l(p)}_{t} \, dx^1 \tag{5.39}$$

فهي مصفوفة القساوة للعنصر المنتهي. بعد إنجاز الجداء المصفوفي الوارد في العلاقة (5.39) والتكاملات التفصيلية لعناصر المصفوفة الناتجة عن هذا الجداء نحصل على عناصر مصفوفة القساوة للعنصر المنتهي الإطاري الفراغي .

ومصفوفة القساوة هذه متناظرة وتحتوي على أربعة مصفوفات جزئية، كل منها تحتوي على (6×6) عنصراً. ويمكن تفسير عناصرها أيضاً كقوى موافقة لانتقال مساوٍ لواحدة الانتقالات (الانتقالات والدورانات) بشكل مماثل لما ورد في الفقرة (4-3). إذ يكفي أن نعطي لجائز موثوق في عقدتيه (i),(k) انتقالاً في العقدة (i) باتجاه المحاور x^1, x^2, x^3 ودوراناً حول المحاور نفسها

وحساب قوى الوثاقة في (i),(k) للتأكد من ذلك، وكذلك الأمر بالنسبة للعقـــدة (k).وتعطـــى مصفوفة القساوة تفصيلياً كالتالي:

$$k^{s(q)l(p)} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_3}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_3}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_2}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_2}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_2}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GI_D}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_D}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_2}{l^2} & 0 & \frac{4EI_2}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{l^2} & 0 & \frac{2EI_2}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_3}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{l} & 0 & -\frac{6EI_3}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{l} \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI_3}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{l^2} & 0 & \frac{12EI_3}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{l^2} \\
0 & 0 & -\frac{12EI_2}{l^3} & 0 & \frac{6EI_2}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_2}{l^3} & 0 & \frac{6EI_2}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GI_D}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_D}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_2}{l^2} & 0 & \frac{2EI_2}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{l^2} & 0 & \frac{4EI_2}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_3}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_1}{l} & 0 & -\frac{6EI_3}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{l}
\end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} k^{s(i)q(i)} & k^{s(i)q(k)} \\ k^{s(k)q(i)} & k^{s(k)q(k)} \end{bmatrix} \qquad (5.40)$$

بإنجاز التكاملات:

$$\pi_a = \int_0^l \bar{p}^i u_i^0 dx^l = \int_0^l \bar{p}^i N_i^{l(p)} u_{l(p)} = \bar{f}^{l(p)} u_{l(p)} \qquad (5.41)$$

حيث:

$$\bar{f}^{l(p)} = \int_0^l \bar{p}^i N_i^{l(p)} dx^l, \bar{p}^i = \left\{ \bar{p}^1 \ \bar{p}^2 \ \bar{p}^3 \ \bar{m}^1 \right\} \qquad (5.42)$$

نحصل على القوى المركزة على العقد المكافئة للحمولات الموزعة.

$$\bar{f}^{l(p)} = \left[\bar{p}^1\frac{l}{2} \ \ \bar{p}^2\frac{l}{2} \ \ \bar{p}^3\frac{l}{2} \ \ \bar{m}^1\frac{l}{2} \ \ -\bar{p}^3\frac{l^2}{12} \ \ \bar{p}^2\frac{l^2}{12} \ \ \bar{p}^1\frac{l}{2} \ \ \bar{p}^2\frac{l}{2} \ \ \bar{p}^3\frac{l}{2} \ \ \bar{m}^1\frac{l}{2} \ \ \bar{p}^3\frac{l^2}{12} \ \ -\bar{p}^2\frac{l^2}{12} \right] \qquad (5.43)$$

ويلاحظ أنها مكافئة للقوى التي تحصل في قضيب موثوق من الطرفين معرّض لتأثـــير الحمـــولات الخارجية الموزعة. في العلاقات السابقة يجب عدم الخلط بين l المستخدمة للتعبير عن الطـــول وl المستخدمة كقرينة.

قبل الجمع على كامل المنشأ لابد من تحويل تعابير الطاقة السابقة إلى جملة محاور إحداثية عامـــــة. ولتكن هذه الجملة $(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}})$ أشعتها الواحدية $(e_{\bar{1}}, e_{\bar{2}}, e_{\bar{3}})$. كما يوضح الشـكل (5-7). نسب العنصر المنتهي إلى جملة إحداثية خاصة مركزها في الطرف (i) من العنصر ومحورهـــا x^1 منطبق على محور العنصر واتجاهه الموجب من (i) إلى (k) وبالتالي يمكن حساب مركبـــات شعاع الواحدة e_1 على هذا المحور. لابد أيضاً لتحديد الجملة الخاصة من تحديد محور آخر وليكـــن المحور x^2 وذلك إما بإعطاء نقطة واقعة عليه في الاتجاه الموجب وعندها يكون من الســـهل أيضـاً تحديد شعاع الواحدة عليه e_2 أو إعطاء نقطة في المستوي x^1x^2 في الاتجاه الموجب للمحـــور x^2 وعندها يجب اللجوء إلى مبادىء الهندسة التحليلية لتعيين شعاع الواحدة e_2. أما الشعاع الثـالث فيتعين باعتبار الثلاثية (e_1, e_2, e_3) ثلاثية قائمة ويكون $(e_3 = e_1 \times e_2)$.

بعد تحديد الجملتين نجري انسحاباً للجملة $(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}})$ بحيث ينطبق مركزها علـــى مركـز المقطع في (i) ومركبات هذا الانسحاب:

$$\begin{aligned} x^{\bar{1}} &= x^{\bar{1}}(i) \\ x^{\bar{2}} &= x^{\bar{2}}(i) \\ x^{\bar{3}} &= x^{\bar{3}}(i) \end{aligned} \qquad (5.44)$$

يمكن الآن التعبير عن انتقال العقدة (i) في الجملتين بشعاع المكان:

$$\vec{r}(i) = u^0_{i(i)} e^i = u^0_{\bar{i}(i)} e^{\bar{i}} \qquad (5.45)$$

حيث $u^0_{i(i)}$ ، $u^0_{\bar{i}(i)}$ انتقالات العقدة (i) باتجاه المحاور الإحداثية الثلاثة على التوالي في الجملتـين الخاصة والعامة. $e^{\bar{i}}$ ، e^i هي الأشعة الواحدية لجملتي إحداثيات ضدية منطبقة على الجملتـين الأساسيتين الخاصة والعامة المعرفتين هنا. بضرب العلاقة (5.45) سلمياً بـــ e_j نحصل على:

$$u^0_{i(i)} e^i e_j = u^0_{i(i)} \delta^i_j = u^0_{j(i)} = u^0_{\bar{i}(i)} e^{\bar{i}} e_j = u^0_{\bar{i}(i)} T^{\bar{i}}_j \qquad (5.46)$$

والعلاقة التفصيلية هي:

$$\begin{bmatrix} u^0_{1(i)} \\ u^0_{2(i)} \\ u^0_{3(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\bar{1}}.e_1 & e^{\bar{2}}.e_1 & e^{\bar{3}}.e_1 \\ e^{\bar{1}}.e_2 & e^{\bar{2}}.e_2 & e^{\bar{3}}.e_2 \\ e^{\bar{1}}.e_3 & e^{\bar{2}}.e_3 & e^{\bar{3}}.e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^0_{\bar{1}(i)} \\ u^0_{\bar{2}(i)} \\ u^0_{\bar{3}(i)} \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

وفي كثير من المصادر العلمية يتم تحويل الدورانات أيضاً باستخدام نفس مصفوفة التحويل هـــذه أي:

$$\varphi_{j(i)} = \varphi_{\bar{i}(i)} T^{\bar{i}}_j \tag{5.48}$$

وتحويل انتقالات ودورانات العقدة (k) يتم أيضاً باستخدام نفس التحويل السابق. وتصبح طاقـــة التشوه الداخلي (5.38) بدلالة شعاع الانتقالات في المحاور الإحداثية العامة $u_{\bar{l}(p)}$:

$$\pi_i = \frac{1}{2} u_{\bar{s}(q)} T^{\bar{s}}_s k^{s(q)l(p)} T^{\bar{l}}_l u_{\bar{l}(p)}$$

$$\pi_i = \frac{1}{2} u_{\bar{s}(q)} k^{\bar{s}(q)\bar{l}(p)} u_{\bar{l}(p)} \tag{5.49}$$

حيث:

$$k^{\bar{s}(q)\bar{l}(p)} = T^{\bar{s}}_s k^{s(q)l(p)} T^{\bar{l}}_l \tag{5.50}$$

مصفوفة القساوة في المحاور الإحداثية العامة. وعمل القوى الخارجية المركزة على العقد المكافئـــة للحمولات الخارجية الموزعة ضمن العنصر يصبح بدلالة شعاع الانتقالات $u_{\bar{l}(p)}$ مكافئاً لـــ:

$$\pi_a = \bar{f}^{l(p)} \ T^{\bar{l}}_l u_{\bar{l}(p)} = \bar{f}^{\bar{l}(p)} \ u_{\bar{l}(p)} \tag{5.51}$$

حيث:

$$\bar{f}^{\bar{l}(p)} = \bar{f}^{l(p)} \ T^{\bar{l}}_l \tag{5.52}$$

يتم تحويل الحد الأخير من العلاقة (5.28) والموافق لعمل القوى الخارجية المركزة كما في العلاقـــة (5.51):

$$\bar{f}^{l(p)} \ u^0_{l(p)} = \bar{f}^{l(p)} T^{\bar{l}}_l u_{\bar{l}(p)} = \bar{f}^{\bar{l}(p)} \ u_{\bar{l}(p)} \tag{5.53}$$

والآن نستطيع الجمع على كامل المنشأ للحصول على الطاقة الكامنة للمنشأ:

$$\pi = \sum_e \left(\frac{1}{2} u_{\bar{s}(q)} k^{\bar{s}(q)\bar{l}(p)} u_{\bar{l}(p)} - \bar{f}^{\bar{l}(p)} \ u_{\bar{l}(p)}\right) - \sum_m \bar{F}^{\bar{l}(p)} \ u_{\bar{l}(p)} \tag{5.54}$$

بعد هذا التجميع نحصل على علاقة شبيهة بـــ (5.41) وشكلها بعد تجميع القرائـــن في العلاقـــة السابقة كالتالي:

$$\pi = \frac{1}{2} u_{\bar{s}(n)} k^{\bar{s}(n)\bar{l}(n')} u_{\bar{l}(n')} - \bar{f}^{\bar{l}(n)} u_{\bar{l}(n)} \quad (n),(n'=1,2,3,...\text{ عدد عقد المنشأ}) \quad (5.55)$$

حيث $k^{\bar{s}(n)\bar{l}(n')}$ مصفوفة القساوة العامة للمنشأ و $u_{\bar{l}(n')}$ شعاع الانتقالات لكامل عقد المنشـــأ.

بعد أخذ المتغير الأول ومساواته بالصفر وفق مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري نحصـــل علـــى جملـــة المعادلات الخطية التالية:

$$k^{\bar{s}(n)\bar{l}(n')} u_{\bar{l}(n')} = \bar{f}^{\bar{l}(n)} \quad (5.56)$$

بتعويض الشروط الطرفية للانتقالات وحل المعادلات الناتجة نحصل على شعاع انتقـــالات العقـــد المجهولة للمنشأ. بعد ذلك يمكن تحديد حالة التشوهات في أية نقطة من المقطع باستخدام العلاقتـين (5.21)، (5.35) أو الحالة الاجهادية باستخدام (5.22),(5.21),(5.35) أو تحديد قوى المقطـع باستخدام العلاقة(5.23),(5.35).

أما بالنسبة لحالة المؤثرات الخارجية الأخرى كالحرارة وهبوط المساند ووجود النوابض فيتم التعامل معها بطريقة مشابهة للتي استعرضت في الفقرة (4–4) بالطبع مع وجود فارق في درجات الحريـــة إذ أن شعاع الانتقالات هنا يحتوي بالإضافة إلى الانتقالات الدورانات أيضاً.

5–5– عنصر منتهي إطاري فراغي – النموذج الهجين:

تنطلق هذه الطريقة كما ذكر في الفصل الثالث من مبدأ الطاقة المتممة المعدل الذي يحوي كتوابـــع افتراضية على الإجهادات ضمن الوسط المدروس إضافةً إلى الانتقالات على جزء السطح الـــــذي تكون فيه الإجهادات معلومة وقد طور هذا المبدأ البروفيسور T. H. H. Piah وطبقه على حـــل مسائل البلاطات بغية التغلب على متطلبات شروط اســـتمرارية مشـــتقات توابـــع الانتقـــالات الافتراضية على الأطراف الفاصلة بين العناصر المنتهية عند استخدام نموذج الانتقالات.

في هذه الفقرة سيطبق المبدأ السابق على الإطارات الفراغية بغرض تعليمي بحت علماً أن العنصــــر المطور هنا يحقق نتائج مرضية أكثر بكثير من مثيله نموذج الانتقالات الذي عرض في الفقـــرة (5–

3). إذ أن العنصر نموذج الانتقالات لايستطيع تجسيد الشكل البياني لتوابع قوى المقطع إذا ما كانت عناصر المنشأ محملة بحمولات موزعة وتظهر أخطاؤه فادحةً في حسابات القوى القاصة والتي قد تصل إلى (50%).

وسوف نستعرض استخدام هذا المبدأ بدءاً من تحويل مبدأ الطاقة المتممة المعدل(3.78),(3.79) المعطى في هاتين العلاقتين للجسم الفراغي أو الوسط الإنشائي المستمر إلى الشكل الذي يمكن استخدامه فيه على الوسط المقسم إلى عناصر منتهية وحتى الشكل المناسب للاستخدام على المسائل وحيدة البعد.

5-5-1- الطاقة المتممة المعدلة لوسط مقسم إلى عناصر منتهية:

يعطى مبدأ الطاقة المتممة المعدل بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\delta\pi_{ch} = \delta\left\{\frac{1}{2}\int_V \sigma^{ij} S_{ijkl} \sigma^{kl} dV - \int_{s_v} T^i \bar{u}_i ds - \int_{s_\sigma} (T^i - \bar{T}^i) u_i ds\right\} = 0; \quad T^i = \sigma^{ij} n_j \qquad (5.57)$$

بعد تقسيم الجسم أو الوسط الإنشائي إلى عناصر منتهية يمكن ان نعتبر أن جزء السطح الذي تكون فيه الانتقالات معلومة S_u للعنصر المنتهي مؤلف من مجموع سطحين، السطح الأول " هو السطح الحقيقي " للعنصر S^e_u والسطح الثاني هو سطح العنصر الطرفي المجاور لعناصر منتهية أخرى $S^{b,e}_u$ ونعتبر أيضاً أن السطح الذي تكون فيه الإجهادات أو القوى معلومة S_σ هو مجموع سطحين السطح الأول هو السطح الحقيقي للعنصر S^e_σ والسطح الثاني هو سطح العنصر الطرفي المجاور لعناصر منتهية أخرى $S^{b,e}_\sigma$.عندها يأخذ مبدأ الطاقة المتممة المعدل للوسط المقسم بعد استخدام الحرف p للدلالة على القوى الطرفية بدلاً من T الشكل التالي* :

* استخدام الحرف هنا للدلالة على أطراف العنصر المنتهي وليس كقرينة ، ولايتم الجمع عليه.

$$\delta\pi_{ch} = \delta\{\sum_e [\frac{1}{2}\int_V \sigma^{ij} s_{ijkl}\sigma^{kl} dV - \int_{s_u^e} p_e^i \bar{u}_i^e ds - \int_{s_u^{b,e}} p_{b,e}^i \bar{u}_i^{b,e} ds$$

$$- \int_{s_\sigma^e} (p_e^i - \bar{p}_e^i) u_i^e ds] - \int_{s_\sigma^b} (\Delta p_b^i - \bar{p}_b^i) u_i^b ds\} = 0 \tag{5.28}$$

$\sum_e$: تعني الجمع على كامل عناصر الجسم أو الوسط المدروس.

S^b_σ : وتعني مجموع السطوح الفاصلة بين العناصر المنتهية المجاورة لبعضها البعض والتي تكون فيها الإجهادات معلومة.

$\Delta P^i_b = P^i_{b,e} + P^i_{b,e+1}$: هي القوى في السطوح S^b_σ الناتجة عن توابع الإجهادات المفترضة بتعويض معادلات السطوح الطرفية فيها وذلك للعنصرين المتجاورين e+1, e.

$\bar{p}^i_b$: هي القوى الخارجية المعلومة التي تؤثر في السطوح S^b_σ. على السطح الفاصل بين عنصرين متجاورين e+1,e والذي تكون فيه القوى معلومة سوف توزع القوى الخارجية بشكل اعتباطي بحيث يكون: $\bar{p}^i_b = p^i_{b,e} + \bar{p}^i_{b,e+1}$ عندها يأخذ الحد الأخير من المعادلة (5.58) الشكل:.

$$\int_{s_\sigma^b} (\Delta p_b^i - \bar{p}_b^i) u_i^b ds = \int_{s_\sigma^b} (p_{b,e}^i - \bar{p}_{b,e}^i) u_i^b ds + \int_{s_\sigma^b} (p_{b,e+1}^i - \bar{p}_{b,e+1}^i) u_i^b ds$$

$$= \sum_e \int_{s_\sigma^{b,e}} (p_{b,e}^i - \bar{p}_{b,e}^i) u_i^{b,e} ds \tag{5.59}$$

وبهذا نستطيع إدخال الحد الأخير ضمن إشارة الجمع وتصبح الطاقة المتممة المعدلة:

$$\delta\pi_{ch} = \delta\{\sum_e [\frac{1}{2}\int_V \sigma^{ij} S_{ijkl}\sigma^{kl} dV - \int_{s_u} p_e^i \bar{u}_i^e ds - \int_{s_u^{b,e}} p_{b,e}^i \bar{u}_i^{b,e} ds$$

$$- \int_{s_\sigma^e} (p_e^i - \bar{p}_e^i) u_i^e ds] - \int_{s_\sigma^{b,e}} (p_{b,e}^i - \bar{p}_{b,e}^i) u_i^{b,e} ds]\} = 0 \tag{5.60}$$

يتبسط هذا المبدأ عند استخدامه على المسائل الوحيدة البعد حيث تكون السطوح الحرة للقضبان أو ما أسميناه السطوح "الحقيقية" خالية من الإجهادات وفق نظرية السطوح الحرة. إذ أن

الحمولات تعتبر وكأنها مطبقة على محاور العناصر ووفق هذه الافتراضات تنعدم التكاملات علـــى السطوح الحرة للعناصر وتبقى التكاملات على أطراف العناصر وبالتالي يكون:

$$\delta\pi_{ch} = \delta\left\{\sum_{e}[\frac{1}{2}\int_{V}\sigma^{ij}S_{ijkl}\sigma^{kl}dV - \int_{s_u^{b,e}}p_{b,e}^{i}\overline{u}_i^{b,e}ds - \int_{s_\sigma^{b,e}}(p_{b,e}^{i} - \overline{p}_{b,e}^{i})u_i^{b,e}ds]\right\} = 0$$

(5.61)

أثناء تطبيق هذا المبدأ يمكن أن نستغني في البداية عن معالجة الانتقالات المعلومة على جزء الســطح $S^{b,e}{}_{u}$ قبل الجمع على كامل المنشأ وتشكيل جملة المعادلات الخطية له ونؤجل معالجتها إلى مــابعد ذلك، في هذه الحالة يكون:

$$\int_{s_u^{b,e}}p_{b,e}^{i}\overline{u}_i^{b,e}ds - \int_{s_u^{b,e}}p_{b,e}^{i}u_i^{b,e}ds = \int_{s}p_{b,e}^{i}u_i^{b,e}ds \qquad (5.62)$$

ويجرى هذا التكامل على كامل السطح الطرفي للعنصر عندها تأخذ العلاقة (5.61) الشكل التالي:

$$\delta\pi_{ch} = \delta\left\{\sum_{e}[\frac{1}{2}\int_{V}\sigma^{ij}s_{ijkl}\sigma^{kl}dV - \int_{s}p_{b,e}^{i}u_i^{b,e}ds + \int_{s_\sigma^{b,e}}\overline{p}_{b,e}^{i}u_i^{b,e}ds]\right\} = 0 \qquad (5.63)$$

5-5-2- خوارزميات الطريقة الهجينة:

إن الحد الأول من العلاقة (5.63) يمثل الطاقة الداخلية المتممة ويحوي على توابع الإجهادات الــتي يمكن اختيارها بدلالة ثوابت يمكن تعيينها من شرط انعدام المتغير الأول للطاقة المتممـــــة المعدلـــة الكلية. توابع الإجهادات لحالة قضيب إطاري فراغي ممثلة بموتّرة الإجهادات المختصرة المعطـــاة في العلاقة (5.28) كما رأينا، ومعاملات الليونة S_{ijkl} تختصر بناءً على الحالة الإجهادية وحالــــة التشوهات الخاصة بهذه الحالة إلى:

$$S_{1i1j} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1+\nu & 0\\0 & 0 & 1+\nu\end{bmatrix} \qquad (5.64)$$

للبدء في معالجة هذه الطريقة يجب افتراض توابع الإجهادات ضمن العنصر المنتـــهي. لكـــن مـــن الواضح لمسألتنا هذه أن الإجهادات ليست ثابتة على ارتفاع المقطع وتتغير بتغير الارتفاع، لذلـــك يستعاض عن افتراض توابع الإجهادات بافتراض توابع قوى المقطع الـــواردة في العلاقـــة (5.23) ولهذا لابد من كتابة تعبير طاقة التشوه الداخلية المتممة بدلالة قوى المقطع . نستخدم لهذا الغـــرض العلاقات (5.21),(5.22),(5.23). في البدء نعبر عن توابع الإجهادات بدلالـــة شـــعاع توابـــع الانتقالات χ وذلك بتعويض العلاقة(5.21) في العلاقة (5.22):

$$\sigma^{1i} = C^{1i1j}\bar{x}^{r}_{1j}\chi_r \qquad (5.65)$$

يعبر عن الشعاع χ_r بدلالة قوى المقطع M^s بإيجاد معكوس العلاقة (5.23)

$$\chi_r = (E^{rs})^{-1}.M^s \qquad (5.66)$$

ومن ثم نعوض العلاقة(5.66) في العلاقة (5.65):

$$\sigma^{1i} = C^{1i1j}\bar{x}^{r}_{1j}(E^{rs})^{-1}.M^s \qquad (5.67)$$

وتصبح طاقة التشوه الداخلية المتممة مكافئة لـــ:

$$\pi^*_i = \frac{1}{2}\int_V \sigma^{1i}S_{1i1k}\sigma^{1k}dV$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 M^s(E^{rs})^{-1}\left(\int_0^A \bar{x}^{r}_{1j}\, C^{1i1j}\, S_{1i1k}\, C^{1k1l}\, \bar{x}^{i}_{1l}\right)dA(E^{nt})^{-1}M^t dx^1 \qquad (5.68)$$

وبملاحظة أن جداء C^{1k1l} ، S^{1i1k} مساوٍ للمصفوفة الواحدية وأن التكامل السطحي المتبقي هـــو نفسه التكامل (5.38) يختصر التعبير السابق إلى:

$$\pi^*_i = \frac{1}{2}\int_0^1 M^i\, S_{ij}\, M^j\, dx^1 \;\; ; \;\; S_{ij} = (E^{ij})^{-1} \qquad (5.69)$$

إن افتراض توابع الإجهادات أو توابع قوى المقطع وتوابع الانتقالات علـــى الأطـــراف يخضـــع لاشتراطات يجب تحققها ونكتفي هنا بذكر هذه الاشتراطات دون برهان:

• يجب أن تحتوي التوابع المفترضة للإجهادات على حدود تمكننا من التمثيل البياني لحالة إجهادات ثابتة.

•يجب أن تسمح توابع الانتقالات المفترضة بحركة المنشأ كجسم صلد.

•عند حصول حركة للمنشأ كجسم صلد يجب أن لايحصل فيه بنتيجة التوابع المفترضة أي قوى داخلية. فهذا الشرط يمكن التحقق منه بإعطاء عنصر منتهي للمنشأ انتقالات موافقة لحركة انسحابية أو دورانية لجسم صلد. ليكن شعاع انتقالات عقد العنصر المعبر عن مثل هذه الحركة $u_{s(q)}$ عندها يجب أن يتحقق:

$$k^{l(p)\,s(q)}\ u_{s(q)} = 0 \qquad (5.70)$$

بالإضافة إلى ذلك يجب أن تتحقق في مستوى كل عنصر المتراجحة التالية:

$$n_{\beta} \geq n_{u} - r \qquad (5.71)$$

حيث: n_{β}: عدد الثوابت الاختيارية لتوابع الإجهادات أو قوى المقطع المفترضة.

n_{u}: عدد درجات الحرية لكامل عقد العنصر.

r: عدد الحركات الصلدة الممكنة للجسم.

وعلى مستوى كامل المنشأ يجب أن يكون:

$$n^{g}_{\beta} \geq n^{g}_{u} \qquad (5.72)$$

n^{g}_{β}: عدد الثوابت الاختيارية لتوابع الإجهادات أو قوى المقطع لكامل عناصر المنشأ.

n^{g}_{u}: عدد درجات الحرية لكامل عقد المنشأ بعد معالجة الشروط الطرفية.

والأهم من ذلك كله هناك شرط يفترضه استخدام مبدأ الطاقة المتممة المعدلة وهو أن تحقق توابع قوى المقطع معادلات التوازن الداخلية ضمن العنصر أي المعادلات (5.16).

كتوابع تقريبية لقوى المقطع نستخدم تلك التي اختارها المؤلف في مقال نشر له في مجلة مهندس البناء الألمانية وهي لحالة الحمولات المبينة في الشكل (5–6):

$$\begin{bmatrix} N^1 \\ M^2 \\ M^3 \\ M^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2EI_2 & -6x^1EI_2 & 0 \\ 0 & 2EI_3 & 6x^1EI_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -x^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{(x^1)^2}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{(x^1)^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p}^1 \\ \overline{p}^2 \\ \overline{p}^3 \\ \overline{m}^1 \end{bmatrix}$$

$$M^i = p^{ik}\ \beta_k + \overline{p}^i_k\ \overline{\beta}^k \qquad (5.73)$$

يلاحظ أن التوابع التقريبية لقوى المقطع مؤلفة من جزء متجانس يحتوي على الثوابت الاختيارية β_k وجزء آخر غير متجانس متعلق بتوابع الحمولات الخارجية المطبقة على العنصر المنتهي $\overline{\beta}^k$. واعتبار حالات التحميل المختلفة للعناصر المنتهية قد يكون شاقاً في معالجة المسائل العامة والمعقدة أكثر كما في حالة المسائل الثنائية البعد، إذ يجب دوماً اختيار توابع تقريبية متعلقة بالحمولات وتحقق بالإضافة إلى ذلك معادلات التوازن على الطرف المنتهي. لحالة العناصر غير المحملة ينعدم الحد الثاني من الطرف الأيمن للمعادلة (5.73) ويقتصر التابع التقريبي لهذه الحالة على الجزء المتجانس.

وسوف يعالج موضوع الحصول على التوابع التقريبية لحالات تحميل مختلفة أو لحالة وجود توابع حمولات لاعلى التعيين في فصل قادم يقترح فيه المؤلف مقاربة جديدة لطريقة العناصر المنتهية- نموذج الانتقالات يتم فيها ربط مباشر بين توابع الانتقالات وتوابع الحمولات.

بالتابع التقريبي لقوى المقطع (5.73) تصبح طاقة التشوه الداخلية المتممة:

$$\pi_i^* = \frac{1}{2}\int_0^1 (p^{ik}\,\beta_k + \bar{p}_k^i\,\bar{\beta}^k)\ S_{ij}\ (p^{jl}\,\beta_l + \bar{p}_l^j\,\bar{\beta}^l)\,dx^1$$

$$= \frac{1}{2}\beta_k H^{kl}\beta_l + \beta_k \bar{H}_l^k \bar{\beta}^l + \bar{\beta}^k \bar{H}_{kl} \bar{\beta}^l \qquad (5.74)$$

حيث:

$$H^{kl} = \frac{1}{2}\int_0^1 p^{ik}\,S_{ij}\,p^{jl}\,dx^1 \qquad (5.75)$$

$$\bar{H}_l^k = \int_0^1 \bar{p}_l^j\,S_{ij}\,p^{jk}\,dx^1 \qquad (5.76)$$

$$\bar{H}_{kl} = \frac{1}{2}\int_0^1 \bar{p}_k^i\,S_{ij}\,p_l^j\,dx^1 \qquad (5.77)$$

المعادلة (5.76) مشكّلة بالأصل من مجموع مضروبين، ويستطيع المرء اختصارهـــا إلى مضـــروب واحد بسبب خاصية التناظر لمجموع المضروبين.

بعد تقييم الحد الأول من الطاقة المتممة المعدلة (5.63) ننتقل إلى تقييم الحد الثاني والذي يمثـــل في الحالة العامة عمل القوى السطحية الطرفية الناتجة من التوابع التقريبية لقوى المقطع ضمن العنصـــر على السطوح الطرفية للعناصر المنتهية. والسطوح الطرفية لحالتنا هذه ليست إلا سطوح المقـــاطع الفاصلة بين العناصر المنتهية المتجاورة وفي العنصر المنتهي (i),(k) تنتج القوى الطرفية $P^i_{b,e}$ مـــن تعويض معادلات المقطعين الطرفيين للعنصر (k) (i) وهـــي $x^1 = 0$ للطـــرف (i) و $x^1 = 1$ للطرف(k) في التوابع التقريبية لقوى المقطع ضمن العنصر (5.73)، وبالتالي يكون:

$$
\begin{bmatrix} -N^1_{(i)} \\ -Q^2_{(i)} \\ -Q^3_{(i)} \\ -M^1_{(i)} \\ -M^2_{(i)} \\ -M^3_{(i)} \\ N^1_{(k)} \\ Q^2_{(k)} \\ Q^3_{(k)} \\ M^1_{(k)} \\ M^2_{(k)} \\ M^3_{(k)} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6EI_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6EI_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI_D \\
0 & 0 & 0 & 2EI_2 & 0 & 0 \\
0 & -2EI_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -6EI_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_D \\
0 & 0 & 0 & -2EI_2 & -6EI_2 l & 0 \\
0 & 2EI_3 & 6EI_3 l & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
.
\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -\frac{l^2}{2} & 0 \\
0 & \frac{l^2}{2} & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bar{p}^1 \\ \bar{p}^2 \\ \bar{p}^3 \\ \bar{m}^1 \end{bmatrix}
$$

$$p^i_{b,e} = R^{ik}.\beta_k + \bar{R}^i_k.\bar{\beta}^k \qquad (5\text{-}78)$$

$u_i^{b,e}$ في الحد الثاني من العلاقة (5-63) هي توابع الانتقالات التي يمكن افتراضها بشكل اختياري و ذلك وفق مبدأ الطاقة المتممة المعدل. هذا الشعاع يختار عادة بدلالة انتقالات العقد و يجب أن يحوي كافة الانتقالات بما فيها الدورانات الموافقة لشعاع قوى المقطع الطرفية $p^i_{b,e}$ الذي أخذت مركباته في العقدة (I) سالبة في العلاقة (5-78) و ذلك لأن هذه القوى معاكسة للانتقالات الموجبة المفترضة. في الحالة العامة تأخذ توابع الانتقالات المفترضة هذه الشكل :

$$u_i^{b,e} = L_i^j.u_j \qquad (5\text{-}79)$$

حيث L_i^j هي توابع الشكل. u_j شعاع انتقالات عقد العنصر و هو مكافئ للشعاع $u^0_{l(p)}$ في العلاقة (5-31) و يحوي لحالتنا هذه على اثنتي عشر درجة حرية و هي الانتقالات و الدورانات باتجاه المحاور الإحداثية الثلاثة للعقدتين (i),(k) على التوالي. و بما أن الشعاع $u_i^{b,e}$ يجب أن يحوي على نفس درجات الحرية ليتوافق مع الشعاع $p^i_{b,e}$ ففي حالتنا هذه تكون توابع الشكل L_i^j هي المصفوفة الواحدية .

يمكن الآن تقييم الحد الآنف الذكر باستخدام العلاقتين (5-78),(5-79) مع الشكل:

$$T_1 = \int_S p^i_{b,e}.u^{b,e}_i.dS = (R^{ik}.\beta_k + \overline{R}^i_k.\overline{\beta}^k)L^j_i.u_j$$
$$= \beta_k.T^{kj}u_j + \overline{\beta}^k.\overline{T}^j_k u_j \tag{5-80}$$

حيث :

$$T^{kj} = R^{ik}.L^j_i \tag{5-81}$$
$$\overline{T}^j_k = \overline{R}^i_k.L^j_i \tag{5-82}$$

$\overline{T}^j_k, T^{kj}$ مطابقتان على التوالي لـ $\overline{R}^i_k, R^{ik}$. و ذلك لأن L^j_i مطابقة للمصفوفة الواحدية في حالة القضيب الإطاري الفراغي .

بقي الآن تقييم الحد الأخير من العلاقة (5-63) حيث تمثل $\overline{p}^i_{b,e}$ قوى خارجية معطاة تؤثر على السطوح $S^{b,e}_\sigma$. و لنعالج في البدء الحالة العامة، التي تكون فيها مثل هذه السطوح محملة بقوى خارجية معلومة شدتها في نقاط مميزة من العنصر المنتهي $\overline{p}^k_{e,b}$ (شدة القوة الخارجية الموزعة مثلا في عقد العنصر المنتهي و في نقاط أخرى كمنتصف العنصر). عندها نستطيع أن نعبر عن تابع الحمولات على العنصر بالشكل:

$$\overline{p}^i_{b,e} = A^i_k.\overline{p}^k_{e,b} \tag{5-83}$$

حيث A^i_k توابع الشكل للحمولة الموزعة. يتعلق عدد حدود تابع الشكل بعدد النقاط المتخذة لوصف تابع الحمولة. و الحد الأخير من العلاقة (5-63) يصبح:

$$T_4 = \int_{S^{b,e}_\sigma} \overline{p}^i_{b,e}.u^{b,e}_i.dS = \overline{p}^k_{e,b} \int_{S^{b,e}_\sigma} A^i_k.L^j_i dS.u_j = \overline{S}^j.u_j \tag{5-84}$$

حيث :

$$\overline{S}^j = \overline{p}^k_{e,b} \int_{S^{b,e}_\sigma} A^i_k.L^j_i.dS \tag{5-85}$$

و الشعاع الأخير لحالة القضيب الإطاري يحتوي على القوى الخارجية المركزة على العقد (بما فيها العزوم الخارجية) و ذلك لأن السطوح $S^{b,e}_\sigma$ ليست إلا سطوح المقاطع الفاصلة بين العناصر المنتهية المتجاورة و التي تؤثر فيها قوى خارجية معلومة.

و بتعويض حدود العلاقة (5-63) بمكافئاها من العلاقات (5-74) (5-80) (5-84) نحصـــــل على الطاقة المتممة المعدلة :

$$\pi_{ch} = \sum_{e}\left(\frac{1}{2}\beta_k.H^{kl}.\beta_l + \beta_k.\overline{H}_l^k.\overline{\beta}_i^l + \overline{\beta}^k.\overline{H}_{kl}.\overline{\beta}^l - \beta_k.T^{kj}.u_l - \overline{\beta}_k.\overline{T}_k^j.u_j + \overline{s}^j.u_j\right)$$
(5-86)

و المتغير الأول للطاقة المتممة المعدلة وفق مبادئ حساب المتغيرات:

$$\delta\pi_{ch} = \frac{\partial\pi_{ch}}{\partial\beta}.\delta\beta + \frac{\partial\pi_{ch}}{\partial u}.\delta u = 0 \qquad (5\text{-}87)$$

و باعتبار $\delta\beta$, δu متغيرات اختيارية فإن المعادلة (5-87) محققة فقط عندما يكون الحد الأول مكافئا للصفر و في نفس الوقت الحد الثاني منها مكافئا للصفر. إذا بأخذ المتغير الأول للعلاقة (5-86) بالنسبة للثوابت الاختيارية يكون :

$$(\beta_l.H^{kl} + \overline{H}_l^k.\overline{\beta}^l - T^{kj}.u_j).\delta\beta_k = 0 \qquad (5\text{-}88)$$

من هذه المعادلة تتحدد الثوابت الاختيارية بدلالة شعاع الانتقالات لعقدالعنصــــر. بمســاواة الحدود بين القوسين الصغيرين بالصفر و نقل الحد الثاني و الثالث منها إلى الطرف الأيمــن مــن المعادلة الناتجة و ضرب المعادلة الناتجة بـــ H_{kr} معكوس H^{kl}

$$\beta_r = H_{kr}.(-\overline{H}_k^l.\overline{\beta}^l + T^{kj}.u_j) \qquad (5\text{-}89)$$

و المصفوفة H_{kr} تسمى مصفوفة المادة للعنصر، وهي مكافئة للمصفوفة التالية :

$$
H_{kr} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EAl} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI_3 l} & -\frac{1}{2EI_3 l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2EI_3 l^2} & \frac{1}{3EI_3 l^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_2 l} & -\frac{1}{2EI_2 l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2EI_2 l^2} & \frac{1}{3EI_2 l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GI_D l} \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}90)
$$

حيث يحقق كلا من H_{kr}, H^{kl} العلاقة التالية :

$$
H^{kl}.H_{kr} = \delta_r^l \qquad r=1,2 \qquad 6 \qquad (5\text{-}91)
$$

بتعويض الثوابت الاختيارية (5-89) في العلاقة (5-86) نحصل بعد استبدال القرينـــة l بقرينـــة مكافئة r و القرينة k بأخرى موافقة t على :

$$
\begin{aligned}
\pi_{ch} &= \sum_e \frac{1}{2}(-\overline{H}_r^k.\overline{\beta}^r + T^{kj}.u_j)H_{kl}(-\overline{H}_s^l.\overline{\beta}^s + T^{li}.u_i) + \\
&+ H_{lt}(-\overline{H}_s^l.\overline{\beta}^s + T^{li}.u_i)\overline{H}_r^t.\overline{\beta}^r + \overline{\beta}^r.\overline{H}_{tr}.\overline{\beta}^t \qquad (5\text{-}92) \\
&H_{lt}(-\overline{H}_s^l.\overline{\beta}^s + T^{li}.u_i)T^{tj}.u_j - \overline{\beta}^t.\overline{T}_t^j.u_j + \overline{s}^j.u_j
\end{aligned}
$$

و باختصار الحدود المتشابهة و إدخال بعض الاختصارات ينتج :

$$
\pi_{ch} = \sum_e (-\frac{1}{2}.u_i.k^{ij}.u_j + \overline{f}^j.u_j + c) \qquad (5\text{-}93)
$$

حيث :

$$
K^{ij} = T^{li}.H_{kl}.T^{kj} \qquad (5\text{-}94)
$$

مصفوفة القساوة للعنصر المنتهي ، و :

$$
\overline{f}^j = H_{lt}.\overline{H}_s^l.\overline{\beta}^s.T^{tj} - \overline{\beta}^t.\overline{T}_t^j + \overline{s}^j \qquad (5\text{-}95)
$$

القوة المركزة على العقد و المكافئة للحمولات الخارجية الموزعة ضمن العنصر و القوى المؤثرة على أطراف العنصر ،بينما :

$$c = -\frac{1}{2}\overline{H}_s^l.\overline{\beta}^s.H_{lt}.\overline{\beta}^s.\overline{H}_r^t.\overline{\beta}^r + \overline{\beta}^r.\overline{H}_{tr}.\overline{\beta}^t \qquad (5\text{-}96)$$

يمثل ثابتاً جبرياً.

بعد كتابة تعبير الطاقة المتممة المعدلة (5-93) بدلالة شعاع انتقالات العقد المنسوبة إلى المحاور الإحداثية العامة و إجراء الجمع على كامل المنشأ بشكل يماثل لما رأينا في نموذج الانتقالات نحصل على الطاقة المتممة المعدلة لكامل المنشأ .

$$\pi_{ch} = -\frac{1}{2}.u_n.k^{nn}.u_n + \overline{f}^n.u_n + c_1 \qquad (5\text{-}97)$$

و يأخذ المتغير الأول للعلاقة السابقة و مساواته بالصفر وفق مبدأ الطاقة المتممة المعدلة نحصل على جملة المعادلات الجبرية الخطية:

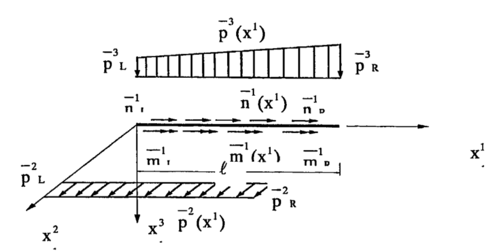
$$k^{nn'}.u_{n'} - \overline{f}^n = 0 \qquad (5\text{-}98)$$

جدير بالذكر هنا أن مصفوفة القساوة لعنصر منتهي اطاري فراغي هجين و المطورة في العلاقة (5.94) مكافئة تماماً لتلك المعطاة بالعلاقة (5-40) و أن القوى المركزة على العقد المكافئة للحمولات الخارجية الموزعة ضمن العنصر و المطورة في العلاقة (5-95) مكافئة لمثيلتها في العنصر نموذج الانتقالات (5-43) و ذلك بعد استبعاد الحد $\overline{s}^j$ الذي يمثل القوى المركزة المكافئة للحمولات الخارجية المطبقة على الطرف الذي تكون فيه القوى معلومة.

و قبل الانتقال إلى الفقرة التالية نود معالجة حالة التحميل الأكثر شيوعاً و هي حالة التحميل بحمولة على شكل شبه منحرف (شكل5–9) شدهًا من اليسار مميزة بالرمز L و شدهًا من اليمين تميز بإضافة الرمز R إلى الحمولة.

و يفهم من توزيع الحمولة أيضا أن الحمولة الناظمية تتغير بشكل شبه منحرف على طول القضيب. و كذلك حمولة عزم الفتل أيضا.في هذه الحالة أيضا تفترض التوابع التقريبية لقوى المقطع كجزء متجانس غير متعلق بالحمولات الخارجية و جزء آخر غير متجانس متعلق بالحمولات الخارجية $(M^l = p^{lk}.\beta_k + \overline{p}_k^l.\overline{\beta}^k)$.

يبقى الجزء المتجانس واحدا لكل حالات التحميل ، بينما يختلف الجزء غير المتجانس من حالة تحميل إلى أخرى. و لحالة التحميل هذه نستخدم التابع التقريبي التالي:



شكل5-9: حالة تحميل بحمولات على شكل شبه منحرف

$$\bar{p}^i_k.\beta^k = \begin{bmatrix} -x^1 & -\frac{(x^1)^2}{2l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(x^1)^2}{2} & -\frac{(x^1)^3}{6l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(x^1)^2}{2} & \frac{(x^1)^3}{6l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^1 & -\frac{(x^1)^2}{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{n}^1_L \\ \bar{n}^1_R - \bar{n}^1_L \\ \bar{p}^2_L \\ \bar{p}^2_R - \bar{p}^2_L \\ \bar{p}^3_L \\ \bar{p}^3_R - \bar{p}^3_L \\ \bar{m}^1_L \\ \bar{m}^1_R - \bar{m}^1_L \end{bmatrix} \quad (5\text{-}99)$$

و يلاحظ أن الجزء غير المتجانس للتابع التقريبي يصبح مكافئا لمثيله في العلاقة (5-73) أي لحالة القوى الموزعة بانتظام عندما يكون $\bar{p}_L = \bar{p}_R = \bar{p}$. كما يمكن أن نستنتج منه التابع التقريبي لحالة حمولة مثلثية في الحالة التي يكون فيها $\bar{p}_R = 0$. بالإضافة إلى ذلك يمكن استخدام حالة التحميل هذه كحمولة أساسية لتقريب أشكال الحمولات المنحنية المعقدة و ذلك بتحويلها إلى خط منكسر تتطابق نقاط انكساره مع قيم الحمولة المعقدة في تلك النقاط. وفي مثل هذه الحالة سوف نضطر إلى تقسيم المنشأ تقسيما دقيقا بحيث نستطيع تمثيل الحمولة المعقدة بأقرب شكل ممكن .

5-6- اقتراحات لمعالجة طرق العناصر المنتهية:

يلاحظ أثناء تنفيذ طريقة العناصر المنتهية-نموذج الانتقالات أنه في افـتراض التوابـع التقريبيـة للانتقالات قد حدد عدد الثوابت الاختيارية بحيث يكون مساوياً لعدد درجات الحرية لعقد العنصر المنتهي.وهذا يسمح فقط بإيجاد علاقة تربط بين توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر و درجات الحرية لعقد العنصر.مما يعني أنه لا توجد هناك علاقة مباشرة على مستوى العنصـر بـين توابـع الانتقالات فيه و بين الحمولات الخارجية المطبقة عليه.و تظهر علاقة الحمولات بالانتقالات فقـط على مستوى المنشأ ككل في جملة المعادلات الجبرية الخطية لكامل الجملة المدروسة وذلك بشـكل نقطي على عقد الجملة .وفي مثل هذه العلاقة على مستوى المنشأ لا يظهر أي تأثير لشكل توابـع الحمولات ضمن العنصر نفسه على شكل توابع الانتقالات .و بالتالي لا يظهر هذا التأثير أيضاً على شكل توابع الإجهادات المشتقة من توابع الانتقالات.و تتعلق توابع الانتقـالات لهـذه المقاربـة التقليدية و عليه توابع الاجهادات المشتقة منها بالمتحولات المستقلة الديكارتية و بانتقالات عقـد العنصر فقط. وهذا يعني أن منحنيات الانتقالات و الاجهادات الناتجة باستخدام هذه الطريقة هـي نفسها لعنصرين أحدهما محمل بحمولة موزعة و الآخر غير محمل و تحصـل في عقديـهما نفـس الانتقالات . في الواقع هناك علاقة مباشرة بين توابع الحمولات للعنصـر وتوابـع الانتقـالات و الاجهادات فيه على المستوى التفاضلي للعنصر تجسدها المعادلات التفاضلية للمسألة المطروحة .
لكن الأساس النظري لطريقة الانتقالات و هو مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري يسمح باسـتقلالية توابع الانتقالات ضمن العنصر عن توابع الحمولات، إذ لا يفترض في توابع الاجهادات المشتقة مـن توابع الانتقالات التقريبية أن تحقق معادلات التوازن ضمن العنصر ، ويتم تحقيق معادلات التـوازن بشكل تكاملي على كامل عقد الجملة المدروسة، و هذا ما تجسده جملة المعادلات الجبرية الخطيـة التابعة للمنشأ بكامله. هناك أعداد لا تحصى من الأعمال العلمية عالجت مختلف أنـواع المنشـآت بتطبيق طريقة العناصر المنتهية-نموذج الانتقالات، استخدم فيها قاطبة توابع انتقـالات تقريبيـة لا تراعي الربط المباشر بين الانتقالات و الحمولات ضمن العنصر المنتهي . وفي بعض هذه التطبيقـات افترضت توابع تقريبية للانتقالات لا تحقق فقط المتطلبات التي ينص عليها مبدأ الطاقـة الكامنـة

الأصغري وإنما حققت جزء المعادلة التفاضلية المتجانس للمسألة المطروحة (انظر توابع الانتقـالات التقريبية(5.33),(4.19)) . و على هذا الأساس طورت عناصر منتهية أعطت على سبيل المثـال نتائج جيدة تجاري الحل التحليلي لحالة منشآت غير محملة بحمولات خارجية موزعة على عناصرهـا ، بل بحمولات خارجية مركزة على العقد . و ظهرت أخطاء الحل واضحـة و جليـة في حالـة استخدامها لحل منشآت محملة بحمولات موزعة ووصلت هـذه الأخطـاء إلى حـدود 50% في حسابات القوى القاصة .

أما في التطبيق الهجين لطريقة العناصر المنتهية-نموذج الاجهادات فهناك ربط مباشر بـين توابـع الاجهادات التقريبية و توابع الحمولات ضمن العنصر يحكمه مبدأ الطاقة المتممة المعدل الذي يمثـل الأساس النظري لهذه الطريقة . فوفق هذا المبدأ يجب أن تحقق توابع الاجهادات التقريبية معـادلات التوازن الداخلية ضمن العنصر المنتهي . لذلك لابد من الربط المباشر بين توابع الاجهادات التقريبية وتوابع الحمولات ضمن العنصر المنتهي .أما الربط بين الانتقالات و توابع الحمولات فيتم أيضـاً بهذه الطريقة بشكل غير مباشر و نقطي بعد حذف المعاملات β -في جملة المعـادلات الجبريـة الخطية النهائية لانتقالات العقد. جدير بالذكر أيضاً أنه أثناء تطبيق هذه الطريقة لم يراعى الربـط المنظم بين توابع الاجهادات التقريبية و توابع الحمولات وإنما اختيرت توابع الإجهادات التقريبيـة متعلقة بالحمولات الموزعة ضمن العنصر بحيث تتحقق معادلات التوازن الداخلية ضمن العنصر .
إضافة إلى ذلك طورت زمرة عناصر منتهية من نموذج ترفتز(Trefftz) تراعي الربط المباشر بـين توابع الانتقالات التقريبية و توابع الحمولات ضمن العنصر بحيث تتحقق المعادلة التفاضلية للمسـألة المطروحة ضمن العنصر المنتهي .لكن هذا الربط تم أيضا بشكل عشوائي غير منظم لا يراعي العلاقة المباشرة بين توابع الحمولات و شكل منحني الانتقالات الناتجة ضمن العنصر .
في كل الطرق سابقة الذكر لم يتم اقتراح أي طريقة نظامية للربط المباشر المنظم بـين حمـولات العنصر و انتقالاته بالإضافة إلى ذلك لم يتم إدخال حمولات العنصر في الخوارزميـات الأساسـية لاستنباط توابع الشكل أثناء الانتقال من التوابع التقريبية بالثوابت الاختيارية إلى توابـع تقريبيـة متعلقة بدرجات الحرية.

في الفقرة التالية سيتم إدخال توابع حمولات العنصر المنتهي في أساسيات اشتقاق التوابع التقريبية للانتقالات أو التوابع التقريبية للإجهادات بشكل منظم وغير عشوائي .بحيث تتحقق العلاقة الدقيقة بين حمولات العنصر و توابع الانتقالات التقريبية فيه وذلك على المستوى التفاضلي .

5-6-1- عموميات ربط التوابع التقريبية بحمولات العنصر و درجات الحرية:

في البدء تختار توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر ككثير حدود بثوابت اختيارية عددها n ثابتا

$$u_i = x_i^n . c_n \qquad (5\text{-}100)$$

حيث u_i توابع الانتقالات التقريبية التي يمكن بمعرفتها وصف الحالة الانتقالية لكل نقطة من نقاط الجسم وصفا تاما ، x_i^n مصفوفة متعلقة فقط بالإحداثيات الديكارتية المحلية المستقلة ، c_n ثوابت اختيارية ليس لها في البدء أي مضمون إنشائي ونعتبر عددها للوهلة الأولى لانهائي .

لنفرض أن المعادلة التفاضلية التي تحكم المسألة المدروسة من الشكل:

$$\Delta^{ij} . u_i = \overline{p}^j \qquad (5\text{-}101)$$

حيث ^{ij} مصفوفة من المعاملات التفاضلية ، $\overline{p}^j$ توابع الحمولة الخارجية الموزعة .

إن تطبيق المعادلة التفاضلية (5-101) على التوابع التقريبية يعطي علاقة تربط الثوابت الاختيارية بالحمولات الخارجية .

$$(\Delta^{ij} . x_i^n) . c_n = \overline{p}^j \qquad (5\text{-}102)$$

جملة المعادلات هذه تقبل بشكل عام عدد لانهائي من الحلول وتتعلق حلولها بشكل إعطاء توابع الحمولات الخارجية . فقد تكون توابع الحمولات الخارجية معطاة بشكل تحليلي ، عندها يمكن تحويل هذه التوابع مثلا إلى كثيرات حدود بنشرها حول نقطة ما من العنصر المنتهي (وليكن مركز ثقل العنصر)وفق سلسلة تايلور مثلا، و القيام بمثل هذا النشر يحدده الإنشائي وفق أهمية المنشأ المدروس ، فبعد هذا النشر يمكن بالمقارنة بين الحدود المتشابهة من انتقاء حل مناسب و تعيين بعض الثوابت الاختيارية بدلالة الحمولات الخارجية . أو يمكن في الحالة العامة أن تعطى توابع الحمولات الخارجية كحمولات لا على التعيين موصوفة بشكل نقطي على عقد العنصر وفي نقاط مميزة منه،

إذ تعطى شداتها في النقاط المذكورة . في هذه الحالة يمكن استخدام التوابع التقريبية للحصول على توزيع تقريبي لتوابع الحمولات الخارجية ضمن العنصر المنتهي بدلالة شدة الحمولات الخارجية على عقد العنصر و ذلك بتطبيق مماثل لما ورد في حالة الانتقالات عند تعيينها بدلالة انتقالات عقد العنصر (انظر المعادلات من (5-30) إلى (5-33) و لهذا التوزع الشكل العام التالي :

$$\overline{p}^j = NP_r^j . \overline{p}_0^r \qquad (5\text{-}103)$$

حيث NP_r^j توابع الشكل ، و تتعلق بالمتحولات الإحداثية المستقلة .

في هذه الحالة يمكن بمطابقة حدود طرفي المعادلة (5-102) من انتقاء حل مناسب يحدد الثوابت الاختيارية المتعلقة بالحمولات الخارجية . و انتقاء الحل المناسب يخضع لضوابط أيضا كما في اشتقاق التوابع التقريبية بالطريقة التقليدية . و ينصح هنا بانتقاء أبسط حل ممكن و بعد تحديد الثوابت الاختيارية المتعلقة بالحمولات الخارجية يجب أن يكون عدد الثوابت الاختيارية التي لم يتم تعيينها أو إعطائها مضمونا إنشائيا مساويا لعدد درجات الحرية للعنصر مضروبا بعدد عقد العنصر ، حتى نتمكن من تعيين الثوابت المتبقية بدلالة انتقالات العقد ، أي العدد المعروف في الطريقة التقليدية. و بعد هذا التحديد يجب أن يحقق التابع الناتج متطلبات شروط الاستمرارية الواردة في الطريقة التقليدية . كما يجب أن ينقسم التابع التقريبي إلى جزء متجانس موافق لجزء المعادلات التفاضلية غير المتجانسة للمسألة المطروحة . عندها يأخذ تابع الانتقالات التقريبية الشكل :

$$u_i = M_i^k . c_k + \overline{M}_{ij} . \overline{p}^j \qquad (5\text{-}104)$$

c_k عدد من الثوابت الاختيارية مكافئة لعدد عقد العنصر المنتهي مضروبا بعدد درجات الحرية على العقدة، M_i^k ; $\overline{M}_{ij}$ مصفوفتان تمثلان الجزء المتجانس و غير المتجانس للتوابع التقريبية على التوالي و متعلقتان بالإحداثيات المحلية المستقلة المستخدمة . يمكن الآن تجميع انتقالات عقد العنصر في شعاع $u_{k(e)}$ عدد عناصره مساو لعدد عقد العنصر مضروبا بعدد درجات الحرية و الحصول على هذا الشعاع من العلاقة (5-104) بعد تعويض إحداثيات عقد العنصر في العلاقة نفسها

$$u_{k(e)} = A_{k(e)}^l . c_l + \overline{A}_{k(e)j} . \overline{p}^j \qquad (5\text{-}105)$$

المصفوفتان $A_{k(e)}^l$; $\overline{A}_{k(e)j}$ مصفوفتان تنتجان من M_i^k ; $\overline{M}_{ij}$ بتعويض الإحداثيات الخاصة لعقد العنصر في المصفوفتين الأخيرتين، وl قرينة تتحول كما القرينة k . $u_{k(e)}$ شعاع انتقالات العقد وهو مطابق للشعاع $u_{l(e)}$ في العلاقة (5-33) إلا أن (e) استخدمت الآن ليس كقرينة و

إنما لتمييز انتقالات العقد . بعد نقل الحد الثاني من الطرف الأيمن للمعادلة (5-105) إلى الطـرف الأيسر نحصل على جملة المعادلات الخطية لتحديد الثوابت الاختيارية المتبقية .

$$A^{l}_{k(e)}.c_l = u_{k(e)} - \overline{A}_{k(e)j}.\overline{p}^{j} \qquad (5\text{-}106)$$

و حل جملة المعادلات هذه يمكن الحصول عليه مثلاً بإيجاد معكوس المصفوفة $A^{l}_{k(e)}$ و لتكـن $B^{k(e)}_{m}$ و بعد ضرب طرفي المعادلة بالمصفوفة $B^{k(e)}_{m}$ نحصل على :

$$B^{k(e)}_{m}.A^{l}_{k(e)}.c_l = \delta^{l}_{m}.c_l = c_m = B^{k(e)}_{m}(u_{k(e)} - \overline{A}_{k(e)j}.\overline{p}^{j}) \qquad (5\text{-}107)$$

حيث δ^{l}_{m} المصفوفة الواحدية ، و m قرينة تتحول كما تتحول l أو k . و باعتبـار القرينتـين $k,,m$ تتحولان مثل بعضهما البعض فيمكن تبديلهما ببعضهما البعض دون أن يحصل أي تغيـير في العلاقة (5-107) أي أن :

$$c_k = B^{m(e)}_{k}(u_{m(e)} - \overline{A}_{m(e)j}.\overline{p}^{j}) \qquad (5\text{-}108)$$

نعوض الآن الثوابت الاختيارية في العلاقة (5-104) التي انطلقنا منها فنحصل على :

$$\begin{aligned} u_i &= M^{k}_{i}.B^{m(e)}_{k}(u_{m(e)} - \overline{A}_{m(e)j}.\overline{p}^{j}) + \overline{M}_{ij}.\overline{p}^{j} \\ &= M^{k}_{i}.B^{m(e)}_{k}.u_{m(e)} + (-M^{k}_{i}.B^{m(e)}_{k}\overline{A}_{m(e)j} + \overline{M}_{ij}).\overline{p}^{j} \qquad (5\text{-}109) \\ &= N^{m(e)}_{i}.u_{m(e)} + \overline{N}_{ij}.\overline{p}^{j} \end{aligned}$$

حيث :

$$N^{m(e)}_{i} = M^{k}_{i}.B^{m(e)}_{k} \qquad (5\text{-}110)$$

هو جزء تابع الشكل المتجانس و :

$$\overline{N}_{ij} = -M^{k}_{i}.B^{m(e)}_{k}.\overline{A}_{m(e)j} + \overline{M}_{ij} = -N^{m(e)}_{i}.\overline{A}_{m(e)j} + \overline{M}_{ij} \qquad (5\text{-}111)$$

جزء تابع الشكل غير المتجانس .

و بذلك نكون قد حصلنا على علاقة تربط بين توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر من جهـة وبين انتقالات عقد العنصر بالإضافة إلى الحمولات الخارجية الموزعة المطبقة على العنصر من جهـة أخرى .

يمكن الآن استخدام التوابع التقريبية للانتقالات المشتقة بهذه الطريقة في تطبيق طريقـة العنـاصر المنتهية-نموذج الانتقالات ، ويلاحظ أن هذا التطبيق يصبح مكافئاً لمثيله التقليدي عنـد انعـدام الحمولات الخارجية الموزعة ضمن العناصر المنتهية و اقتصار الحمولات على حمـولات خارجيـة

مركزة على عقد العناصر. إذ ينعدم في هذه الحالة الجزء غير المتجانس من التابع التقريبي (5-109) و المتعلق بالحمولات الخارجية الموزعة و تبقى علاقة تربط بين تابع الانتقالات و درجات حرية عقد العنصر .

كما يمكن أيضاً أن نشتق من مثل هذه التوابع التقريبية للانتقالات ، توابع تقريبية للاجهادات أو قوى المقطع لاستخدامها في طريقة العناصر المنتهية-النموذج الهجين للإجهادات، إذ أن توابع الإجهادات أو قوى المقطع المشتقة من توابع انتقالات محققة للمعادلات التفاضلية غير المتجانسة للمسألة المطروحة على المستوى التفاضلي تحقق بدورها بشكل آلي معادلات التوازن غير المتجانسة ضمن العنصر و على المستوى التفاضلي أيضاً .

5-6-2- عنصر إطاري فراغي بتوابع تقريبية متعلقة بحمولات العنصر :

ليكن لدينا عنصر فراغي إطاري منسوب إلى جملة محاور إحداثية محلية و محمل بحمولات تتغير بشكل خطي على شكل شبه منحرف كما في الشكل (5-9). حالة التحميل هذه تعتبر من الحالات العامة بالإضافة إلى ذلك يمكن اعتبارها حمولة أساسية لتقريب حالات تحميل أخرى. لنبدأ الآن بتحديد عدد الثوابت الاختيارية التي يجب اعتبارها لتقريب توابع الانتقالات ضمن العنصر، و لنبدأ أولاً بتابع الانتقالات التقريبي الممثل للانتقال المحوري باتجاه x^1. و لنفرض أن هذا التابع يحتوي على عدد لانهائي من الثوابت الاختيارية و ممثل بكثير الحدود التالي :

$$u_1^0(x^1) = c_0 + c_1.x^1 + c_2.(x^1)^2 + c_3.(x^1)^3 + ... + c_n.(x^1)^n \qquad (5\text{-}112)$$

إن تطبيق المعادلة التفاضلية (الخاصة بالانتقالات المحورية، المعادلة الأولى من العلاقة (5-27)) على العلاقة (5-112) يؤدي إلى :

$$EA.\frac{d^2u_1^0}{dx^1} = EA[2c_2 + (3)(2)c_3.x^1 + (4)(3)(2)c_4(x^1)^2 + ... \qquad (5\text{-}113)$$
$$.. + (n)(n-1)(x^1)^{n-2}] = -\overline{n}^1(x^1)$$

و الحمولة $\overline{n}^1(x^1)$ على بعد ما x^1 من الطرف اليساري مساوية للتابع:

$$\bar{n}^1(x^1) = \bar{n}^1_L + \frac{x^1}{l}(\bar{n}^1_R - n^1_L) \qquad (5\text{-}114)$$

أبسط حل يمكن اختياره لكي تتحقق المعادلة التفاضلية (5-113) ينتج من مقارنة كثير الحـدود في العلاقة (5-113) مع كثير الحدود في العلاقة (5-114) فنحصل على :

$$c_2 = -\frac{n^1_L}{2EA}; c_3 = -\frac{1}{6EAl}(\bar{n}^1_R - n^1_L); c_4 = 0, \ldots, c_n = 0 \qquad (5\text{-}115)$$

و يصبح التابع التقريبي للانتقال باتجاه المحور x^1 والذي يجب افتراضه مكافئ لـ:

$$u^0_1(x^1) = c_0 + c_1.x^1 - \frac{(x^1)^2}{2EA}.\bar{n}^1_L - \frac{(x^1)^3}{6EAl}.(\bar{n}^1_R - \bar{n}^1_L) \qquad (5\text{-}116)$$

وهو يتألف من جزء متجانس متعلق بثوابت اختيارية و آخر غير متجانس متعلق بالحمولة .

نفس المناقشة نجريها الآن للتابع التقريبي للانتقال u^0_3 و لنفرض أن :

$$u^0_3(x^1) = \alpha_0 + \alpha_1.(x^1) + \alpha_2.(x^1)^2 + \alpha 3.(x^1)^3 + \alpha_4.(x^1)^4 + \alpha_5.(x^1)^5 + \ldots + \alpha_n.(x^1)^n \qquad (5\text{-}117)$$

بتطبيق المعادلة التفاضلية (الخاصة بهذا الانتقال) يجب أن يكون الحد الأيمن من المعادلة التالية :

$$EI_2.\frac{d^4u^0_3}{(dx^1)^4} = EI_2[(4)(3)(2)(1).\alpha_4 + (5)(4)(3)(2).\alpha_5.x^1 + \ldots\ldots\ldots \qquad (5\text{-}118)$$
$$..+(n)(n-1)(n-2)(n-3).\alpha_n.(x^1)^{(n-4)}]$$

مكافئا للحد الأيمن من المعادلة اللاحقة :

$$EI_2\frac{d^4u^0_3}{(dx^1)^4} = \bar{p}^2(x^1) = \bar{p}^2_L + \frac{x^1}{l}(\bar{p}^2_R - \bar{p}^2_L) \qquad (5\text{-}119)$$

و الحل الأبسط بنتيجة المقارنة هو :

$$\alpha_4 = \frac{\bar{p}^2_L}{24EI_2}; \alpha_5 = \frac{1}{120EI_2l}(\bar{p}^2_R - \bar{p}^2_L); \alpha_6 = 0; \alpha_7 = 0; \ldots; \alpha_n = 0 \qquad (5\text{-}120)$$

ويصبح التابع التقريبي الذي يجب اعتباره :

$$u^0_3(x^1) = \alpha_0 + \alpha_1.(x^1) + \alpha_2.(x^1)^2 + \alpha_3.(x^1)^3 + \frac{(x^1)^4}{24EI_2}.\bar{p}^2_L + \frac{(x^1)^5}{120EI_2l}.(\bar{p}^2_R - \bar{p}^2_L) \qquad (5\text{-}121)$$

و بنفس الأسلوب السابق نحدد التوابع التقريبية للانتقال u_2^0 و للدوران φ_1. وبتجميع هذه الانتقالات في شعاع وإعادة ترقيم الثوابت الاختيارية من c_0 إلى c_{11} نحصل على التوابع الاختيارية بشكلها المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x^1 & (x^1)^2 & (x^1)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^1 & (x^1)^2 & (x^1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \overline{M}_{11} & \overline{M}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{M}_{25} & \overline{M}_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{M}_{33} & \overline{M}_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{M}_{47} & \overline{M}_{48} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{n}_L^1 \\ \overline{n}_R^1 \\ \overline{p}_L^2 \\ \overline{p}_R^2 \\ \overline{p}_L^3 \\ \overline{p}_R^3 \\ \overline{m}_L^1 \\ \overline{m}_R^1 \end{bmatrix} \cdots \qquad (5-12$$

$$u_i^0 = M_i^k c_k + \overline{M}_{ij} \overline{p}^j$$

حيث:

$$\overline{M}_{11} = \frac{1}{EA}[-\frac{(x^1)^2}{2} + \frac{(x^1)^3}{6l}]$$

$$\overline{M}_{12} = -\frac{1}{EA}.\frac{(x^1)^3}{6l}$$

$$\overline{M}_{25} = \frac{1}{EI_3}[\frac{(x^1)^4}{24} - \frac{(x^1)^5}{120l}]$$

$$\overline{M}_{26} = \frac{1}{EI_3}.\frac{(x^1)^5}{120l}$$

$$\overline{M}_{33} = \frac{1}{EI_3}[\frac{(x^1)^4}{24} - \frac{(x^1)^5}{120l}]$$

$$\overline{M}_{34} = \frac{1}{EI_2}.\frac{(x^1)^5}{120l}$$

$$\overline{M}_{47} = \frac{1}{GI_D}[-\frac{(x^1)^2}{2} + \frac{(x^1)^3}{6l}]$$

$$\overline{M}_{48} = \frac{1}{GI_D}.\frac{(x^1)^3}{6l}$$

(5.123)

بعد اجراء العمليات المدونة باختصار في الانتقال من العلاقـــة (5-104) إلى العلاقـــة (5-109) نحصل على التوابع التقريبية المرغوبة. و القسم المتجانس لتوابـــع الشـــكل $N_i^{m(e)}$ مـــاثل تماماً للمصفوفة $N_i^{I(p)}$ الواردة في العلاقة (5-33) ، أما الجزء غير المتجانس فهو المصفوفة :

$$\overline{N}_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{N}_{11} & \overline{N}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{N}_{25} & \overline{N}_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{N}_{33} & \overline{N}_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{N}_{47} & \overline{N}_{48} \end{bmatrix}. \qquad (5.124)$$

حيث :

$$\overline{N}_{11} = \frac{1}{EA}\left[\frac{l.x^1}{3} - \frac{(x^1)^2}{2} + \frac{(x^1)^3}{6l}\right]$$

$$\overline{N}_{12} = -\frac{1}{EA}\left[\frac{l.x^1}{6} - \frac{(x^1)^3}{6l}\right]$$

$$\overline{N}_{25} = \frac{1}{EI_3}\left[\frac{l^2.(x^1)^2}{40} - \frac{7l.(x^1)^3}{24} + \frac{(x^1)^4}{24} - \frac{(x^1)^5}{120l}\right]$$

$$\overline{N}_{26} = \frac{1}{EI_3}\left[\frac{l^2.(x^1)^2}{60} - \frac{l.(x^1)^3}{40} + \frac{(x^1)^5}{120l}\right]$$

$$N_{33} = \frac{1}{EI_2}\left[\frac{l^2.(x^1)^2}{40} - \frac{7l.(x^1)^3}{120} + \frac{(x^1)^4}{24} - \frac{(x^1)^5}{120l}\right]$$

$$\overline{N}_{34} = \frac{1}{EI_2}\left[\frac{l^2.(x^1)^2}{60} - \frac{l.(x^1)^3}{40} + \frac{(x^1)^5}{120l}\right]$$

$$\overline{N}_{47} = \frac{1}{GI_D}\left[\frac{l.x^1}{3} - \frac{(x^1)^2}{2} + \frac{(x^1)^3}{6l}\right]$$

$$\overline{N}_{48} = \frac{1}{GI_D}\left[\frac{l.x^1}{6} - \frac{(x^1)^3}{6l}\right]$$

(5.125)

من توابع الانتقالات هذه والممثلة بالعلاقة (5-109) بجزئها المتجانس المفصل في العلاقة (5-33) و جزئها غير المتجانس المفصل بالعلاقات (5-125) , (5-124) يمكن باستخدام العلاقـــات (5-23) اشتقاق توابع تقريبية لقوى المقطع محققة لمعادلات التوازن الداخلية ضمن العنصر، ويترك للقـــارئ اشتقاق مثل هذه التوابع. وهذه التوابع المشتقة يمكن استخدامها للتطبيـــق الهجـــين مـــن نمـــوذج الاجهادات الوارد في الفقرة (5-5). والخوارزميات الواردة في هذه الفقرة سارية المفعول تماما لمثـل هذا التطبيق دون أي تغيير والاختلاف الوحيد يظهر في كون عناصر المصفوفة $\overline{p}_k^i$ في العلاقـــة (5-73) مختلفة عن نظيرتها في التوابع المشتقة هنا.

أما في استخدام توابع الانتقالات المشتقة هنا في تطبيق طريقة العناصر المنتهية -نموذج الانتقـــالات فيظهر اختلاف في تقييم طاقة التشوه الداخلية للعنصر المنتهي نتيجة وجود جزء غير متجـــانس في

توابع الانتقالات وسنستعرض في الفقرة التالية هذا التطبيق بإيجاز دون أن نعطي تفاصيل التكاملات الواردة، و يترك للقارئ كتمرين إنجاز هذه التكاملات .

5-6-3-استخدام توابع تقريبية متعلقة بحمولات العنصر في نموذج الانتقالات:

على غرار العلاقة (5-35) يقيم شعاع مشتقات التوابع التقريبية للانتقالات الواردة في العلاقة (5-109) ،و من ثم يمكن تعيين موترة التشوهات المختصرة لنقطة لا على التعيين من مقطع القضيب الإطاري الفراغي فنحصل على :

$$\varepsilon_{1j} = \overline{x}_{1j}^{t}(Nd_{t}^{m(p)}.u_{m(p)} + \overline{Nd}_{tl}.\overline{p}^{l})$$
$$\varepsilon_{1i} = \overline{x}_{1i}^{r}(Nd_{r}^{s(q)}.u_{s(q)} + \overline{Nd}_{rn}.\overline{p}^{n}) \qquad (5\text{-}126)$$

حيث $\overline{Nd}_{tl}, Nd_{t}^{m(p)}$ أو $\overline{Nd}_{rn}, Nd_{r}^{s(q)}$ مشتقة من مثيلتيهما $\overline{N}_{tl}, N_{t}^{m(e)}$ أو $\overline{N}_{rn}, N_{r}^{s(q)}$ الواردة على التوالي في العلاقة (5-109) بعد استبدال قرائن بأخرى، و $\overline{x}_{1j}^{t}$ أو $\overline{x}_{1i}^{r}$ مماثلة لـ $\overline{x}_{1i}^{j}$ الواردة في العلاقة (5-21) ، أما $\overline{p}^{l}$ أو $\overline{p}^{n}$ فهو شعاع شدة الحمولات الخارجية على العقدتين (k),(i) كالشعاع $\overline{p}^{j}$ الوارد في العلاقة (5-122) .

و تصبح طاقة التشوه الداخلية :

$$\Pi_{i} = \frac{1}{2}\int_{V}\varepsilon_{1i}.c^{1i1j}\varepsilon_{1j}dV$$
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{l}(Nd_{r}^{s(q)}.u_{s(q)} + \overline{Nd}_{rn}.\overline{p}^{n})(\int_{0}^{A}\overline{x}_{ij}^{t}.c^{1i1j}.\overline{x}_{1i}^{r}.dA).(Nd_{t}^{m(p)}.u_{m(p)} + \overline{Nd}_{tl}.\overline{p}^{l}).dx^{1}$$
$$= \frac{1}{2}.u_{s(q)}.K^{s(q)m(p)}.u_{m(p)} + u_{s(q)}.\overline{fp}^{s(q)} + c_{1} \qquad (5\text{-}126)$$

حيث :

$$k^{s(q)m(p)} = \int_{0}^{l}Nd_{r}^{s(q)}.E^{rt}.Nd_{t}^{m(p)}.dx^{1} \qquad (5\text{-}127)$$

$$\overline{fp}^{s(q)} = \frac{1}{2}\int_{0}^{l}(Nd_{r}^{s(q)}.E^{rt}.\overline{Nd}_{tl}.\overline{p}^{l} + \overline{Nd}_{rn}.\overline{p}^{n}.E^{rt}.Nd_{r}^{m(p)}).dx^{1} \qquad (5\text{-}128)$$

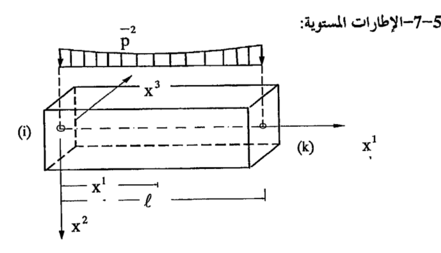
$$c_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \overline{Nd}_m . \overline{p}^n . E^n . \overline{Nd}_n . \overline{p}^1 . dx^1 \qquad (5\text{-}129)$$

E^n مصفوفة مكافئة لمثيلتها المحسوبة في العلاقة (5-38) ومساوية لتلك المنجزة في العلاقة (5-23) ، و c^{iiij} هي كتلك الواردة في العلاقة (5-22) كما أن مصفوفة قساوة العنصر الناتجة عن التكامل (5-127) مكافئة لمثيلتها الواردة في العلاقة (5-40) .

أما بقية حدود الطاقة الكامنة فلا يطرأ عليها أي تعديل. و بالتالي فالتغيير الذي يطرأ على خوارزميات طريقة الانتقالات يتمثل في إضافة الحد (5-128) إلى تعبير الطاقة الكامنة.إذا التعبير (5-129) ينعدم بعد أخذ المتغير الأول لانتقالات العقد باعتبارها قيمة معلومة .

و في ختام هذا الفصل سوف نستعرض نتائج الطرق الثلاث الواردة في الفقرات (5-4)(5-5)(5-6) لتطبيق طريقة العناصر المنتهية على الإطارات المستوية.

5-7-الإطارات المستوية:



شكل 5-10: مستوي الحمولات الخارجية x^1x^2

عند تطبيق الحمولات الخارجية على المنشآت الإطاريةفي مستوي واحد، و ليكن المستوي x^1x^2 شكل (5-10) ،لاتكفي مركبات الانتقال u_1,u_2 لنقطة ما لا على التعيين من مقطع القضيب لتحديد الحالة الانتقالية للقضيب .و ذلك باعتبار أن الانتقالات تحدث فقط في المستوي x^1x^2 ،و بالتالي يكون تغير موضع أي نقطة من القضيب بالنسبة للمحور x^3 مساو للصفر $(u_3=0)$. و هذا يعني أن دوران المقطع حول x^2 مساو للصفر أيضا($\varphi_2 = 0$ انظر العلاقة (5-3))،كما يجب

أن يكون دوران المقطع حول x^1 معدوم ($\varphi_1 = 0$) و ذلك لأن دوران المقطع حول x^1 يؤدي إلى انتقال في اتجاه x^3 (انظر المعادلة الثانية من العلاقات (5-1)) و يبقى للمقطع حرية الدوران حول المحور x^3 ، و عليه يمكن تعيين الحالة الانتقالية تماما بتعيين انتقالي مركز ثقل المقطع u_2^0, u_1^0 و دوران المقطع φ_3 و يتبقى من العلاقات (5-1) المعادلتين التاليتين :

$$u_1 = u_1^0 - \varphi_3 . x^2 \quad (5\text{-}130)$$
$$u_2 = u_2^0$$

و دوران المقطع حول x^2 يحسب بدلالة الانتقال u_3^0

$$\varphi_3 = \frac{du_2^0}{dx^1} \quad (5\text{-}131)$$

أما جزء موترة التشوهات فتقتصر على التشوه الناظمي ε_{11} إذ أن التشوهين $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}$ مكافئين للصفر و ذلك لأن :

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} = -\varphi_3 + \varphi_3 = 0 \quad (5-132)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1} = 0 \quad (5-133)$$

فالانتقال u_1^0 و الدوران φ_3 في العلاقة (5-130) يفترض أنها تابعة للإحداثي x^1 فقط .

و بناء على ذلك يتم تحديد الحالة الإجهادية بالإجهاد σ^{11} ، أما قوى المقطع فتتقلص لتشمل القوة الناظمية N^1 (العلاقة (5-9)) و عزم الانعطاف M^3 (العلاقة (5-10)) و عليه تكون معادلات التوازن الداخلية ممثلة بالمعادلتين الأولى و الثالثة من العلاقة (5-16) .

بالنسبة لعلاقات التشوهات–الانتقالات فتقتصر على العلاقة :

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1^0}{dx^1} - x^2 \frac{d^2u_2^0}{(dx^1)^2} = \begin{bmatrix} 1 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{du_1^0}{dx^1} \\ \dfrac{d^2u_2^0}{(dx^1)^2} \end{bmatrix} \quad (5\text{-}134)$$

$$= \bar{x}_{11}^{j} . \chi_j$$

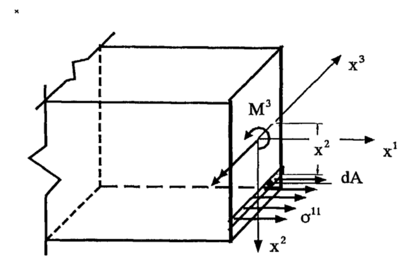
و قانون السلوك يقتصر على العلاقة :

$$\sigma^{11} = E.\varepsilon_{11} \quad (5\text{-}135)$$

و تصبح علاقات قوى المقطع -الانتقالات مكافئة لما يلي :

$$\begin{bmatrix} N^1 \\ M^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{du_1^0}{dx^1} \\ -\dfrac{d^2u_2^0}{(dx^1)^2} \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}136)$$

$$M^i = E^{ij} \cdot \chi_i$$



شكل 5-11: العزم الموجب M^3

وإشارة العزم المختارة الـــموجبة هي تلك المتفقة مع العزم الموجب في مقاومة المواد والذي يسبب شداً للألياف السفلية (الداخلية) و ضغطاً في الألياف العلوية (شكل5-11) .

يمكن الآن إنجاز التطبيقات الثلاث لطريقة العناصر المنتهية المشروحة مفصـــلاً في الفقـــرات (5-4)(5-5)(5-6) مع اعتبار التبسيط الحاصل في هذه الفقرة ولا داعي لإعادة هذه التفصيلات مرة أخرى. ويكتفى الآن بذكر مصفوفة القساوة الناتجة عن مثل هذه التطبيقات و شـــعاع القـــوى المركزة على العقد المكافئ للحمولات الخارجية الموزعة بانتظام . و ذلك في حالة استخدام نفـــس التوابع التقريبية لمركبات الانتقال أو مركبات قوى المقطع . فمصفوفة القســـاوة تقتصـــر علـــى المصفوفة :

$$k^{m(p)s(q)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_3}{l^3} & \frac{6EI_3}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_3}{l^3} & \frac{6EI_3}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_3}{l^2} & \frac{2EI_3}{l} & 0 & -\frac{6EI_3}{l^2} & \frac{2EI_3}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_3}{l^3} & -\frac{6EI_3}{l^2} & 0 & \frac{12EI_3}{l^3} & -\frac{6EI_3}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_3}{l^2} & \frac{2EI_3}{l} & 0 & -\frac{6EI_3}{l^2} & \frac{2EI_3}{l} \end{bmatrix}$$

(5-137)

و شعاع القوى المركزة على العقد المكافئ لحمولات خارجية خطية $(\overline{n}^1, \overline{p}^2)$ موزعة بانتظـــام على طول القضيب (i)(k) يتمثل في الشعاع :

$$\overline{f}^{s(q)} = \left[\overline{n}^1 \frac{l}{2} \quad \overline{p}^2 \frac{l}{2} \quad \overline{p}^2 \frac{l^2}{12} \quad \overline{n}^1 \frac{l}{2} \quad \overline{p}^2 \frac{l}{2} \quad -\overline{p}^2 \frac{l^2}{12} \right] \qquad (5\text{-}138)$$

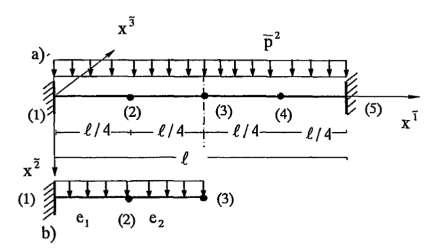
و هذه النتائج هي نفسها للتطبيقات الثلاث لطريقة العناصر المنتهية .

و على هذا الأساس تكون جملة المعادلات الخطية النهائية لكامل المنشـــأ الإطــاري واحـــدة في التطبيقات الثلاثة . إلا أن اختلاف الحسابات عن بعضها البعض يظهر أثناء حساب الانتقـــالات ضمن العنصر و حسابات القوى الداخلية على المستوى العنصر و المثال التـــالي ســـيوضح هـــذه الاختلافات .

مثال 5–1:

يطلب حساب الانتقالات و قوى المقطع لجائز موثوق من الطرفين،طوله L و صلابته ثابتـــة EI مقسم إلى أربعة عناصر منتهية (شكل م5–1) و يتعرض لحمولة خطية موزعة بانتظام على كـــامل الطول شدتها p . و ذلك باستخدام التطبيقات الثلاثة المذكورة في الفقرات 5–4 ،5–5، 5–6 .

يقسم الجائز إلى أربعة عناصر منتهية l_1, l_2, l_3, l_4 أطوالها متساوية و طول كل منــــها $(\frac{l}{4})$، تستخدم خاصية التناظر للإقلال من عدد المجاهيل إذ يكتفى بحل نصف الجائز اليساري . و تكـون الانتقالات والقوى في النصف اليميني مكافئة لمثيلاتها في النصف اليساري. يجب الانتباه هنـــا إلى الشروط الطرفية كقيم الانتقالات و الدورانات في العقدة (1) (الوثاقة) معدومة.أما في العقـــدة التي يمر بها محور التناظر (3) فالدوران فيها معدوم $(\varphi_{3(3)} = 0)$.



شكل م 5–1 : جائز موثوق من الطرفين a) المحاور الإحداثية ، التقسيم إلى عناصر منتهية ، الحمولات b)استخدام خاصية التناظر

ينسب الجائز إلى جملة محاور إحداثية عامة. و ينسب كل عنصر إلى جملة محاور إحداثية خاصة به. و في هذه الحالة تكون الجملتان متطابقتان و مصفوفة التحويل تكون مكافئة للمصفوفة الواحديـة. تشكل مصفوفة القساوة الخاصة بكل عنصر في الجملة الإحداثية الخاصة وفق العلاقـة (5-137) و يشكل شعاع القوى المركزة على العقد المكافئ للحمولة الموزعة وفق العلاقة (5-138) و تجمـــع على كامل الجملة بعد نسبها إلى المحاور الإحداثية العامة فتتشكل لدينا جملة المعــــادلات الخطيـــة النهائية بعد معالجة الشروط الطرفية و هذه الجملة تتلخص في جملة المعادلات التالية :

$$\frac{64EI_2}{l}\begin{bmatrix}24 & 0 & -12\\ 0 & \frac{l^2}{12} & -\frac{6l}{4}\\ -12 & -\frac{6l}{4} & 12\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u^0_{2(2)}\\ \varphi_{3(2)}\\ u^0_{2(3)}\end{bmatrix}=\bar{p}^2\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

بحل هذه المعادلات نحصل على انتقالات العقد المجهولة:

$$\begin{bmatrix}u^0_{2(2)}\\ \varphi_{3(2)}\\ u^0_{2(3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9}{16}\frac{\bar{p}^2l^4}{384EI_3}\\ \frac{\bar{p}^2l^3}{128EI_3}\\ \frac{\bar{p}^2l^4}{384EI_3}\end{bmatrix}$$

حساب الانتقالات ضمن العناصر و قوى المقطع لنموذج الانتقالات.

العنصر e_1 . يعطى التابع التقريبي للانتقالات ضمن العنصر e_1 بالعلاقة :

$$u^0_2=\begin{bmatrix}1-3\frac{(x^1)^2}{(\frac{l}{4})^2}+2\frac{(x^1)^3}{(\frac{l}{4})^3} & x^1-2\frac{(x^1)^2}{\frac{l}{4}}+\frac{(x^1)^3}{(\frac{l}{4})^2} & 3\frac{(x^1)^2}{(\frac{l}{4})^2}-2\frac{(x^1)^3}{(\frac{l}{4})^3} & -\frac{(x^1)^2}{\frac{l}{4}}+\frac{(x^1)^3}{(\frac{l}{4})^2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\ \frac{9}{16}\frac{\bar{p}^2l^4}{384EI_3}\\ \frac{\bar{p}^2l^3}{128EI_3}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\bar{p}^2}{384EI_3}\left[15(x^1)^2l^2-24(x^1)^3l\right]$$

وبهذا التابع يمكن حساب الانتقالات في أي نقطة من العنصر e_1 بتعويض احداثي هذه النقطة x^1 ،الذي يتحول من 0 إلى $\frac{l}{4}$. في العلاقة السابقة،يجري حساب قوى المقطع باستخدام علاقات قوى المقطع-الانتقالات و عليه يكون تابع العزم M^3 و تابع القوة القاصة Q^2 مساويين لما يلي:

$$M^3 = -\frac{\bar{p}^2}{384}\left[30l^2 - 144(x^1)l\right]$$

$$Q^2 = \frac{\bar{p}^2}{384}.144l$$

و يجري حساب العزم M^3 و القوة القاصة Q^2 في أي نقطة بتعويض احداثياتهـــا x^1 في التوابـــع السابقة و هي في العقدة (1) حيث $x^1 = 0$ مساوية لـــ:

$$M^3_{(1)} = -0.078125.\bar{p}^2 l^2$$

$$Q^2_{(1)} = 0.375.\bar{p}^2 l$$

و هي في العقدة (2) حيث $x^1 = \frac{1}{4}$ مساوية لـــ

$$M^3_{(2)} = -0.015625.\bar{p}^2 l^2$$

$$Q^2_{(2)} = 0.375.\bar{p}^2 l$$

العنصر e_2 :

يعطى التابع التقريبي للانتقالات ضمن العنصر e_2 بالعلاقة :

$$u_2^0 = \left[1-3\frac{(x^1)^2}{(\frac{1}{4})^2}+2\frac{(x^1)^3}{(\frac{1}{4})^3} \quad x^1-2\frac{(x^1)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{(x^1)^3}{(\frac{1}{4})^2} \quad 3\frac{(x^1)^2}{(\frac{1}{4})^2}-2\frac{(x^1)^3}{(\frac{1}{4})^3} \quad -\frac{(x^1)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{(x^1)^3}{(\frac{1}{4})^2}\right].\begin{bmatrix} \frac{9}{16384}\frac{\bar{p}^2 l^4}{EI_3} \\ \frac{\bar{p}^2 l^3}{128 EI_3} \\ \frac{\bar{p}^2 l^4}{384 EI_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\bar{p}^2}{384 EI_3}\left[\frac{9}{16}l^4 + 3(x^1)l^3 - 3(x^1)^2 l^2 - 8(x^1)^3 l\right]$$

وعليه تكون توابع قوى المقطع :

$$M^3 = -\frac{\overline{p}^2}{384}\left[6l^2 - 48(x^1)l\right]$$

$$Q^2 = \frac{\overline{p}^2}{384}.(48l)$$

و في العقدة (2) حيث $x^1 = 0$ يكون :

$$M^3_{(2)} = 0.015625.\overline{p}^2 l^2$$

$$Q^2_{(2)} = 0.125.\overline{p}^2 l$$

و في العقدة (3) حيث $x^1 = \frac{1}{4}$ يكون :

$$M^3_{(3)} = 0.046875.\overline{p}^2 l^2$$

$$Q^2_{(3)} = 0.125.\overline{p}^2 l$$

يلاحظ في هذا الحل أن قيم انتقالات العقد الناتجة مطابقة للحل الدقيق،أما بالنسبة لقيم العزوم فلا تتطابق مع الحل الدقيق ،و الخطأ الناتج عن الحل بطريقة العناصر المنتهية–نموذج الانتقال يبلغ 6.25% من قيمة العزم عند عقدة الاستناد (1) و 25% من قيمة القوة القاصة عند العقدة نفسها. و يلاحظ أيضاً أن تابع القوة القاصة لا يتمتع بالاستمرارية،؟ إذ أن حسابات القوة القاصة في العقدة (2) التي يشترك بها العنصران e_2, e_1 مختلفة عن بعضها البعض عند حسابها من العنصر e_1 و من العنصر e_2 .

مثال 5–2: حل المثال السابق وفق التطبيق الهجين–نموذج الاجهادات:

قلنا أن جملة المعادلات الخطية للجائز في هذا التطبيق مطابقة تماماً لمثيلتهافي المثال السابق و بالتالي انتقالات العقد المجهولة مطابقة أيضاً للمثال السابق . بعد حساب المجاهيل في المحاور الإحداثية العامة يمكن الآن دراسة كل عنصر من عناصر الجائز .

العنصر e_1 :

نحول أولاً انتقالات عقد العنصر e_1 من المحاور الإحداثية العامة إلى المحاور الإحداثية الخاصة بالعنصر . بعد ذلك يمكن في مستوي العنصر حساب المجاهيل وفق العلاقة :

$$\beta_r = H_{kr}(-\overline{H}_l^k.\overline{\beta}^l + T^{kj}.u_j$$

و كل المصفوفات أو الأشعة الواردة في العلاقة السابقة مطورة في حالة عنصر اطاري فراغــــي و بالتالي فعناصر هذه المصفوفات أو الأشعة لحالة إطار مستوي محتواة كلها في مثيلاتها مــــن حالــة العنصر الإطاري الفراغي، و على القارئ استخلاصها من حالة العنصر الإطــاري الفراغـــي، أو تطويرها بنفسه للحالة المستوية بشكل شبيه لما ورد في الفقـــرة 5-5 . و يكتفـــى الآن بإعطـــاء النتيجة.

$$\begin{bmatrix}\beta_3\\ \beta_4\end{bmatrix} = \frac{\overline{p}^2}{EI_3}\begin{bmatrix}\frac{1}{24}(\frac{l}{4})^2\\ -\frac{1}{12}(\frac{l}{4})\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\frac{3}{(\frac{l}{4})^2} & -\frac{2}{(\frac{l}{4})} & \frac{3}{(\frac{l}{4})^2} & -\frac{1}{(\frac{l}{4})}\\ \frac{2}{(\frac{l}{4})^3} & \frac{1}{(\frac{l}{4})^2} & -\frac{2}{(\frac{l}{4})^3} & \frac{1}{(\frac{l}{4})^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{9}{16}.\frac{l^4}{384}\\ \frac{l^3}{128}\end{bmatrix}.\frac{\overline{p}^2}{EI_3}$$

$$= \frac{\overline{p}^2}{EI_3}\begin{bmatrix}\frac{l^2}{24}\\ -\frac{1}{12}\end{bmatrix}$$

و عليه يكون تابع العزم M^3 مكافئا لـــ:

$$M^3 = EI_3\begin{bmatrix}-2 & -6x^1\end{bmatrix}\frac{\overline{p}^2}{EI_3}\begin{bmatrix}\frac{l^2}{24}\\ -\frac{l}{12}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\frac{(x^1)^2}{2}\end{bmatrix}.\overline{p}^2$$

$$= \overline{p}^2\left[-\frac{l^2}{12} + \frac{(x^1).l}{2} - \frac{(x^1)^2}{2}\right]$$

و تابع القوة القاصة Q^2 :

$$Q^2 = \overline{p}^2[\frac{l}{2} - x^1]$$

و قيمة هذه التوابع في العقدة (1) حيث $x^1 = 0$ هي:

$$M^3_{(1)} = -\overline{p}^2 \frac{l^2}{12}$$

$$Q^2_{(1)} = \overline{p}^2 \frac{l}{2}$$

و في العقدة (2) حيث $x^1 = \frac{l}{4}$:

$$M^3_{(2)} = -\overline{p}^2 \frac{l^2}{96}$$

$$Q^2_{(2)} = \overline{p}^2 \frac{l}{2}$$

العنصر e_2 :

في العنصر e_2 لدينا :

$$\begin{bmatrix}\beta_3\\ \beta_4\end{bmatrix} = \frac{\overline{p}^2}{EI_3}\begin{bmatrix}\frac{1}{24}(\frac{l}{4})^2\\ -\frac{1}{12}(\frac{l}{4})\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\frac{3}{(\frac{l}{4})^2} & -\frac{2}{(\frac{l}{4})} & \frac{3}{(\frac{l}{4})^2} & -\frac{1}{(\frac{l}{4})}\\ \frac{2}{(\frac{l}{4})^3} & \frac{1}{(\frac{l}{4})^2} & -\frac{2}{(\frac{l}{4})^3} & \frac{1}{(\frac{l}{4})^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{9}{16}.\frac{l^4}{384}\\ \frac{l^3}{128}\\ \frac{l^4}{384}\\ 0\end{bmatrix}.\frac{\overline{p}^2}{EI_3}$$

$$= \frac{\overline{p}^2}{EI_3}\begin{bmatrix}-\frac{2l^2}{384}\\ -\frac{16l^2}{384}\end{bmatrix}$$

و عليه يكون تابع العزم M^3 :

$$M^3 = EI_3\left[-2 \quad -6x^1\right]\frac{\overline{p}^2}{EI_3}\begin{bmatrix}-\frac{2l^2}{384}\\ -\frac{16l^2}{384}\end{bmatrix} + \left[-\frac{(x^1)^2}{2}\right].\overline{p}^2$$

$$= \overline{p}^2\left[-\frac{l^2}{96} + \frac{(x^1).l}{4} - \frac{(x^1)^2}{2}\right]$$

و تابع القوة القاصة :

$$Q^2 = \overline{p}^2[\frac{l}{4} - x^1]$$

و قوى المقطع في العقدة (2) حيث $x^1 = 0$:

$$M^3_{(2)} = -\overline{p}^2 \frac{l^2}{96}$$

$$Q^2_{(2)} = \overline{p}^2 \frac{l}{4}$$

و في العقدة (3) حيث $x^1 = \frac{l}{4}$:

$$M^3_{(3)} = -\overline{p}^2 \frac{l^2}{24}$$

$$Q^2_{(3)} = 0$$

يلاحظ في هذا الحل أن قيم انتقالات العقد مطابقة للحل الدقيق. كما أن تابعي قوى المقطع للعزم و القوة القاصة يتمتعان بالاستمرارية و مطابقان للحل الدقيق و هذا يرجع إلى حسن اختيار التوابع التقريبية لقوى المقطع. و القارئ المتنبه سوف يلاحظ أن توابع قوى المقطع مشتقة أصلا من توابع انتقالات تقريبية تحقق المعادلات التفاضلية للمسألة ضمن العنصر المنتهي .

مثال 5-3: الحل باستخدام التطبيق المقترح لنموذج الانتقالات مع اعتبار الحمولة:

في التطبيق المقترح تبقى جملة المعادلات الخطية النهائية مطابقة تماما للمثالين السابقين و يختلف تابع الانتقالات التقريبي ضمن العنصر عن نظيره في التطبيق التقليدي لنموذج الانتقالات بوجود الحد غير المتجانس المتعلق بالحمولة. ننتقل الآن إلى حساب الانتقالات ضمن العناصر المنتهية و قوى المقطع فيها.

العنصر e_1 :

يعطى الآن التابع التقريبي للانتقالات بالشكل:

$$u_2^0=\left[1-3\frac{(x^1)^2}{(\frac{l}{4})^2}+2\frac{(x^1)^3}{(\frac{l}{4})^3}\quad x^1-2\frac{(x^1)^2}{\frac{l}{4}}+\frac{(x^1)^3}{(\frac{l}{4})^2}\quad 3\frac{(x^1)^2}{(\frac{l}{4})^2}-2\frac{(x^1)^3}{(\frac{l}{4})^3}\quad -\frac{(x^1)^2}{\frac{l}{4}}+\frac{(x^1)^3}{(\frac{l}{4})^2}\right].$$

$$\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{9}{16}\frac{\overline{p}^2l^4}{384EI_3}\\\frac{\overline{p}^2l^3}{128EI_3}\end{bmatrix}+\frac{\overline{p}^2}{EI_3}\left[\frac{(\frac{l}{4})^2(x^1)^2}{24}-\frac{\frac{l}{4}(x^1)^3}{12}+\frac{(x^1)^4}{24}\right]=\frac{\overline{p}^2}{EI_3}\left[\frac{l^2(x^1)^2}{24}-\frac{l(x^1)^3}{12}+\frac{(x^1)^4}{24}\right]$$

و عليه تكون توابع قوى المقطع :

$$M^3=\overline{p}^2\left[-\frac{l^2}{12}+\frac{l(x^1)}{2}-\frac{(x^1)^2}{2}\right]$$

$$Q^2=\overline{p}^2\left[\frac{l}{2}-x^1\right]$$

و في العقدة (1) حيث $x^1=0$ يكون :

$$M^3_{(1)}=-\overline{p}^2\frac{l^2}{12}$$

$$Q^2_{(1)}=\overline{p}^2\frac{l}{2}$$

و في العقدة (2) حيث $x^1=\frac{l}{4}$ يكون :

$$M^3_{(2)}=-\overline{p}^2\frac{l^2}{96}$$

$$Q^2_{(2)}=\overline{p}^2\frac{l}{4}$$

العنصر e_2:

في العنصر e_2 لدينا :

$$u_2^0=\left[1-3\frac{(x^1)^2}{(\frac{1}{4})^2}+2\frac{(x^1)^3}{(\frac{1}{4})^3}\quad x^1-2\frac{(x^1)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{(x^1)^3}{(\frac{1}{4})^2}\quad 3\frac{(x^1)^2}{(\frac{1}{4})^2}-2\frac{(x^1)^3}{(\frac{1}{4})^3}\quad -\frac{(x^1)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{(x^1)^3}{(\frac{1}{4})^2}\right].$$

$$\cdot\begin{bmatrix}\frac{9}{16384}\frac{\bar{p}^2 l^4}{EI_3}\\ \frac{\bar{p}^2 l^3}{128EI_3}\\ \frac{\bar{p}^2 l^4}{384EI_3}\\ 0\end{bmatrix}+\frac{\bar{p}^2}{EI_3}\left[\frac{(\frac{1}{4})^2(x^1)^2}{24}-\frac{\frac{1}{4}(x^1)^3}{12}+\frac{(x^1)^4}{24}\right]$$

$$=\frac{\bar{p}^2}{EI_3}\left[\frac{9}{16384}l^4+\frac{3l^3(x^1)}{384}-\frac{l^2(x^1)^2}{192}-\frac{l(x^1)^3}{24}+\frac{(x^1)^4}{24}\right]$$

و بالتالي تكون توابع قوى المقطع :

$$M^3=\bar{p}^2\left[-\frac{l^2}{96}+\frac{l(x^1)}{4}-\frac{(x^1)^2}{2}\right]$$

$$Q^2=\bar{p}^2\left[\frac{l}{4}-x^1\right]$$

و قوى المقطع في العقدة (2) حيث $x^1=0$ يكون :

$$M^3_{(2)}=-\bar{p}^2\frac{l^2}{96}$$

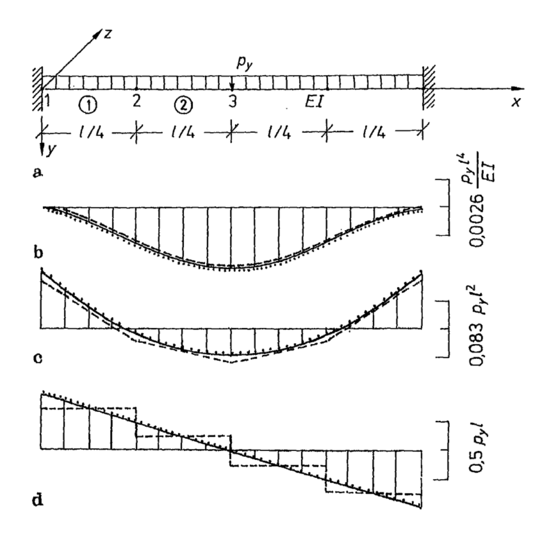
$$Q^2_{(2)}=\bar{p}^2\frac{l}{4}$$

و في العقدة (3) حيث $x^1=\frac{l}{4}$ يكون :

$$M^3_{(3)}=\bar{p}^2\frac{l^2}{24}$$

$$Q^2_{(3)}=0$$

و يلاحظ في هذا الحل أن الانتقالات بالإضافة إلى قوى المقطع تتطابق مع الحل الدقيق . و الحلول الثلاثة ممثلة إلى جانب الحل الدقيق في الشكل (م5-2)



شكل 5-م2: جائز بسيط موثوق من الطرفين تحت تأثير حمولة خطية موزعة بانتظام

الخط المستمر : الحل الدقيق

الخط المتقطع : الحل باستخدام نموذج الا نتقالات

الخط المنقط : الحل باستخدام النموذج الهجين ، والنمـــوذج المقـترح للانتقـالات المتعلقـة بالحمولات

المصادر العلمية المستخدمة:

1.Mueller,H. ; Jaeger, W.

Stabtragwerke (STATRA) Programmsystem ; Beitraege (4) ,
Berechnunug des Schnittkraft-und Verschiebungszustandes nach Elastizitaetstheorie I. und II.Ordnung sowie lineasierte Stabilitaetsuntersuchung raeumlicher Stabtragwerke , Baustein 8 des Programmsystems STATRA , Grundlagen und Beispiele , Bauforschung Baupraxis ,
Bauinformation der DDR , Berlin 1982, H. 95

2.Mueller,H. ; Graf, W.
Stabtragwerke (STATRA) Programmsystem ; Beitraege (6) , lineare Kinetik von Stabtragwerken , Bausteine 4 und 7 des Programmsystems STATRA , Grundlagen und Beispiele , Bauforschung Baupraxis , Bauinformation der DDR , Berlin 1984, H. 139

3..Tong , P. ; Mau ,S. T. ; Pian, T. H. H.
Derivation of geometric stiffness and mass matrices for finite element hybrid models, Int. J. Solids Structures , Vol 1-10, p. 919-932, Pergamon Press., England ,1974

4. Pian , T. H. H.
Element stiffness-matrices for boundary compatibility and for prescribed boundary stresses . in : Matrix Method 2 , Session 3, Finite element properties, Proceedings of conference on matrix methods in structural mechanics , held 26-28, Wright-Pattersson AFE, Ohio, 1965.

5. Walder, U.
Beitrag zur Berchnung von Flaechentragwerken nach der Methode der Finiten Elemente, Institut fuer Baustatik und Konstruktion, ETH Zuerich, Bericht Nr. 77 ,1977.

6. Olson , D. M.
The mixed finite element method in elasticity and elastic contact problems , in: Hybrid and mixed finite element method , edited by S. N. Atluri, R. H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz, John Wiley & Sons, Chichester 1983, P. 19-47.

7. Wunderlich, W.
Mixed models for plates and shells, principles-elements-examples, in: Hybrid and mixed finite element method , edited by S. N. Atluri, R. H.

Gallagher and O. C.
Zienkiewicz, John Wiley & Sons, Chichester , Singapore, 1983, P. 215-239.

8.Abo Diab, S.
Entwicklung und Einsatz hybrider finiter Elemente fuer Aufgaben der linearen Statik und Kinetik von Stabtragwerkren kompakte gerade Staebe , Bauingenieur 66, P. 437-440 , Springer-Verlag, 1991.

9. Jerousek,J. ; Guex, L.
The hybrid Trefftz finite element model and its application to plate bending, Int. J. Num. Meth. Eng. , Vol. 13, P. 651-93, 1986.

10. Kolar, V. ; Kratochvil,J.; Leitner, F.; Zinesek, A.
Berechnung von Flaechen-und Raumtragwerken nach der Methode der finiten Elemente, Springer-Verlag , Wien New-York, 1975.

11.Klingmueller, O. ; Lawo, M. ; Thierauf, G.
Stabtragwerke , Matrizen Methoden der Statik und Dynamik , Teil 1 und 2 , Vieweg, Braunschweig, 1983.

12. Szilard, R
Finite Berchnungsmethoden der Struktur Mechanik, Stabwerke Band 1, Verlag Ernst & Sohn , Berlin (W.), Muenchen, 1982.

13. Szilard, R.; Ziesing, D.; Pickhardt, S.

Basic-Programme fuer Baumechanik , Stabwerke Band 1, Verlag Ernst & Sohn , Berlin (W.), Muenchen, 1986.

14. Bathe, K.-J.
Finite-Element-Methoden, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo,1986
]
15. Abo Diab, S.
Direkte Zuordnung des Verschiebungs-und Schnittkraftzustandews zum Belastungszustand bei Finite Elemente Displacementsmehode. In: Festschrift o. Prof. Dr.-Ing. Habil. H. Mueller 65. Jahre ehemalige Doktoranden gratulieren Technische Universitaet Dresden, 1994.

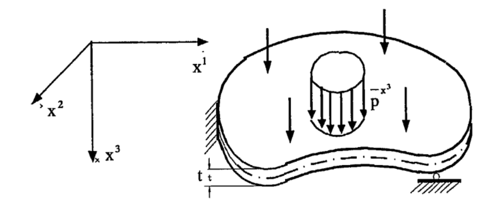
16. Abo Diab ,S.
DE-Variational Formulation and FEM Solution, Int. J. Num. Meth . Eng.,1992 (not published),Paper Nr.2130.

17. Abo Diab ,S.
Differential equation variational formulation for plate bending, Int. J. Num. Meth . Eng.,1992 (not published),Paper Nr.2198.

18. Schiefner, R.
Geometrisch und physikalisch nichtlineare Statik raeumlich wirkender Staebe und Stabtragwerke aus homogenen Werkstoff bei kontinuierlicher Plastizierung- Ein Beitrag zum Programmsystem STATRA-FEM ,TU Dresden, Diss. B,1988.

6-عناصر منتهية لحل البلاطات الرقيقة

البلاطات الرقيقة هي منشآت مستوية ينحصر حجمها بين مستويين متوازيين البعد بينهما و الـذي هو سماكة البلاطة أصغر بعشرين مرة على الأقل من أصغر بعد لها .و على هذا الأســـاس يمكـــن الاستغناء عن دراسة البلاطة في الفراغ الثلاثي الأبعاد و الاكتفاء بدراستها في مستوى وسطي ممثل لمستوي البلاطة (المستوي المحدد بالخط المحوري) شكل(6-1) ويفترض أيضاً في طبيعة البلاطـة أن تطبق الحمولات الخارجية عليها في مستويات عمودية على مستوى البلاطـــة. .تخضـــع النظريـــة الكلاسيكية لدراسة البلاطات الرقيقة إلى جملة فرضيات تسهيلية توجز بما يلي :



شكل 6-1: بلاطة مستوية ،المحاور الإحداثية ،الحمولات،طبيعة الاستناد،المستوي الوسطي

1.إن انتقالات نقاط المستوي الوسطي للبلاطة صغيرة بالنسبة لسماكة البلاطة. بعد التشوه تشكل نقاط هذا المستوي سطحاً وسطياً يفترض أن تكون ميوله صغيرة و بالتالي يمكن اعتبار مربع هـــذا الميل صغير جداً بالنسبة للواحد .

2.يفترض أن لا يحصل في السطح الوسطي للبلاطة تشوهات ، وهذا السطح الوســـطي يسّـــمى السطح المحايد للبلاطة.

3.تعتبر نظريات كيرشوف – لوف Kirchhoff - Love سارية المفعول .وهي تقتضي بأن تبقي المقاطع المستوية العمودية على السطح الوسطي قبل الانتقال مستوية و عمودية على السطح الوسطي بعد حصول الانتقال ،و هذه الفرضية مقابلة لمثيلتها التي افترضت أثناء دراسة الإطارات . يمكن اعتبار الاجهادات الناظمية على مستوى البلاطة صغيرة مقارنة بالاجهادات الأخرى الحاصلة ولذلك يمكن إهمالها .

جرت العادة أن تتم دراسة البلاطات ذات الأشكال الهندسية البسيطة والمنتظمة في المستوي الديكارتي وتتعقد هذه الدراسة بتعقد الأشكال الهندسية للبلاطة أوكما يقال في حال وجود طبولوجيه هندسية معقدة . ويلجأ عندها عادةً إلى استخدام ما يسمى بالإحداثيات الطبيعية . وباعتبار أن استخدام الإحداثيات الطبيعية ساري المفعول أيضا على الأشكال الهندسية البسيطة لذلك يفضل هنا منذ البداية استخدام الإحداثيات الطبيعية ولهذا لابد من البدء بالتعرف على هذه الإحداثيات وإتقان علاقات التحويل بينها وبين الإحداثيات الديكارتية . والفقرة التالية ستعرفنا ببعض المصطلحات اللازمة لتحقيق مثل هذا الغرض .

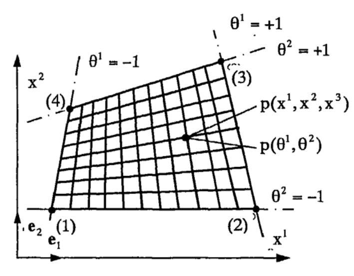
6–1–استخدام التوابع التقريبية في التحويل بين الإحداثيات الطبيعية (المنحنية) والديكارتية

6–1–1–الإحداثيات الطبيعية (المنحنية) و اختيار التوابع التقريبية

من الإحداثيات المنحنية المعروفة و المستخدمة بكثرة يمكن أن نذكر الإحداثيات الكروية و الإحداثيات الأسطوانية .يتم تحديد نقطة ما من قشرة كروية أو قشرة أسطوانية تحديدا تاما بمعرفة إحداثياتها الكروية أو إحداثياتها الأسطوانية و هناك علاقة تحليلية دقيقة تربط بين الإحداثيات الديكارتية من جهة وكل من الإحداثيات الأسطوانية والكروية من جهة أخرى. وباستخدام هذه العلاقات التحليلية يمكن الانتقال إلى الإحداثيات الديكارتية بسهولة . في بعض أنواع الإحداثيات الطبيعية لا توجد هناك علاقات تحليلية دقيقة تربط بين الإحداثيات الطبيعية و الإحداثيات الديكارتية و لذلك يلجأ إلى استخدام التوابع التقريبية لإيجاد مثل هذه العلاقات. لنقتطع الآن من

البلاطة المبينة في الشكل (6-1) عنصراً على شكل شبه منحرف شكل (6-2) ,رؤوسه ممثلة بالعقد (4),(3),(2),(1) ومنسوب إلى جملة الإحداثيات الديكارتية x^1,x^2 بأشعتها الواحدية e_1,e_2 .شبه المنحرف هذا معين تماماً بإحداثيات رؤوسه والتي هي على التوالي :

$(x^1_{(1)},x^2_{(1)},x^1_{(2)},x^2_{(2)},x^1_{(3)},x^2_{(3)},x^1_{(4)},x^2_{(4)})$



شكل(6-2): الإحداثيات الطبيعية لشبة المنحرف

لنعتبر الآن الإحداثيات الطبيعية (θ^1,θ^2) بحيث يكون الأحداثي الطبيعي $\theta\,\theta^2$ على طول حرف شبه المنحرف (2)(1) ثابتاويساوي1 – وعلى الحرف المقابل ثابتاً أيضاًويساوي 1 +، و الإحداثي الطبيعي θ^1 على طول الحرف (4)(1) ثابتا ويساوي أيضا 1– وعلى الحرف المقابل له (3)(2) مساوياً1+ . و بالتالي يمكن رسم شبكة من الخطوط (في الحالة العامة غير متوازية) احداثياتها الطبيعية (θ^1,θ^2) تتحول بين القيمتين 1-,1+ .ويمكن تعيين أي نقطة P من شبه المنحرف باعتبارها نقطة تقاطع خطين مستقيمين الأول منهما فيه θ^1 ثابتة و θ^2 تتحول بين القيمتين1-,1+ والثاني فيه θ^2 ثابتة و قيمة θ^1 تتحول بين القيمتين 1-,1+ ، أو باختصار بالإحداثيات الطبيعية $p(\theta^1,\theta^2)$ وبالتالي تكون لرؤوس شبه المنحرف على التوالي الإحداثيات الطبيعية (1)(-1,-1),(2)(1,-1), (3)(1,1), (4)(-1,1) .

لنفرض أن النقطة P معينة أيضا بأحداثياتها الديكارتية $p(x^1,x^2)$. علينا الآن إيجاد علاقة تقريبية تربط بين الإحداثيات الطبيعية والإحداثيات الديكارتية . لهذا الغرض نفرض أننا نستطيع حساب الإحداثيات الديكارتية بالتوابع التقريبية التالية :

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 & \theta^1 & \theta^2 & \theta^1\theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^1{}_1 \\ c^1{}_2 \\ c^1{}_3 \\ c^1{}_4 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 1 & \theta^1 & \theta^2 & \theta^1\theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2{}_1 \\ c^2{}_2 \\ c^2{}_3 \\ c^2{}_4 \end{bmatrix}$$

$$x^i = \theta^\alpha c^i{}_\alpha \tag{6.1}$$

حيث c^i_α ثوابت اختيارية ليس لها إلى الآن أي صبغة هندسية ويجب تعيينها .

θ^α التابع التقريبي في θ^2,θ^1 هذا الاختيار شبيه بما ورد في طريقة العناصر المنتهية ويجب أن يكون عدد الثوابت الاختيارية بحيث يمكن تحديدها. لتعيين هذه الثوابت الاختيارية نستخدم المحاكمة المنطقية التالية : إذا كانت هذه التوابع تمكننا فعلاً من حساب الإحداثيات الديكارتية لنقطة ما إذا ما علمت إحداثياتها الطبيعية فإن تعويض الإحداثيات الطبيعية لرؤوس شبه المنحرف في هذه العلاقات يجب أن يعطي الإحداثيات الديكارتية لهذه الرؤوس وبالتالي يكون :

$$\begin{bmatrix} x^1_{(1)} \\ x^1_{(2)} \\ x^1_{(3)} \\ x^1_{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^1{}_1 \\ c^1{}_2 \\ c^1{}_3 \\ c^1{}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^2_{(1)} \\ x^2_{(2)} \\ x^2_{(3)} \\ x^2_{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2{}_1 \\ c^2{}_2 \\ c^2{}_3 \\ c^2{}_4 \end{bmatrix}$$

$$x^i_{(k)} = \bar{\theta}^\alpha{}_k c^i{}_\alpha ; (k) = (1), (2), (3), (4) \qquad (6\text{-}2)$$

والمعادلات السابقة تمكننا من تحديد الثوابت الاختيارية بدلالة الإحداثيات الديكارتية لرؤوس شبة المنحرف .بعد حل هذه المعادلات نحصل على :

$$\begin{bmatrix} c^1{}_1 \\ c^1{}_2 \\ c^1{}_3 \\ c^1{}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1_{(1)} \\ x^1_{(2)} \\ x^1_{(3)} \\ x^1_{(4)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c^2{}_1 \\ c^2{}_2 \\ c^2{}_3 \\ c^2{}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2_{(1)} \\ x^2_{(2)} \\ x^2_{(3)} \\ x^2_{(4)} \end{bmatrix}$$

$$c^i{}_\alpha = \hat{\theta}^{(k)}{}_\alpha x^i{}_k \qquad (6.3)$$

وبتعويض هذه العلاقات في العلاقات (6-1) نحصل على العلاقات المرغوبة الـتي تربـط بـين الإحداثيات الطبيعية لنقطة ما لا على التعين والإحداثيات الديكارتية وهذه العلاقات هي:

$$x^i = \theta^\alpha \hat{\theta}^{(k)}{}_\alpha x^i{}_k = \Omega^{(K)} x^i{}_k \qquad (6.4)$$

حيث $\Omega(K)$ هي توابع الشكل.

تتألف العلاقات (6-4) مفصلة من معادلتين هما :

$$x^1 = \begin{bmatrix}\Omega^{(1)} & \Omega^2 & \Omega^{(3)} & \Omega^{(4)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1{}_{(1)}\\ x^1{}_{(2)}\\ x^1{}_{(3)}\\ x^1{}_{(4)}\end{bmatrix}$$

(6.5)

$$x^2 = \begin{bmatrix}\Omega^{(1)} & \Omega^2 & \Omega^{(3)} & \Omega^{(4)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^2{}_{(1)}\\ x^2{}_{(2)}\\ x^2{}_{(3)}\\ x^2{}_{(4)}\end{bmatrix}$$

حيث :

$$\Omega^{(1)} = \frac{1}{4}(1-\theta^1)(1-\theta^2) \quad ; \quad \Omega^{(2)} = \frac{1}{4}(1+\theta^1)(1-\theta^2)$$
$$\Omega^{(3)} = \frac{1}{4}(1+\theta^1)(1+\theta^2) \quad ; \quad \Omega^{(4)} = \frac{1}{4}(1-\theta^1)(1+\theta^2) \qquad (6.6)$$

هي توابع الشكل الآنفة الذكر.

6-1-2- شعاع المكان لنقطة ما لا على التعيين من شبة المنحرف

يعطى شعاع المكان لنقطة ما لا على التعيين $P(x^1, x^2)$ في الإحداثيات الديكارتية بالعلاقة :

$$\mathbf{r} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 \qquad (6.7)$$

وبالتالي يمكن حساب شعاع المكان لأي نقطة من شبه المنحرف إذا مـا أعطيـت الإحداثيـات الديكارتية لهذه النقطة . و في الحالة التي تعطى فيها الاحدثيات الطبيعية لهذه النقطة و الاحدثيـات الديكارتية لرؤوس شبة المنحرف يمكن حساب شعاع المكان بالعلاقة :

$$\mathbf{r} = \Omega^{(k)} x^i{}_{(k)} \mathbf{e}_i \qquad (6.8)$$

و ذلك بعد ملاحظة العلاقة (6 . 4) . و باعتبار $\mathbf{r}_{(k)}$ أشعة المكان لرؤوس شبة المنحرف نجد أن:

$$\mathbf{r}_{(k)} = x^i{}_{(k)} \mathbf{e}_i \qquad (6.9)$$

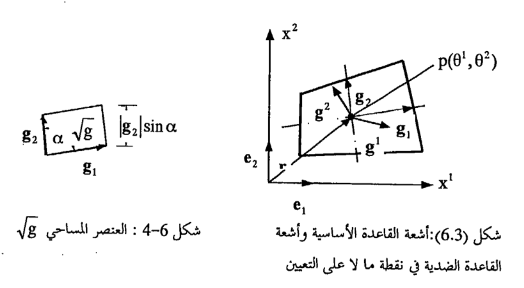
و بالتالي يمكن كتابة العلاقة (6 . 8) بالشكل:

$$\mathbf{r} = \Omega^{(k)} \mathbf{r}_{(k)} \qquad (6.10)$$

أي أنة يمكن إيجاد شعاع المكان لنقطة ما لا على التعيين من شبة المنحرف بمعرفـــة الاحداثيـــات الطبيعية لهذه النقطة و الاحداثيات الديكارتية لرؤوسه .

6-1-3- أشعة القاعدة الأساسية :

تسمى الأشعة غير الواحدية المماسة للخطوط الاحداثية الطبيعية في نقطة ما $P(\theta^1,\theta^2)$ بأشـــعة القاعدة الأساسية . و الشعاع $\mathbf{g}_1$ المماس للخـــط الاحداثـــي الطبيعـــي θ^1 و الـــذي عليـــه $(\theta^2 = const)$ هو المشتق الجزئي لشعاع المكان بالنسبة للاحداثي θ^1، و الشعاع $\mathbf{g}_2$ الممـــاس للخط الاحداثي الطبيعي θ^2 و الذي عليه $(const) = \theta^1$ هو المشتق الجزئي لشـــعاع المكـــان بالنسبة للاحداثي θ^2 شكل (6.3).



شكل (6.3):أشعة القاعدة الأساسية وأشعة القاعدة الضدية في نقطة ما لا على التعيين

شكل 6-4 : العنصر المساحي $\sqrt{g}$

و التعبير الرياضي عن هذا التعريف هو :.

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^1} = \mathbf{r}_{,1}$$
$$\mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^2} = \mathbf{r}_{,2} \qquad (6.11)$$

هاتان العلاقتان يمكن تجميعهما بالعلاقة الوحيدة التالية :

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} \qquad (6.12)$$

و القرينة α تتحول على الاحداثيات الطبيعية في الأسفل و عادة نختار الأحرف اليونانية كقرائن تتحول على الاحداثيات الطبيعية و الأحرف اللاتينية كقرائن تتحول على الاحداثيات الديكارتية .و الحساب التفصيلي لهذه الأشعة يتم بتعويض العلاقة (6 .10) في العلاقة (6.12) و من ثم تعويض العلاقة (6.9) في العلاقة الناتجة فنحصل على :

$$\mathbf{g}_\alpha = \Omega^{(k)}{}_{,\alpha} \; \mathbf{r}(k) = \Omega^{(k)}{}_{,\alpha} x^i{}_{(k)} \mathbf{e}_i = g^i{}_\alpha \mathbf{e}_i \qquad (6.13)$$

و مركبات هذه الأشعة في اتجاه المحورين الاحداثين الديكارتين هي :

$$g^i{}_\alpha = \Omega^{(k)}{}_{,\alpha} \; r^i{}_{(k)} \qquad (6.14)$$

و بما أن (k) تتحول عل العقد(4),(3) , (2),(1) و α و هي المشتق بالنسبة للإحداثيات الطبيعية θ^2,θ^1 على التوالي فالتوابع $\Omega^{(k)}{}_{,\alpha}$ تتألف من ثمانية توابع هي :

$$\Omega^{(1)}{}_{,1} = -\frac{1}{4}(1-\theta^2) \quad ; \quad \Omega^{(1)}{}_{,2} = -\frac{1}{4}(1-\theta^1)$$
$$\Omega^{(2)}{}_{,1} = \frac{1}{4}(1-\theta^2) \quad ; \quad \Omega^{(2)}{}_{,2} = -\frac{1}{4}(1+\theta^1)$$
$$\Omega^{(3)}{}_{,1} = \frac{1}{4}(1+\theta^2) \quad ; \quad \Omega^{(3)}{}_{,2} = \frac{1}{4}(1+\theta^1) \qquad (6.15)$$
$$\Omega^{(4)}{}_{,1} = -\frac{1}{4}(1+\theta^2) \quad ; \quad \Omega^{(4)}{}_{,2} = \frac{1}{4}(1-\theta^1)$$

ومفكوك العلاقة (6-13) يتمثل في:

$$\mathbf{g}_1 = (\Omega^{(1)}{}_{,1}x^1{}_{(1)} + \Omega^{(2)}{}_{,1}x^1{}_{(2)} + \Omega^{(3)}{}_{,1}x^1{}_{(3)} + \Omega^{(4)}{}_{,1}x^1{}_{(4)})\mathbf{e}_1 + (\Omega^{(1)}{}_{,1}x^2{}_{(1)} + \Omega^2{}_{,1}x^2{}_{(2)} + \Omega^{(3)}{}_{,1}x^2{}_{(3)} + \Omega^{(4)}{}_{,1}x^2{}_{(4)})\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{g}_2 = (\Omega^{(1)}{}_{,2}x^1{}_{(1)} + \Omega^{(2)}{}_{,2}x^1{}_{(2)} + \Omega^{(3)}{}_{,2}x^1{}_{(3)} + \Omega^{(4)}{}_{,2}x^1{}_{(4)})\mathbf{e}_1 + (\Omega^{(1)}{}_{,2}x^2{}_{(1)} + \Omega^2{}_{,2}x^2{}_{(2)} + \Omega^{(3)}{}_{,2}x^2{}_{(3)} + \Omega^{(4)}{}_{,2}x^2{}_{(4)})\mathbf{e}_2 \qquad (6\text{-}16)$$

و من هذه العلاقات التفصيلية يمكن استنتاج مركبات أشعة القاعدة الأساسية الممثلة بشكل مختصر في العلاقة (6.14).إذاً يمكن أن نحسب في كل نقطة من شبة المنحرف محدد برؤوسه الأربعـــة في الإحداثيات الديكارتية أشعة القاعدة الأساسية إذا ما أعطيت بالإضافة إلى الإحداثيات الديكارتيـة للرؤوس الأربعة الإحداثيات الطبيعية لهذه النقطة . و هذه الأشعة تتغير في الحالة العامة شـــدالها و اتجاهاتها من نقطة إلى أخرى و بالتالي أصبح لدينا في كل نقطة جملة أشعة قاعدة أساسية.بمقدورنـا تعينيها و لذلك نستطيع أن ننسب قيم التأثيرات الإنشائية في النقطة نفسها إلى تلك الجملة بشـكل مماثل لنسبها إلى جملة الأشعة الواحدية الديكارتية مع الفارق أن أطوال الأشعة القاعدية الأساسـية غير واحدية ، و أن اتجاهاتها متغيرة من نقطة إلى أخرى .

6-1-4 .المعاملات المترية الأساسية

تسمى الجداءات السلمية لأشعة القاعدة الأساسية ببعضها البعض بالمعاملات المترية الأساسـية و يرمز لها بالرمز $g_{\alpha\beta}$ و يعبر عنها بالشكل :

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}_\beta = g^i{}_\alpha \mathbf{e}_i g^j{}_\beta \mathbf{e}_j = g^i{}_\alpha g^j{}_\beta \delta_{ij} \qquad (6.17)$$

حيث δ ij كرونيكر دلتا المعرف في الفصل الأول . و باعتبار أن الجداء السلمي عملية تبديليـة فالمصفوفة الممثلة للمعاملات المترية الأساسية مصفوفة متناظرة وسنرى أنه بواسطة المعاملات المترية الأساسية سيتم خفض قرينة متحولة على الإحداثيات الطبيعية كما هو الحال في استخدام موتـرة كرونيكر δ_{ij} لخفض قرينة تتحول على الإحداثيات الديكارتية.

6-1-5 .العنصر المساحي

يسمى جذر قيمة معين مصفوفة المعاملات المترية الأساسية بالعنصر المساحي و يرمز له $\sqrt{g}$ حيث :

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = \det\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g22 \end{pmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \tag{6.18}$$

و تسمية جذر هذه القيمة بالعنصر المساحي عائد إلى الخواص الهندسية لهذه القيمة.فلنفترض أن α هي الزاوية بين شعاعي القاعدة الأساسية فمربع مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين هي :

$$\begin{aligned} A^2 &= |g_1|^2|g_2|^2 \sin^2\alpha \\ A^2 &= |g_1|^2|g_2|^2(1-\cos^2\alpha) \\ A^2 &= |g_1|^2|g_2|^2 - |g_1|^2|g_2|^2\cos^2\alpha \end{aligned} \tag{6 . 19}$$

و هذه القيمة مكافئة تماماً للقيمة g الواردة في العلاقة (6.18) و الجذر التربيعي للقيمة g مساو للمساحة المنشأة على شعاعي القاعدة الأساسية .

6-1-6 . المعاملات المترية الضدية

المعاملات المترية الضدية هي مقلوب المعاملات المترية الأساسية و يرمز لها $g^{\alpha\beta}$ حيث تكتب قرائنها في الأعلى . و بالتالي فجداء المعاملات المترية الضدية في المعاملات المترية الأساسية يساوي إلى موترة كرونيكر .

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}{}^{\gamma} \tag{6.20}$$

و بواسطة المعاملات المترية الضدية سيتم رفع قرينة متحولة على الإحداثيات الطبيعية كما هو الحال في استخدام موترة كرونيكر δ^{ij} لرفع قرينة متحولة على الإحداثيات الديكارتية .

6-1-7- . أشعة القاعدة الضدية

يرمز لأشعة القاعدة الضدية بالرمز g^{α} و قرينتها تكتب في الأعلى و تعرف بأنها تلك الأشـــعة التي ترتبط مع أشعة القاعدة الأساسية بالعلاقة:

$$\mathbf{g}^{\alpha}\mathbf{g}_{\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma} \tag{6.21}$$

في حالتنا المدروسة هذه لدينا جملة قاعدة ضدية مؤلفة من شعاعين وضعهما بالنسبة لأشعة القاعدة الأساسية ينتج مباشرة من التعريف (6.21) إذ أن مفكوك هذه العلاقة هو :

$$\begin{aligned} g^1.g_1 &= 1 \\ g^2.g_1 &= 0 \\ g^1.g_2 &= 0 \\ g^2.g_2 &= 1 \end{aligned} \tag{6.22}$$

و بالتالي فالشعاع g^1 عمودي على الشعاع g_2 و الشعاع g^2 عمودي على الشـــعاع g_1 و هما ممثلان إلى جانب أشعة القاعدة الأساسية في الشكل 6-3. هذان الشعاعان يشـــكلان أيضـــآ جملة يمكن تعيينها لأي نقطة بدلالة الإحداثيات الطبيعية لهذه النقطة و الإحداثيـــات الديكارتيـــة لرؤوس شبة المنحرف . إذ يتضح من مقارنة العلاقتين (6.20) و (6.21) و بمراعـــاة العلاقـــة (6.17) أن :

$$\mathbf{g}^{\alpha}.\mathbf{g}_{\gamma} = g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g^{\alpha\beta}\mathbf{g}_{\beta}\mathbf{g}_{\gamma} \tag{6 . 23}$$

و من هذه العلاقة ينتج :

$$\mathbf{g}^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\mathbf{g}_{\beta} \tag{6. 24}$$

إذا أمعن المرء النظر في هذه العلاقة فسوف يجد أن القرينة β قد رفعت إلى الأعلى و اســـتبدلت بقرينة أخرى α. و مركبات أشعة القاعدة الضدية $g_i{}^{\alpha}$ على المحاور الإحداثية الديكارتية يمكـــن استنتاجها مباشرة من العلاقة الشعاعية السابقة إذ أن هذه العلاقة الشعاعية مكافئة بعد نســـبها إلى الإحداثيات الديكارتية للعلاقة :

$$g_i{}^{\alpha}\mathbf{e}^i = g^{\alpha\beta}g^i{}_{\beta}\mathbf{e}_i \tag{6 .25}$$

وللحصول على المركبات فرادى نضرب هذه العلاقة ب $\mathbf{e}_j$ فنحصل على :

$$g_i{}^{\alpha}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_j = g_i{}^{\alpha}\delta^i{}_j = g_j{}^{\alpha} = g^{\alpha\beta}g^i{}_{\beta}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = g^{\alpha\beta}g^i{}_{\beta}\delta_{ij} \qquad (6.26)$$

و منشور هذه العلاقة يحتوي على أربعة معادلات لحساب المركبات الاثنتين لكل شعاع من أشعة القاعدة الضدية و ذلك باعتبار القرائن $\alpha, \mathbf{j}$ قرائن مستقلة .و الجداءات السلمية لأشعة القاعدة الضدية ببعضها البعض يمثل المعاملات المترية الضدية فاستنادا إلى العلاقة (24 . 6) و بملاحظة العلاقتين (17 . 6) و (20 . 6) يمكن أن نكتب :

$$\mathbf{g}^{\alpha}.\mathbf{g}^{\beta} = g^{\alpha\gamma}\mathbf{g}_{\gamma}g^{\beta\eta}\mathbf{g}_{\eta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\gamma}g_{\gamma\eta}$$
$$\mathbf{g}^{\alpha}.\mathbf{g}^{\beta} = g^{\alpha\gamma}\delta^{\beta}{}_{\gamma} = g^{\alpha\beta} \qquad (6.27)$$

و يبرهن أيضاً أن:

$$\mathbf{g}_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\mathbf{g}^{\beta} \qquad (6.28)$$

وذلك بالبدء بالبرهان من الطرف الثاني. باستبدال المعاملات المترية الأساسية $g_{\alpha\beta}$ بالجداءات السلمية لأشعة القاعدة $\mathbf{g}_{\alpha}.\mathbf{g}_{\beta}$ و من ثم ملاحظة أن الجداء : $\mathbf{g}_{\alpha}\mathbf{g}^{\beta}$ هو موترة كرونيكر $\delta_{\alpha}{}^{\beta}$ ، الذي نستطيع بواسطته استبدال قرينة الأشعة $\mathbf{g}_{\beta}$ بالقرينة α حيث نحصل بعد هذا على النتيجة $\mathbf{g}_{\alpha}$.

6-1-7- مشتقات أشعة القاعدة الأساسية

يمكن اشتقاق أشعة القاعدة الأساسية بالنسبة للإحداثيات الطبيعية فنحصل باعتبار العلاقة (6.13) على المشتقات التالية:

$$\mathbf{g}_{\alpha,\beta} = \Omega^{(k)}{}_{,\alpha\beta}X^i{}_{(k)}\mathbf{e}_i \qquad (6.13)$$

و مركبات هذه المشتقات هي :

$$g^i_{\alpha,\beta} = \Omega^{(k)}{}_{,\alpha\beta}X^i{}_{(k)} \qquad (6.30)$$

وبعد ملاحظة مشتقات توابع الشكل (6.15) ينتج :

$$\mathbf{g}_{1,1} = 0$$
$$\mathbf{g}_{2,2} = 0$$

$$\mathbf{g}_{1,2} = (\Omega^{(1)}{}_{,12}x^1{}_{(1)} + \Omega^{(2)}{}_{,12}x^1{}_{(2)} + \Omega^{(3)}{}_{,12}x^1{}_{(3)} + \Omega^{(4)}{}_{,12}x^1{}_{(4)})\mathbf{e}_1 + (\Omega^{(1)}{}_{,12}x^2{}_{(1)} + \Omega^{(2)}{}_{,12}x^2{}_{(2)} + \Omega^{(3)}{}_{,12}x^2{}_{(3)} + \Omega^{(4)}{}_{,12}x^2{}_{(4)})\mathbf{e}_2 \quad (6.31)$$

حيث:

$$\Omega^{(1)}{}_{,12} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \Omega^{(2)}{}_{,12} = -\frac{1}{4}; \quad \Omega^{(3)}{}_{,12} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \Omega^{(4)}{}_{,12} = -\frac{1}{4}; \quad (6.32)$$

و الشعاع الأخير مكافىء للشعاع $\mathbf{g}_{2,1}$ و يلاحظ أن الشعاع الأخير ثابت لحالة استخدام توابع الشكل المفترضة في العلاقة (6.5) فهو غير متعلق بالاحداثي الطبيعي θ^1 أو θ^2 ويتعلق فقط بإحداثيات رؤوس شبه المنحرف.

6-1-8- تحويل الانتقالات بين الإحداثيات الديكارتية و الطبيعية

ليكن $\mathbf{u}$ شعاع الانتقالات لنقطة ما لا على التعيين من شبه المنحرف .هذا الشعاع يمكن نسبه إلى جملة الأشعة الواحدية في الإحداثيات الديكارتية , أو إلى أشعة القاعدة الأساسية في النقطة نفسها أو إلى أشعة القاعدة الضدية .وبما أن الأمر متعلق بنفس الشعاع فيجب أن يكون :

$$\mathbf{u} = u_i\mathbf{e}^i = u^i\mathbf{e}_i = u^\alpha\mathbf{g}_\alpha = u_\alpha\mathbf{g}^\alpha \quad (6.33)$$

حيث u_α, u^α هي المركبات الضدية و الأساسية على التوالي لشعاع الانتقالات. لنحاول الآن الحصول على المركبات u_i من المركبات u_α لشعاع الانتقالات . لنأخذ العلاقة :

$$\mathbf{u} = u_i\mathbf{e}^i = u_\alpha g_i{}^\alpha\mathbf{e}^i \quad (6.34)$$

و لنعوض فيها أشعة القاعدة الضدية مصاغة بدلالة الأشعة الواحدية الديكارتية علاقة (6.25) فنجد أن :

$$\mathbf{u} = u_i\mathbf{e}^i = u_\alpha g_i{}^\alpha\mathbf{e}^i \quad (6.35)$$

وبالمقارنة نجد أن :

$$u_i = u_\alpha g_i{}^\alpha \quad (6.36)$$

أي أن التحويل يتم بواسطة أشعة القاعدة الضدية. لنحاول الآن الحصول على المركبات u_α من المركبات u_i لهذا الغرض نضرب العلاقة (6.34) بأشعة القاعدة الأساسية :

$$u_i e^i g_\beta = u_i e^i g^j{}_\beta e_j = u_i g^j{}_\beta \delta^i{}_j = u_j g^j{}_\beta = u_\alpha g^\alpha g_\beta = u_\alpha \delta^\alpha{}_\beta = u_\beta \qquad (6.37)$$

و بالتالي لدينا التحويل :

$$u_\beta = g^j{}_\beta u_j ; u_\alpha = g^i{}_\alpha u_i \qquad (6.38)$$

أي أن التحويل يتم بمساعدة مركبات أشعة القاعدة الأساسية. و يمكن بنفس الطرق السابقة برهان التحويلات التالية :

$$u^i = g^i{}_\alpha u^\alpha \qquad (6.39)$$

$$u^\alpha = g_i{}^\alpha u^i \qquad (6.40)$$

وبالتالي نجد أنه ببساطة يمكن الانتقال من المركبات الديكارتية إلى المركبات الطبيعية وبالعكس بفضل تعريف جمل الأشعة هذه . ويلاحظ أن القاعدة المشتركة لهذه التحويلات تتلخص في حذف القرينة التي يتم عليها الجمع. يمكن أيضا انطلاقا من العلاقة (6.33) أن نبرهن العلاقات التالية:

$$u^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta \qquad (6.41)$$

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta \qquad (6.42)$$

أي أننا نستطيع بواسطة المعاملات المترية الأساسية و الضدية التحويل بين المركبات الأساسية و الضدية لشعاع الانتقالات . و يلاحظ أنه بواسطة هذه المعاملات يتم رفع أو خفض قرينة كما ذكر سابقا .

6-1-9- المشتق الأساسي

6-1-9-1 -المشتق الأساسي لقيمة سلمية

لنفترض أن I قيمة سلمية تابعة للإحداثيات الديكارتية المستقلة $I(x^i)$. لنشتق هذه القيمة السلمية بالنسبة للإحداثيات الطبيعية باستخدام قاعدة مشتق تابع التابع فنجد أن :

$$\frac{\partial I}{\partial \theta^{\alpha}} = \frac{\partial I}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{i}}{\partial \theta^{\alpha}} \tag{6 . 43}$$

و مشتق الإحداثيات الديكارتية بالنسبة للإحداثيات الطبيعية هو:

$$\frac{\partial x^{i}}{\partial \theta^{\alpha}} = \Omega^{(k)}{}_{,\alpha} x^{i}{}_{(k)} = g^{i}{}_{\alpha} \tag{6 . 44}$$

قارن لذلك العلاقة (6 . 4) بالعلاقة (6 . 14) .و بالتالي فمشتق القيمة السلمية يأخذ الشكل

$$I_{,\alpha} = g^{i}{}_{\alpha} I_{,i} \tag{6 . 44}$$

6-1-9 -2 - المشتق الأساسي لمركبات شعاع

ليكن لدينا المركبات u_{α} لشعاع انتقالات ما . وجدنا أن العلاقة التي تربـــط هـــذه المركبـــات بمركبات شعاع الانتقالات u_{i} على المحاور الإحداثية الديكارتية هي من الشكل :

$$u_{\alpha} = g^{i}{}_{\alpha} u_{i} \tag{6 . 46}$$

نشتق هذه العلاقة بالنسبة للإحداثيات الطبيعية فنحصل على :

$$\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \theta^{\beta}} = \frac{\partial g^{i}{}_{\alpha}}{\partial \theta^{\beta}} u_{i} + g^{i}{}_{\alpha} \frac{\partial u_{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{k}}{\partial \theta^{\beta}} \tag{6.47}$$

و باستخدام العلاقة (6 . 44) و ملاحظة (6 . 30) يمكن صياغة هذه العلاقة بالشكل :

$$u_{\alpha,\beta} = g^{i}{}_{\alpha,\beta} u_{i} + g^{i}{}_{\alpha} g^{k}{}_{\beta} u_{i,k} \tag{6 . 48}$$

نعرف الآن المشتق الأساسي للمركبات u_{α} بالنسبة للإحداثيات الطبيعية و نرمز له بالشكل :

$$u_{\alpha|\beta} = g^{i}{}_{\alpha} g^{k}{}_{\beta} u_{i,k} \tag{6.49}$$

فنحصل بعد إدخال هذا التعريف إلى العلاقة (6 . 48) و نقل الحد الأول من الطرف الثـــاني إلى الطرف الأول على :

$$u_{\alpha|\beta} = u_{\alpha,\beta} - g^{i}{}_{\alpha,\beta} u_{i} \tag{6.50}$$

نحول المركبات الديكارتية للانتقالات الموجودة في الحد الثاني من الطرف الثاني للعلاقة السابقة إلى المركبات الطبيعية باستخدام علاقة التحويل (6 . 36) فنحصل على :

$$u_{\alpha|\beta} = u_{\alpha,\beta} - g^{i}{}_{\alpha,\beta} g_{i}{}^{\gamma} u_{\gamma} \tag{6.51}$$

و هكذا نجد أن المشتق الأساسي يحوي بالإضافة إلى المشتق العادي بالنسبة للإحداثيات الطبيعية على المركبات الطبيعية لشعاع الانتقالات u_γ مضروبة بجداء مركبات أشعة القاعدة $u_{\alpha,\beta}$ الضدية و مشتقات مركبات أشعة القاعدة الأساسية و التي تسمّى عادة في المصادر العلمية برموز كرستوفل (CHRISSTOFFEL) :

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = g^{i}{}_{\alpha,\beta} g_{i}{}^{\gamma} \qquad (6.52)$$

يملك المشتق الأساسي لمركبات شعاع العلاقة (6 . 49) خلافاً للمشتقات الجزئية لـه (6 .48) خواص الموترة نظراً لخاصية تحويل القرائن الواردة في العلاقة (6 . 49) . أما في حالة المشتقات الجزئية .فالحد الأول من الطرف الثاني للعلاقة (6 . 48) يمثل حد غير مرغوب فيه يؤدي إلى خرق قواعد تحويل الموترات و التي سيتم التعرف عليها في الفقرة اللاحقة .

بالإضافة إلى المشتق الأساسي للمركبات الأساسية يمكننا أن نعرف المشتق الأساسي للمركبات الضدية $u^{\alpha}{}_{|\beta}$ و المشتق الضدي للمركبات الضدية $u^{\alpha|\beta}$.

6-1-10- تعريف الجداء الموتري والموترة

6-1-10-1 تعريف الجداء الموتري

لتكن b,a مجموعتان مرتبتان من الأعداد على الشكل:

$$\begin{aligned} a_i &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & a_m \end{pmatrix} \\ b_j &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & . & b_n \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (6.53)$$

حيث i قرينة تتحول من 1 إلى m وj قرينة تتحول من 1إلى n .يعرف الجداء الموتّري بأنه ذلك الجداء الذي يتم فيه ضرب كل عدد من المجموعة الأولى بكل عدد من المجموعة الثانية ويرمز لهذا الجداء بالشكل :

$$c_{ij} = a_i \otimes b_j \qquad (6.54)$$

وعناصر المجموعة c_{ij} تمثل مجموعة مرتبة من الأعداد حيث تتحول فيها القرينة i من 1 إلى m والقرينة j من 1إلى n .و نتيجة الضرب مفصلة هي :

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & . & . & . & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & . & . & . & a_2b_n \\ . & . & . & . & . & . \\ a_mb_1 & a_mb_2 & . & . & . & a_mb_n \end{pmatrix} \qquad (6.55)$$

عملية الجداء هذه غير تبديلية بشكل عام ، إذ أن ترتيب عناصر مجموعة مرتبة من الأعداد يلعب دوراً أيضاً في تمييز هذه المجموعة عن غيرها .

يلاحظ أنه لو كانت المجموعتان b_j, a_i تحتويان على نفس العدد من المركبات و التي يمكن اعتبارها مركبات في الفراغ البعدي n فإن مجموع عناصر القطر الرئيسي لحاصل الجداء الموتري يمثل الجداء السلمي لهذين الشعاعين . و يمكن تعميم هذا الجداء ليشمل جداء أي مجموعات مرتبة من الأعداد .فلو تحولت قرائن المجموعة الأولى على بعدين a_{ij} وقرائن المجموعة الثانية على ثلاثة أبعاد مثلا b_{klm} كان الجداء الموتري لهاتين المجموعتين :

$$c_{ijklm} = a_{ij} \otimes b_{klm} \qquad (6.56)$$

حيث يتحول هذا الجداء على خمسة أبعاد . يمكن الاستنتاج أيضاً أن ضرب مصفوفتين ليس إلا حالة خاصة من الجداء الموتري المعرف هنا.

6-1-10-2- تعريف الموترة

الموترة هي تعبير رياضي يحتوي على مجموعة مرتبة من المركبات تحددها قرائن متحولة و يرتبط بكل قرينة مجموعة قاعدية تنسب اليها هذه المركبات (مثلاً أشعة القاعدة الأساسية أو غيرها). و تخضع مركباتها لدساتير التحويل نفسها التي تخضع لها المجموعة القاعدية المرتبطة بها .كمثال على هذا التعبير الرياضي يمكن أن نعطي التعبير الرياضي التالي:

$$\mathbf{t} = t^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta \qquad (6.57)$$

$t^{\alpha\beta}$ تمثل مركبات الموترة t التي تتحول في بعدين و $\mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta$ مجموعته القاعدية . ولكي يمثل التعبير السابق موترة يجب أن تتحول مركباتها بنفس التحويلات التي تتحول بها مجموعتها القاعدية . فلو عبرنا عن هذه الموترة في الإحداثيات الديكارتية بالشكل :

$$t = t^{ik}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \quad (6.58)$$

حيث t^{ik} مركبات الموترة في الإحداثيات الديكارتية ، $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$ قاعدتها المرتبطة بها فيجب أن يكون:

$$t^{ik}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = t^{\alpha\beta}\mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta = t^{\alpha\beta}g^i_\alpha \mathbf{e}_i \otimes g^k_\beta \mathbf{e}_k \quad (6.59)$$

وكل قرينة من قرائنها يتم تحويلها بالشكل نفسه التي يتم به تحويل شعاع القاعدة المرتبط بها، فمن العلاقة السابقة ينتج أن :

$$t^{ik} = g^i{}_\alpha g^k{}_\beta t^{\alpha\beta} \quad (6.60)$$

وبالعكس أيضاً يمكن الحصول على $t^{\alpha\beta}$ من t^{ik} بالشكل :

$$t^{\alpha\beta} = g_i{}^\alpha g_k{}^\beta t^{ik} \quad (6.61)$$

وبما أن قرائن مركبات الموترة في (6.57) تتحول في بعدين فنقول أنه لدينا موترة من المرتبة الثانية و كمثال على موترة من المرتبة الأولى يمكن أن نذكر شعاع الانتقالات و الذي نسب في العلاقة (6.33)إلى جمل إحداثية مختلفة . ووجدنا أنه يخضع لقوانين التحويل المذكورة في العلاقات (6.36) ,(6.38), (6.39) (6.42),(6.41),(6.40). وهذه التحويلات مكافئة تماماً لتحويل أشعة القاعدة التي عبر عن الانتقالات بدلالتها (انظر التعبير عن أشعة القاعدة الأساسية و الضدية بدلالة الأشعة الإحداثية الديكارتية والتحويلات بين أشعة القاعدة الأساسية و الضدية في العلاقات (6.24)،(6.28). وكمثال على موترة من المرتبة الصفرية يمكن أن نذكر الجداء السلمي لشعاعين و الجداء المختلط لثلاثة أشعة و تكون في هذه الحالة عدد مركبات الموترة مركبة واحدة فقط و كتعميم يمكن أن تعرف الموترة من المرتبة n بالشكل:

$$\underline{t} = t^{\alpha\beta\gamma\partial\cdots}\mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta \otimes \mathbf{g}_\gamma \otimes \mathbf{g}_\gamma \ldots \quad (6.62)$$

حيث تحوي مركبات الموترة على n قرينة وأشعة القاعدة له تحوي على n شعاع .يلاحظ أن لكل قرينة من قرائن الموترة(مثلاً α) شعاع مرتبط بها (مثلاً $\mathbf{g}_\alpha$) و يتم تحويل كل قرينة بالطريقة نفسها التي يتم تحويل الشعاع المرتبط بها . و علية يتم تحويل مركبات الموترة على المحاور الإحداثية الطبيعية $t^{\alpha\beta\gamma\gamma\cdots}$ إلى المحاور الإحداثية الديكارتية .... $t^{ijkl\cdots}$ بالشكل:

$$t^{ijkl\ldots} = g^i{}_\alpha g^j{}_\beta g^k{}_\gamma g^l{}_\delta \ldots t^{\alpha\beta\gamma\delta\ldots} \quad (6.63)$$

أو بالعكس :

$$t^{\alpha\beta\gamma\delta...} = g_i^{\alpha} g_j^{\beta} g_k^{\gamma} g_l^{\delta} ... t^{ijke....} \qquad (6.64)$$

في حالة تعريف الموترة بقرائن منخفضة يتم التحويل كما يلي :

$$t_{ijke...} = g_i^{\alpha} g_j^{\beta} g_k^{\gamma} g_l^{\delta} ......t_{\alpha\beta\gamma\delta...} \qquad (6.65)$$

أو بالعكس :

$$t_{\alpha\beta\gamma\delta...} = g^i{}_\alpha g^j{}_\beta g^k{}_\gamma g^l{}_\delta ... t_{ijkl...} \qquad (6.66)$$

و عند تعريف موترة بمركبات مختلطة قاعدية أساسية و قاعدية ضدية كـــالموترة $t^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta}...$ يتـــم التحويل كما يلي :

$$t^i{}_j{}^k{}_{l...} = g^i{}_\alpha g_j^{\beta} g^k{}_\gamma g_l^{\delta} ... t^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta}... \qquad (6.67)$$

$$t^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta...} = g_i^{\alpha} g^j{}_\beta g_k^{\gamma} g^l{}_\delta .. t^i{}_j{}^k{}_{l...} \qquad (6.68)$$

و يتم تحويل موترة بمركباتها القاعدية الأساسية إلى موترة بمركبات قاعدية ضدية بنفـــس طريقـــة تحويل الأشعة القاعدية الضدية و ذلك لكل قرينة من قرائن الموترة و كمثال على ذلـــــك لدينـــا التحويلات :

$$t^{\alpha\beta\gamma\delta...} = g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} g^{\gamma\nu} g^{\delta\eta} ... t_{\lambda\mu\nu\eta...} \qquad (6.69)$$

أو بالعكس:

$$t_{\lambda\mu\nu\eta...} = g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} g_{\gamma\nu} g_{\delta\eta} ... t^{\alpha\beta\gamma\delta}.... \qquad (6.70)$$

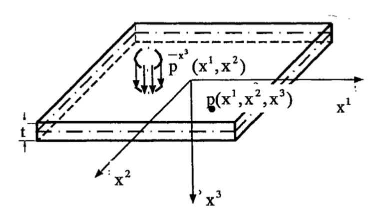
في حالة وجود مركبات مختلطة يتم التحويل بالشكل :

$$t^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta}... = g^{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} g^{\gamma\nu} g_{\delta\eta} ... t_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\nu}{}^{\eta} \qquad (6.71)$$

و هذه هي الخواص الأساسية التي تحدد ماهية الموترة. و على هذا الأساس يكـــون مـــن الســـهل الانتقال بين الإحداثيات المختلفة أثناء التعامل مع مسائل نظرية المرونة إذا علمنا أن التشـــوهات و الإجهادات و معاملات المرونة للمادة تمثل موترات يحدد مرتبتها بعد المسألة المطروحـــة (مســـألة أحادية البعد،ثنائية البعد ،ثلاثية الأبعاد).و بالتالي يمكن معالجة طبولوجيات معقـــدة للمنشـــآت باستخدام الإحداثيات الطبيعية ، و بعد الحصول على قيم التأثير في الإحداثيات الطبيعية نســـتطيع ببساطة الحصول على مكافئاتها في الإحداثيات الديكارتية باستخدام دســـاتير تحويـــل مركبـــات الموترات .

6-2-نظرية المرونة في الإحداثيات الديكارتية

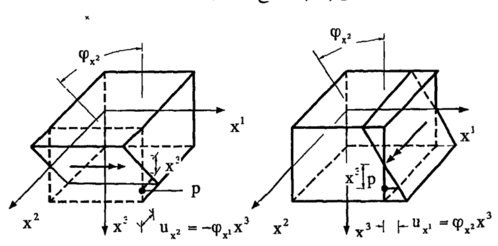
6-2-1- مجاهيل نظرية المرونة



شكل 6-5 : بلاطة رقيقة ، المحاور الإحداثية ، الحمولة ، المستوي الوسطي

نبدأ أولاً بتحديد المجاهيل التي تعين الحالة الانتقالية لبلاطة رقيقة شكل(6-5) بناءً على الفرضيات الواردة في مقدمة هذا الفصل. لهذا الغرض يجب تحديد الانتقالات $u_{x^1}, u_{x^2}, u_{x^3}$ لنقطة ما لا على التعيين $p(x^1,x^2,x^3)$ واقعة في الربع الأول (الموجب) من المحاور الإحداثية الديكارتية التي نسبت إليها البلاطة. حسب الفرضية الثانية لا يتعرض السطح الوسطي للبلاطة لأي تشوهات وبالتالي يجب أن تكون انتقالات السطح الوسطي المحايد في الاتجاه x^1, x^2 معدومة أي أن $u^0_{x^1}, u^0_{x^2}$ لنقطة ما لا على التعيين من السطح الوسطي للبلاطة معدومة .ويبقى فقط الانتقال $u^0_{x^3}$ الذي يحدد الشكل المتشوه للسطح الوسطي .نصيغ انتقالات النقطة p بدلالة انتقالات نقطة تقاطع العمود النازل من هذه النقطة على السطح الوسطي ودورانات المقاطع حول المحاور الإحداثية والتي تنحصر الآن في دورانين هما دوران المقطع φ_{x^1} حول x^1 ودوران المقطع

φ_{x^2} حول x^2 أما دوران المقاطع φ_{x^3} حول x^3 فهو معدوم انسجاماً مع الفرضيـــة الثانيـــة استناداً إلى ما سبق وإلى الشكل (6-6) نستطيع أن نكتب:



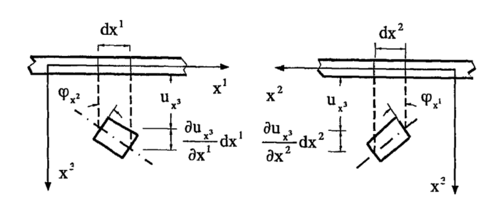
(a   (b

شكل 6–6 : دورانات المقاطع ، a) الدوران φ_{x1} حول x^1 ، b) الدوران φ_{x2} حول x^2

$$
\begin{aligned}
u_{x^1} &= \varphi_{x^2} x^3 \\
u_{x^2} &= -\varphi_{x^1} x^3 \\
u_{x^3} &= u^0_{x^3}
\end{aligned}
\qquad (6\text{-}72)
$$

وفقا لفرضيات كيرشوف – لوف يمكن التعبير عن دورانات المقاطع $\varphi_{x1}, \varphi_{x2}$ بدلالة الانتقال $u^0_{x^3}$, وهذه الفرضيات شبيهه بتلك التي استخدمت في نظرية الجوائز باعتبار مشتقات الانتقالات صغيرة.واستنادا إلى الشكل (6-7) يكون :

$$
\begin{aligned}
\varphi_{x^1} &= \frac{\partial u^0_{x^3}}{\partial x^2} \\
\varphi_{x^2} &= -\frac{\partial u^0_{x^3}}{\partial x^1}
\end{aligned}
\qquad (6.73)
$$



a) دوران سالب φ_{x^2} حول x^2 b) دوران موجب φ_{x^1} حول x^1

شكل 6-7 : فرضيات كيرشوف – لوف

والاشارة السالبة تعني أن انتقالا موجبا للنقطة p يؤدي إلى زاوية دوران φ_{x^2} سالبة وهذه ما يمكن ملاحظته مباشرة من الشكل a-7-6 . بتعويض (6-73) في (6-72) نحصل على :

$$u_{x1} = -x^3 \frac{\partial u^0_{x3}}{\partial x^1}$$

$$u_{x2} = -x^3 \frac{\partial u^0_{x3}}{\partial x^2} \qquad (6.74)$$

$$u_{x^3} = u^0_{x^3}$$

وهذا يعني أن باستطاعتنا تحديد الحالة الانتقالية للبلاطة تحديدا تاما بتعيين تابع الانتقال $u^0_{x^3}$ للمستوى الوسطي والمعادلة التي تمثل هذا التابع هي معادلة سطح وبالتالي يتعلق هذا التابع بالإحداثيين x^1, x^2 . بناء على الحالة الانتقالية هذه يجب أن تنعدم التشوهات العرضانية $\varepsilon_{x^1x^3}, \varepsilon_{x^2x^3}$. إذا ينتج باستخدام علاقات التشوهات –الانتقالات ومراعاة العلاقات (6-74) أن:

$$\varepsilon_{x^1x^3} = \frac{\partial u_{x^1}}{\partial x^3} + \frac{\partial u_{x^3}}{\partial x^1} = -\frac{\partial u^0_{x^3}}{\partial x^1} + \frac{\partial u^0_{x^3}}{\partial x^1} = 0$$

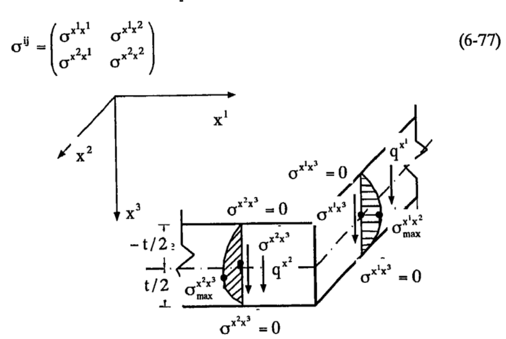
$$\varepsilon_{x^2x^3} = \frac{\partial u_{x^2}}{\partial x^3} + \frac{\partial u_{x^3}}{\partial x^2} = -\frac{\partial u^0_{x^3}}{\partial x^2} + \frac{\partial u^0_{x^3}}{\partial x^2} = 0 \tag{6.75}$$

يمكن أيضا إهمال التشوه الناظمي $\varepsilon_{x^3x^3}$ الحاصل في اتجاه x^3 وتقتصر موترة التشـــوهات الـــتي يجب تعيينها على :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x^1x^1} & \varepsilon_{x^1x^2} \\ \varepsilon_{x^2x^1} & \varepsilon_{x^2x^2} \end{pmatrix} \tag{6-76}$$

جزء موترة الإجهادات المرتبطة مع حالة التشوهات السابقة هي :

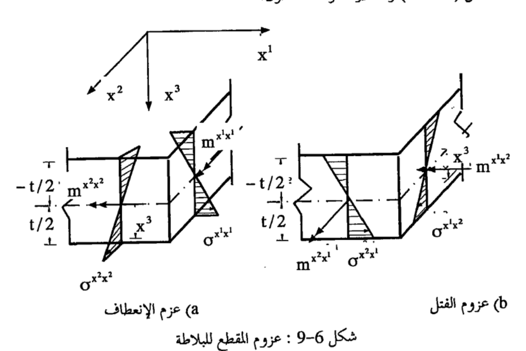
$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \sigma^{x^1x^1} & \sigma^{x^1x^2} \\ \sigma^{x^2x^1} & \sigma^{x^2x^2} \end{pmatrix} \tag{6-77}$$



شكل 6–8 : توزع الإجهادات القاصة

بحسب الإجهاد $\sigma^{x^3x^3}$ بمكاملة معادلة توازن القوى في اتجاه x^3 على عنصر تفاضلي كما سنرى لاحقا . أما وجود الإجهادين $\sigma^{x^1x^3}, \sigma^{x^2x^3}$ فهو ضروري لموازنة الحمولـــة $\bar{p}^3(x^1, x^2)$, و بالطبع هذا يمثل تناقضا واضحا في نظرية البلاطات الرقيقة فمن جهة تفترض التشوهات القاصـــة مهملة وفق العلاقة (6.75) و من جهة أخرى تعتبر الإجهادات القاصـــة الموافقـــة للتشـــوهات القاصة هذه موجودة وتلعب دورا أساسيا في توازن البلاطة وهذا يؤدي إلى عدم التوافق التام بـــين حالة التشوهات و الحالة الإجهادية مما يؤدي بدوره إلى صعوبة صياغة الشروط الطرفية .

وحسب نظرية السطوح الحرة للإجهادات يفترض أن يكون الإجهادين $\sigma^{x^1x^3}, \sigma^{x^2x^3}$ معدومـين على السطوح الحرة للبلاطة أي على السطحين $x^3 = \pm\frac{t}{2}$ و تصل قيمة هذه الإجـهادات إلى قيمتها الاعظمية على السطح الوسطي للبلاطة (شكل 6-8) . يجري عادة تجميع الإجهادات على سطوح المقاطع إلى قوى مقطع فى واحدة الطول . وتكون واحدات قوى المقطع في البلاطة واحدة قوة مقسومة على واحدة طول. وهذه القوى هي عزوم الإنعطاف الممثلة باتجاهاتها الموجبـــة في الشكل (6-9-a) ومقاديرها لواحدة الطول:



شكل 6-9 : عزوم المقطع للبلاطة

$$m^{x^1x^1} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma^{x^1x^1} x^3 dx^3 \tag{6.78}$$

$$m^{x^2x^2} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma^{x^2x^2} x^3 dx^3 \tag{6.79}$$

وعزوم الفتل الممثلة باتجاهاتها الموجبة في الشكل 6-9-b ومقاديرها لواحدة الطول :

$$m^{x^1x^2} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma^{x^1x^2} x^3 dx^3 \tag{6.80}$$

$$m^{x^2x^1} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma^{x^2x_1} x^3 dx^3 \tag{6.81}$$

والقوى القاصة الممثلة باتجاهاتها الموجبة في الشكل 6-8 ومقاديرها لواحدة الطول

$$q^{x^1} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma^{x^1x^3} dx^3 \tag{6.82}$$

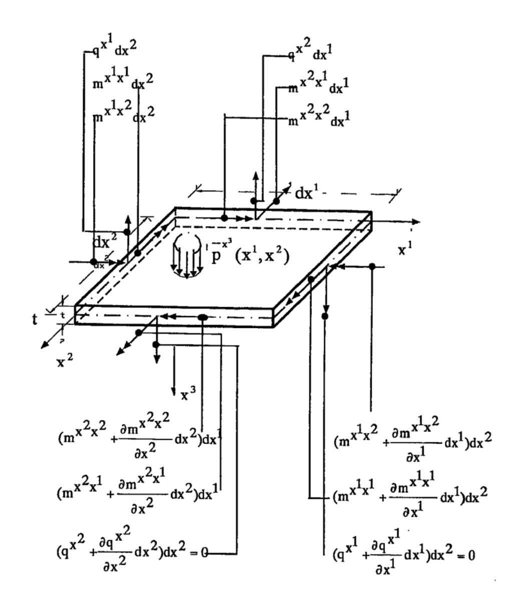
$$q^{x^2} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma^{x^2x^3} dx^3 \tag{6.83}$$

يلاحظ أن قرائن قوى المقطع لا تدل على اتجاه قوة المقطع بالنسبة للمحاور الإحداثية و إنما تـــدل على الإجهاد الموافق لها .

6 – 2 – 2 – معادلات نظرية المرونة

6 – 2 – 2 – 1– معادلات التوازن

لنقتطع من بلاطة عنصرا بأبعاد تفاضلية dx^1dx^2 و لنمثل عليه محصلات قوى المقطع الشـــكل (6-10) على الضفة السالبة للمقطع (الضفة السالبة للمقطع هي تلك التي يخترقها المحور الإحداثي داخلا إليها). و تغيرات قوى المقطع على الضفة الموجبة للمقطع (الضفة الموجبة للمقطع هي تلك



شكل 6-10 : عنصر تفاضلي من بلاطة ، المحاور الإحداثية ، قوى المقطع ، الحمولة

التي يخترقها المحور الإحداثي خارجاً منها). و لنعتبر أن التغير الحاصل في قوى المقطع مكافئ للحدود الأولى الخطية من منشور توابع قوى المقطع وفق سلسلة تايلور . نكتب معادلات التوازن للعنصر و هي معادلة إسقاط في اتجاه المحور x^3 . و معادلتي عزوم حول محورين مارين بمركز ثقل العنصر و موازيين للمحورين x^1, x^2 على التوالي فنحصل على :

$$(q^{x^1} + \frac{\partial q^{x^1}}{\partial^{x1}} dx^1)dx^2 + (q^{x^2} + \frac{\partial q^{x^2}}{\partial x^2} dx^2)dx^1 -$$

$$q^{x^1} dx^2 - q^{x^2} dx^1 + \overline{p}^3 (x^1, x^2) dx^1 dx^2 = 0$$

$$m^{x^1x^2} dx^2 + m^{x^2x^2} dx^1 - (m^{x^2x^2} + \frac{\partial m^{x^2x^2}}{\partial x^2} dx^2)dx^1 - (m^{x^1x^2} + \frac{\partial m^{x^1x^2}}{\partial x^1} dx^1)dx^2 +$$

$$q^{x^2} dx^1 \frac{dx^2}{2} + (q^{x^2} + \frac{\partial q^{x^2}}{\partial x^2} dx^2) dx^1 \frac{dx^2}{2} = 0$$

$$- m^{x^1x^1} dx^2 + (m^{x^1x^2} + \frac{\partial m^{x^2x^1}}{\partial x^2} dx^2)dx^1 - m^{x^2x^1} dx^1 + (m^{x^1x^1} + \frac{\partial m^{x^1x^1}}{\partial x^1} dx^1)dx^2 -$$

$$q^{x^1} dx^2 \frac{dx^1}{2} - (q^{x^1} + \frac{\partial q^{x^1}}{\partial x^1} dx^1) dx^2 \frac{dx^1}{2} = 0$$

(6.84)

و باختصار الحدود المتشابهة و إهمال حدود المراتب العليا و إدخال الاختصارات: $\frac{\partial()}{\partial x^1} = ()_{,x^1}$

$\frac{\partial()}{\partial x^2} = ()_{,x^2}$ ينتج أن:

$$\begin{aligned} & q^{x^1}{}_{,x^1} + q^{x^2}{}_{,x^2} + \overline{p}^3 (x^1, x^2) = 0 \\ & m^{x^1x^2}{}_{,x^1} + m^{x^2x^2}{}_{,x^2} - q^{x^2} = 0 \\ & m^{x^1x^1}{}_{,x^1} + m^{x^2x^1}{}_{,x^2} - q^{x^1} = 0 \end{aligned} \qquad (6.85)$$

و تصاغ هذه المعادلات باستخدام القرائن بالشكل

$$\begin{aligned} & q^i{}_{,i} + \overline{p}^3 = 0 \\ & m^{ij}{}_{,i} - q^j = 0 \end{aligned} \qquad (6.86)$$

يمكن حذف المعادلتين الثانية والثالثة من معادلات التوازن (6.85) والحصول على معادلة وحيدة مكافئة للمعادلات المذكورة باشتقاق المعادلة الثانية بالنسبة للمتحول المستقل x^2 والمعادلة الثالثة

بالنسبة للمتحول المستقل x^1 وتعويض المعادلات الناتجة عن الاشتقاق في المعادلة الأولى فنحصل على المعادلة الوحيدة التالية :

$$m^{x^1x^1}{}_{,x^1x^1} + m^{x^2x^1}{}_{,x^2x^1} + m^{x^1x^2}{}_{,x^1x^2} + m^{x^2x^2}{}_{,x^2x^2} + \overline{p}^3(x^1,x^2) = 0$$
$$m^{ij}{}_{,ji} = -\overline{p}^3(x^1,x^2) \tag{6.87}$$

6- 2 -2 -2 علاقات التشوهات -الانتقالات

تتلخص علاقات التشوهات -الانتقالات بالعلاقات التالية :

$$\varepsilon_{x^1x^1} = \frac{\partial u_{x^1}}{\partial x^1}$$
$$\varepsilon_{x^1x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{x^1}}{\partial x^2} + \frac{\partial u_{x^2}}{\partial x^1}\right); \varepsilon_{x^2x^1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{x^2}}{\partial x^1} + \frac{\partial u_{x^1}}{\partial x^2}\right) \tag{6.88}$$
$$\varepsilon_{x^2x^2} = \frac{\partial u_{x^2}}{\partial x^2}$$

و هي تحدد جزء موترة التشوهات الخاصة بالحالة المدروسة . و بتعويض العلاقـات (74 . 6) في العلاقات السابقة نحصل على :

$$\varepsilon_{x^1x^1} = -x^3 \frac{\partial^2 u^0{}_{x^3}}{(\partial x^1)^2}$$
$$\varepsilon_{x^1x^2} = -\frac{1}{2}x^3\left(\frac{\partial^2 u^0{}_{x^3}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u^0{}_{x^3}}{\partial x^2 \partial x^1}\right)$$
$$\varepsilon_{x^2x^1} = -\frac{1}{2}x^3\left(\frac{\partial^2 u^0{}_{x^3}}{\partial x^2 \partial x^1} + \frac{\partial^2 u^0{}_{x^3}}{\partial x^1 \partial x^2}\right) \tag{6.89}$$
$$\varepsilon_{x^2x^2} = -x^3 \frac{\partial^2 u^0{}_{x^3}}{(\partial x^2)^2}$$
$$\varepsilon_{ij} = -\frac{1}{2}x^3\left(u^0{}_{x^3,ij} + u^0{}_{x^3,ji}\right)$$

6-2-2-3- قانون السلوك

يربط قانون السلوك للحالة المدروسة بين جزء موترة الإجهادات (6.77) وجزء موترة التشوهات (6.76) و العلاقات التي تمثل قانون السلوك هنا هي بالتفصيل :

$$\begin{bmatrix} \sigma^{x^1x^1} \\ \sigma^{x^2x^1} \\ \sigma^{x^1x^2} \\ \sigma^{x^2x^2} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & & & \nu \\ & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & \\ & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & \\ \nu & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x^1x^1} \\ \varepsilon_{x^1x^1} \\ \varepsilon_{x^1x^1} \\ \varepsilon_{x^1x^1} \end{bmatrix} \qquad (6.90)$$

$$\sigma^{ij} = c^{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

هنا لابد من التنويه أن اختيار كتابه قانون السلوك بهذا الشكل نابع من حاجتنا لصياغة هذا القانون

بالشكل الموتري و هذه الصياغة تؤدي إلى نفس النتيجة المعروفة في الصياغة العادية فمثلا الإجهادالقاص $\sigma^{x^1x^2}$ يساوي إلى :

$$\sigma^{x^1x^2} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{2}(1-\nu)(\varepsilon_{x^2x^1} + \varepsilon_{x^1x^2})$$
$$= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma = G\gamma ; \gamma = \varepsilon_{x^2x^1} + \varepsilon_{x^1x^2} \qquad (6.91)$$

حيث γ التشوه القاص المعروف في الصياغة العادية و G معامل مرونة القص .

6 – 2 – 2 – 4 – علاقات قوى المقطع – الانتقالات

نستبدل الآن علاقات التشوهات -الانتقالات (6 . 89) بعلاقة تربط بين التشوهات والانحناءات حيث تعطى الانحناءات بالعلاقة :

$$\chi_{ij} = -\tfrac{1}{2}\left(u^{0}{}_{x^3,ij} + u^{0}{}_{x^3,ji}\right) \qquad (6.92)$$

و العلاقة المبتغاة إذاً :

$$\varepsilon_{ij} = x^3\chi_{ij} \qquad (6.93)$$

بتعويض هذه العلاقة في قانون السلوك نحصل على علاقة تربط بين الإجهادات و الانحناءات :

$$\sigma^{ij} = x^3 c^{ijkl}\chi_{kl} \qquad (6.94)$$

ويتم الحصول على علاقات قوى المقطع -الانحناءات (قوى المقطع – مشـــتقات الانتقـــالات) بإجراء التكاملات(6 . 78) , (6 . 79), (6 . 80) , (6 . 81) بعد تعويض الإجهادات الـــواردة فيها بمكافئاتها من العلاقة (6 . 94) فنحصل بعد تجميع النتائج في كتابة مصفوفية على :

$$\begin{bmatrix} m^{x^1x^1} \\ m^{x^2x^1} \\ m^{x^1x^2} \\ m^{x^2x^2} \end{bmatrix} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & & & \nu \\ & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & \\ & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & \\ \nu & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{x^1x^1} \\ \chi_{x^1x^1} \\ \chi_{x^1x^1} \\ \chi_{x^1x^1} \end{bmatrix}$$

$$m^{ij} = E^{ijkl}\chi_{kl} \qquad (6\text{-}95)$$

6–2–3– المعادلة التفاضلية للمسألة

يتم الحصول على المعادلة التفاضلية التي تحكم المسألة المطروحة بتعويض علاقات قوى المقطـــع – الانحناءآت (6-95) بعد استبدال الانحناءات بمشتقات الانتقالات من العلاقة (6-92) في معادلـــة توازن العزوم (6-87) وهي بالنتيجة المعادلة من الدرجة الرابعة :

$$\frac{\partial^4 u^0_{x3}}{(\partial x^1)^4} + \frac{\partial^4 u^0_{x3}}{(\partial x^1)^2(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^4 u^0_{x3}}{(\partial x^2)^2(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^4 u^0_{x3}}{(\partial x^2)^4} = \frac{\overline{p}^3(x^1, x^2)}{k}$$

$$u^0_{x3,ijji} = \frac{\overline{p}^3(x^1, x^2)}{k}; k = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (6\text{-}96)$$

تعتمد الطريقة التحليلية على إيجاد حلول المعادلة التفاضلية (6-96) من الدرجة الرابعة. هذه الحلول تحتوي على ثوابت يتم تعيينها عن طريق تحقيق الشروط الطرفية . والشروط الطرفية التي يمكن تحقيقها بمثل هذه الثوابت هي شرطين طرفيين لكل طرف من أطراف البلاطة وفيما يلي سنستعرض الشروط الطرفية الأكثر شيوعا للبلاطات.

6-2-4- الشروط الطرفية

تكون أطراف البلاطات عادة إما موثوقة أو مستندة استناداً بسيطاً وإما حرة وهذه هي الحالات الأكثر مصادفة في المنشآت المختلفة .وفي الحالة التي تكون فيها البلاطة جزءاً من منشأ مركب يمكن تحديد طبيعة الشروط الطرفية وفق معطيات عمل المنشأ ككل ,وطبيعة اتصال البلاطة مع أجزاء المنشأ المتبقية ويتم الاستعاضة عن تأثير بقية المنشأ بالبلاطة بقوى وعزوم طرفية أو بشروط هندسية للانتقالات .وفي مثل هذه المنشآت يتداخل عمل الشريحة وعمل البلاطة في وحدة متكاملة .إذ تتعرض البلاطات غالباً بالإضافة إلى الحمولات العمودية على مستويها إلى حمولات واقعة في مستويها والحالة الأخيرة تميز طبيعة عمل الشريحة .

طرف موثوق :

على الطرف الموثوق الذي معادلته $x^1 = const$ يجب أن يكون الانتقال والدوران معدومين

$$u^0_{x^3} = 0 \qquad ; u^0_{x^3,x^1} = 0 \qquad (6\text{-}97)$$

وباعتبار أن $u_{x^3,x^2} = 0$ فيجب أن يكون أيضاً $u^0_{x^3,x^1x^2} = 0$ وعليه يكون العزم $m^{x^1x^2} = 0$.

طرف $x^1 = const$ مستند استناداً بسيطاً

يسمح الطرف المستند استناداً بسيطاً بالدوران حوله بينما تكون الانتقالات معدومة والطرف هذا غير قادر على مقاومة عزم الانعطاف $m^{x^1x^1}$ إذ يجب أن يكون هذا العزم معدوماً وتتلخص الشروط الطرفية إذاً بالشرطين :

$$u^0_{x^3} = 0 \; ; \; m^{x^1x^1} = -k\left(u^0_{x^3,x^1x^1} + \nu u^0_{x^3,x^2x^2}\right) = 0 \qquad (6.98)$$

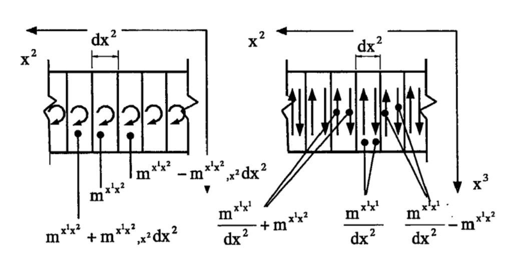
يكون الدوران في اتجاه عمودي على الطرف المستند استناداً بسيطاً معدوماً أي أن مشـــتق تـــابع الانتقـــالات بالنســـبة للمتحـــول x^2 معـــدوم $\left(u^0_{x^3,x^2}=0\right)$ وكذلـــك المشـــتق الثـــاني أيضاً $u^0_{x^3,x^2x^2}=0$ وبالتالي يكون $m^{x^1x^1}=-k\ \ u^0_{x^3,x^1x^1}=0$

الطرف الحر $x^1=\text{const}$

على الطرف الحر تنعدم كافة قوى المقطع الطرفية وهي عزم الانعطاف وعزم الفتل والقوة القاصة . إذاً على مثل هذا الطرف لدينا ثلاث شروط طرفية :

$$m^{x^1x^1}=0\ ;m^{x^1x^2}=0\ ;\ \ q^{x^1}=0 \tag{6.99}$$

يجب تحقيقها بينما تسمح حلول المعادلة التفاضلية بتحقيق شرطين فقط على كل طرف. للتغلب على هذه الصعوبة التي نوه عنها سابقا يجري دمج الشرطين الأخيرين مـــن العلاقـــة (6-99) في شرط واحد بتحويل عزوم الفتل الحاصلة على هذا الطرف إلى مزدوجات قوى لتجميعـــها مـــع القوى القاصة الأخرى (شكل11-). فبتقسيم الطرف إلى شرائح تفاضلية عرض كل منها dx^2



شكل 6–11 : تحويل عزوم الفتل إلى قوى قاصة

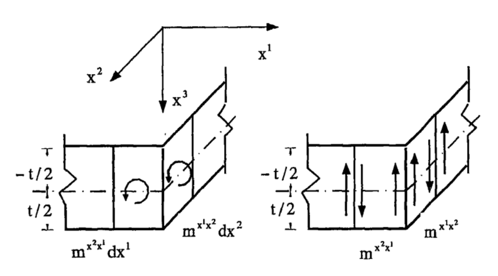
وباعتبار أن عزم الفتل على شريحه ما $m^{x^1x^2}$ تكون قوى مزدوجة العزم على هـــذه الشـــريحة مساوية للمقدار $\frac{m^{x^1x^2}}{dx^2}$.في الشريحة المجاورة للسابقة بالاتجاه الموجب للمحور الإحداثي يتزايد

عزم الفتل بالمقدار $m^{x^1x^2} + m^{x^1x^2}{}_{,x^2} dx^2$ وعليه تكون قوى مزدوجة العزم مكافئة للمقدار $\frac{m^{x^1x^2}}{dx^2} + m^{x^1x^2}{}_{,x2}$ لأن هذه القوى تتعاكس مثنى مثنى وفارق حاصل هذه القوى هو $m^{x^1x^2}{}_{,x^2}$ على الشرائح الداخلية للبلاطة .وبالتـــالي تكـــون قـــوة القـــص البديلـــة علـــى الطـــرف $x^1 = \text{const}$:

$$Q^{x^1} = q^{x^1} + m^{x^1x^2}{}_{,x^2} = -k\left[u^0_{x^3,x^1x^1x^2} - (2-\nu)u^0_{x^3,x^2x^2x^1}\right] \qquad (6.100)$$

وكذلك على الطرف $x^2 = \text{const}$ تكون قوة القص البديلة :

$$Q^{x2} = -k\left[u^0_{x^3,x^2x^2x^2} - (2-\nu)u^0_{x^3,x^1x^1x^2}\right] \qquad (6.101)$$



شكل 6-12: الشرائح الركنية ، القوى الركنية المتبقية

في الشرائح الركنية شكل (6-12) ليس لقوة مزدوجة العزم ما يعاكسها وعلى كل ركن مـــن أركان البلاطة الأربعة لدينا قوة مقدارها $\left(m^{x^2x^1} + m^{x^1x^2}\right)$ يجب اعتبارها . وهذه القوة تحاول رفع أركان البلاطة الأربعة عند تحميلها وهذا ما يلاحظ تجريبيا. وعلى ركن حر غير مستند يجـــب أن تكون هذه القوة معدومة وهذا يحصل فقط عندما يكون : $u^0_{x^3,x^1x^2} = 0$.

6-2-5- حساب الإجهادات المتبقية

تسمح المعالجة السابقة بحساب جزء موترة الإجهادات (6.77) وفق العلاقة (6.94) . و منشور العلاقة الأخيرة التفصيلي بعد مراعاة العلاقتين (6.90) ، (6.92) هو :

$$\begin{aligned}
\sigma^{x^1x^1} &= \frac{Ex^3}{1-\nu^2}(u^0{}_{x^3,x^1x^1} + \nu u^0{}_{x^3,x^2x^2}) \\
\sigma^{x^2x^2} &= -\frac{Ex^3}{1-\nu^2}(u^0{}_{x^3,x^2x^2} + \nu u^0{}_{x^3,x^1x^1}) \\
\sigma^{x^1x^2} &= \sigma^{x^2x^1} = -\frac{Ex^3}{1+\nu}u^0{}_{x^3,x^1x^2}
\end{aligned} \tag{6.102}$$

أما الإجهادات المتبقية وهي $\sigma^{x^1x^3}, \sigma^{x^2x^3}, \sigma^{x^3x^3}$ فلا يمكن حسابها من المعادلة السابقة إذ أنها لم ترتبط مع حالة التشوهات الحاصلة . و تقدير هذه الإجهادات يمكن أن يجري من دراسة معادلات التوازن (2.2a) على عنصر حجمي تفاضلي مقتطع من البلاطة . فمن معادلة التوازن على عنصر حجمي ينتج بإهمال القوى الحجمية $\bar{f}^1$ و بمراعاة العلاقات (6.102) أن :

$$\begin{aligned}
\sigma^{x^3x^1}{}_{,x^3} &= -\sigma^{x^1x^1}{}_{,x^1} - \sigma^{x^2x^1}{}_{,x^2} \\
&= \frac{Ex^3}{1-\nu^2}(u^0{}_{x^3,x^1x^1} + u^0{}_{x^3,x^2x^2})_{,x^1}
\end{aligned} \tag{6.103}$$

و بمكاملة هذه العلاقة مع مراعاة أن التابع $u^0{}_{x^3}$ تابع فقط للمتحولات x^2, x^1 و أن قيمة التابع $\sigma^{x^3x^1}$ معدومة على السطحين $(x^3 = \pm\frac{t}{2})$ نحصل على قيمة الإجهاد $\sigma^{x^3x^1}$ كتابع لارتفاع المقطع .

$$\sigma^{x^3x^1} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{(x^3)^2}{2} - \frac{t^2}{8}\right)(u^0{}_{x^3,x^1x^1} + u^0{}_{x^3,x^2x^2})_{,x^1} \tag{6.104}$$

يمكن الحصول على الإجهاد $\sigma^{x^3x^1}$ بدلالة القوة القاصة التي يمكن حسابها بدلالة المعادلة الثالثة من العلاقات (6.85) بعد كتابة مشتقات العزوم الواردة فيها بدلالة الانتقالات بمساعدة العلاقتين (6.95) , (6.92) فنحصل على :

$$q^{x^1} = m^{x^1x^1}{}_{,x1} + m^{x^2x^1}{}_{,x^2} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left(u^0{}_{x3,x^1x^1} + u^0{}_{x^3,x^2x^2}\right)_{,x^1} \qquad (6.105)$$

وبناء عليه يكون الإجهاد $\sigma^{x^3x^1}$ مساويا للقيمة:

$$\sigma^{x^3x^1} = \frac{3}{2}\frac{q^{x^1}}{t}\left[1-\left(\frac{2x^3}{t}\right)^2\right] \qquad (6\text{-}106)$$

وبعملية مماثلة نحصل على الإجهاد :

$$\sigma^{x^3x^2} = \frac{3}{2}\frac{q^{x^2}}{t}\left[1-\left(\frac{2x^3}{t}\right)^2\right] \qquad (6\text{-}107)$$

أما الإجهاد $\sigma^{x^3x^3}$ فيمكن حسابه من العلاقة (2-2c) بعد إهمال القوى الحجمية $\bar{f}^3$

$$\sigma^{x^3x^3}{}_{,x^3} = \sigma^{x^1x^3}{}_{,x^1} - \sigma^{x^2x^3}{}_{,x^2} \qquad (6\text{-}108)$$

وباشتقاق العلاقة (6-104) بالنسبة للمتحول x^1 وكتابة علاقة مماثلة تعطي $\sigma^{x^2x^3}$ واشـــتقاقها بالنسبة للمتحول x^2 وتعويض الناتج في العلاقة السابقة ينتج :

$$\sigma^{x^3x^3}{}_{,x^3} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{t^2}{8}-\frac{(x^3)^2}{2}\right]\left(u^0_{x^3,x^1x^1x^1x^1} + 2u^0_{x^3,x^1x^1x^2x^2} + u^0_{x^3,x^2x^2x^2x^2}\right) \qquad (6\text{-}109)$$

وبمكاملة هذه العلاقة على ارتفاع المقطع مع مراعاة العلاقة (6-96) والشروط الطرفية للتكـــامل حيث $\sigma^{x^3x^3}\left(\frac{t}{2}\right) = 0$, $\sigma^{x^3x^3}\left(-\frac{t}{2}\right) = -\bar{p}^3\left(x^1, x^2\right)$ نحصل على الإجهاد :

$$\sigma^{x^3x^3} = \bar{p}^3\left(x^1, x^2\right)\left[-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{t}\right)-2\left(\frac{x^3}{t}\right)^3\right] \qquad (6.110)$$

6-2-6- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري

بإهمال طاقة التشوه الداخلي العائد للقوى القاصة والتشوهات القاصة الموافقة لها يمكن الحصـــول على مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري لحالة البلاطة الرقيقة بتبديل موترة التشوهات بجزئـــها لحالـــة البلاطة الواردة في العلاقة (76-6) واستبدال معاملات المرونة العامة بجزئها الخاص للبلاطة الرقيقـة الواردة في العلاقة (90-6) وبعد الأخذ بعين الاعتبار أن الحمولات الخارجية تقتصر على حمولات خارجية في اتجاه المحور x^3 وأن الانتقال المحدد لوضعيات قيم التأثير في البلاطة هـــو الانتقـــال في ذلك الاتجاه يمكن أن نكتب :

$$\Pi = \sum_{e}\left(\frac{1}{2}\int_{V}\varepsilon_{ij}c^{ijkl}\varepsilon_{kl}dV - \int_{A}\overline{p}^{3}u^{0}_{x^3}dA\right) - \sum_{m}\overline{f}^{(m)}u^{0}_{(m)} \qquad (6\text{-}111)$$

(6-112)

$$\delta\Pi = 0$$

حيث: $\sum_{e}$ المجموع على عناصر البلاطة

$\overline{f}^{(m)}$ القوى الخارجية المركزة في الاتجاه (i) للمحور الإحداثي على العقدة (m) بما فيها العزوم.

$u^{0}_{(m)}$ شعاع انتقالات العقدة المحملة بقوى خارجية (انتقالات و دورانات).

dV, dA :عنصرين تفاضليين سطحي وحجمي على التوالي للبلاطة .

وبعد تبديل جزء موترة التشوهات ε_{ij} بقيمتها الواردة في العلاقـــة (93-6) وتحويـــل التكـــامل الحجمي إلى تكامل على السطح وتكامل على ارتفاع المقطع نحصل على :

$$\Pi = \sum_{e}\left[\frac{1}{2}\int_{A}\chi_{ij}\left(\int_{-t/2}^{t/2}x^{3}c^{ijkl}x^{3}dx^{3}\right)\chi_{kl}dA - \int_{A}\overline{P}^{3}u^{0}_{x^3}dA\right] - \sum_{m}\overline{f}^{(m)}u^{0}_{(m)} \qquad (6\text{-}113)$$

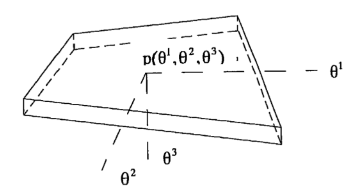
وبملاحظة أن التكامل المحصور بين القوسين الصغيرين الوارد في الحد الأول مكافئ للموترة E^{ijkl} الواردة في العلاقة (95-6) تصبح الطاقة الكامنة للبلاطة الرقيقة :

$$\Pi = \sum_{e}\left(\frac{1}{2}\int_{A}\chi_{ij}E^{ijkl}\chi_{kl}dA - \int_{A}\overline{P}^{3}u^{0}_{x^3}dA\right) - \sum_{m}\overline{f}^{m}u^{0}_{(m)} \qquad (6\text{-}114)$$

6-3-نظرية المرونة في الإحداثيات الطبيعية

6-3-1-مجاهيل نظرية المرونة في الإحداثيات الطبيعية

تعتبر الفرضيات التسهيلية الواردة في بداية هذا الفصل سارية المفعول أيضاً لحالة البلاطة الرقيقة المنسوبة إلى جملة محاور إحداثية طبيعية $(\theta^1,\theta^2,\theta^3)$ شكل (6-13).حيث يتطابق المحوران الطبيعي θ^3 والديكارتي x^3.وعلى غرار المناقشة التي وردت بالنسبة للإحداثيات الديكارتية يكفي تعيين انتقالات السطح الوسطي للبلاطة باتجاه المحور θ^3أي تعيين التابع $(u_3^\circ(\theta^1,\theta^2)$ للسطح الوسطي للتمكن من تعيين المجاهيل الحركية والستاتيكية للمسألة.باعتبار أن الدوران حول المحور θ^1هو φ_1 والدوران حول المحور θ^2هو φ_2 نستطيع بناء على هذه الفرضيات التسهيلية إيجاد مركبات شعاع الانتقالات u_α لنقطة ما لاعلى التعيين $p(\theta^1,\theta^2,\theta^3)$وهذه المركبات هي:



شكل6-13 الإحداثيات الطبيعية في نقطة ما لاعلى التعيين

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_2 \cdot \theta^3 \\ u_2 &= -\varphi_1 \cdot \theta^3 \\ u_3 &= u_3^\circ \end{aligned} \qquad (6\text{-}115)$$

يفهم ضمناً بأن هذه المركبات هي المركبات الأساسية لشعاع الانتقال والذي يتم نسبه إلى أشــعة القاعدة الضدية $(u = u_\alpha \cdot g^\alpha)$.تحسب الدورانات حول المحاور الطبيعيـــة وفقــاً لفرضيــات كيرشوف-لوف كما يلي:

$$\varphi_1 = \frac{\partial u_3^\circ}{\partial \theta^2} = u_{3,2}^\circ$$
$$\varphi_2 = -\frac{\partial u_3^\circ}{\partial \theta^1} = -u_{3,1}^\circ \qquad (6\text{-}116)$$

يعبر عن انتقالات نقطة ما لا على التعيين بدلالة انتقالات المستوي الوسطي للبلاطـــة بتعويــض (6–116) في (6–115):

$$u_1 = -\theta^3 \cdot u_{3,1}^\circ$$
$$u_2 = -\theta^3 \cdot u_{3,2}^\circ \qquad (6\text{-}117)$$
$$u_3 = u_3^\circ$$

تصاغ المعادلتان الأولى والثانية من العلاقة السابقة باستخدام القرائن في المعادلة الوحيدة التالية:

$$u_\alpha = -\theta^3 \cdot u_{3,\alpha}^\circ \qquad (6\text{-}118)$$

يرتبط جزء موترة الإجهادات في الإحداثيات الطبيعية مع مثيله في الإحداثيات الديكارتية بدســتور التحويل الخاص بالموترات من المرتبة الثانية على الشكل:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = g^i{}_\alpha \cdot g^j{}_\beta \cdot \varepsilon_{ij} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \qquad (6\text{-}119)$$

وجزء موترة الإجهادات المرتبط بموترة التشوهات السابق هو:

$$\sigma^{\alpha\beta} = g_i{}^\alpha \cdot g_j{}^\beta \cdot \sigma^{ij} \equiv \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{pmatrix} \qquad (6\text{-}120)$$

وترتبط قوى المقطع في الإحداثيات الطبيعية مع مثيلاتها الديكارتية بالعلاقات التالية :

$$m^{\alpha\beta} = g_i{}^\alpha \cdot g_j{}^\beta \cdot m^{ij} \qquad (6\text{-}121)$$
$$q^\alpha = g_i{}^\alpha \cdot q^i \qquad (6\text{-}122)$$

حيث تمثل عزوم المقطع موترة من المرتبة الثانية والقوى القاصة فيه موترة من المرتبة الأولى.

وقوى المقطع هذه هي التكاملات على ارتفاع المقطع للإجهادات في الإحداثيات الطبيعية ويمكـــن الحصول عليها على غرار العلاقات من (78-6) إلى (83-6) باستبدال الإجهادات المنســـوبة إلى الإحداثيات الديكارتية بمثيلاتها الموافقة لها في الإحداثيات الطبيعية واستبدال الإحداثي الديكـــارتي x^3 بالموافق له الطبيعي θ^3 ، مع العلم أن قوى المقطع يجب أن تحسب لواحدة طول مقدارهـــا $\sqrt{g}$. والعلاقات التي تحدد قوى المقطع يمكن اختصارها بالشكل :

$$q^{\alpha} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sqrt{g} \cdot \sigma^{\alpha 3} \cdot d\theta^3$$

$$m^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sqrt{g} \cdot \sigma^{\alpha\beta} \cdot \theta^3 \cdot d\theta^3 \tag{6-123}$$

للحصول مثلا على موترة التشوهات في الإحداثيات الديكارتية من مثيلتها في الإحداثيات الطبيعية نضرب العلاقة (119-6) بمركبات أشعة القاعدة الضدية فنحصل على:

$$g_k{}^{\alpha} \cdot g_l{}^{\beta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} = g_k{}^{\alpha} \cdot g_l{}^{\beta} \cdot g^i{}_{\alpha} \cdot g^j{}_{\beta} \cdot \varepsilon_{ij} \tag{6-124}$$

وباعتبار أن :

$$g^i{}_{\alpha} . g_k{}^{\alpha} = \delta^i{}_k \qquad ; g^j{}_{\beta} . g_l{}^{\beta} = \delta^j{}_l \tag{6-125}$$

وأن رمز كرونيكر يبدل القرينة التي يتم عليها الجمع بالقرينة الأخرى المستقلة ينتج:

$$g_k{}^{\alpha} \cdot g_l{}^{\beta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} = \delta^i{}_k \cdot \delta^j{}_l \cdot \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kl} \tag{6-126}$$

إذا استبدلت القرينة i بالقرينة k والقرينة j بالقرينة l في الطرف الثاني مـــن العلاقـــة الســـابقة ، والعلاقة التالية :

$$\varepsilon_{\bar{i}\bar{j}} = g_i{}^{\alpha} \cdot g_j{}^{\beta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{6-127}$$

هي نفسها العلاقة (126-6) والأمر لا يتعلق بتسمية القرائن ،وإنما بطريقة التحويل والانتبـــاه إلى القرائن المستقلة والقرائن التي يتم عليها الجمع.وبشكل مشابه نحول الموترات الممثلة لقيـــم التأثـــير الأخرى:

$$\sigma^{ij} = g^i{}_{\alpha} \cdot g^j{}_{\beta} \cdot \sigma^{\alpha\beta} \tag{6-128}$$

$$m^{ij} = g^i{}_\alpha \cdot g^j{}_\beta \cdot m^{\alpha\beta} \qquad (6\text{-}129)$$

$$q^i = g^i{}_\alpha \cdot q^\alpha \qquad (6\text{-}130)$$

وسوف تستخدم هذه العلاقات في الفقرات المقبلة لتحويل معادلات نظرية المرونة من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات الطبيعية.

6–3–2–معادلات نظرية المرونة في الإحداثيات الطبيعية

6–3–2–1–معادلات التوازن

قبل تحويل معادلات التوازن إلى الإحداثيات الطبيعية يجب التنويه إلى أن جـــداء مـــن الشـــكل $g^i{}_\alpha \cdot g_i{}^\alpha$ ليس له معنى في علم قواعد حساب الموترات إذا ما أريد التعبير عن جداء بالشـــكل $g^i{}_\alpha \cdot g_j{}^\alpha \cdot \delta_i{}^j$ وذلك لأن الجداءات $g^i{}_\alpha \cdot g_j{}^\alpha$ غير ممثلة كلها في الجداء $g^i{}_\alpha \cdot g_i{}^\alpha$. ولذلك يتجنب المرء تكرار استخدام القرائن نفسها أضف إلى ذلك أن استخدام القرينة نفسها قد يـــؤدي إلى نتائج مغلوطة فمثلا لا يمكـــن التعبـــير عـــن رمـــز كرونيكـــر δ_{ij} بالشـــكل δ_{ii} إذ أن $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ وهذا مخالف للتعريف القائل بأن قيمة رمز كرونيكـــر تســـاوي الواحد عندما $i=j$ والصفر عندما $i \neq j$.

الآن لتحويل معادلات التوازن (6–86) إلى الإحداثيات الطبيعية نلاحظ فيها أنه يتم الجمع علـــى القرينة i لهذا نستبدل القرينة i بقرينة أخرى k باستخدام رمز كرونيكر وتكون معادلات التـــوازن هذه مكافئة لـــ:

$$m^{ij}{}_{,k} \cdot \delta_i{}^k - q^j = 0 \qquad (6\text{-}131)$$

باعتبار أن المشتق الأساسي $m^{\alpha\beta}\,|_\gamma$ يملك خواص الموترة فالتحويل بينه وبين $m^{ij}{}_{,k}$ يتم وفـــق قواعد حساب الموترات بالشكل:

$$m^{ij}{}_{,k} = g^i{}_\alpha \cdot g^j{}_\beta \cdot g_k{}^\gamma \cdot m^{\alpha\beta}\,|_\gamma \qquad (6\text{-}132)$$

حيث يتم تحويل كل قرينة بأشعة القاعدة المرتبطة بها وفق موضعها في الأسفل أو في الأعلى.
وبتحويل مركبات القوى القاصة أيضا نحصل على:

$$g^i{}_\alpha \cdot g^j{}_\beta \cdot g_k{}^\gamma \cdot \delta_i{}^k . m^{\alpha\beta}|_\gamma - g^j{}_\beta . q^\beta = 0 \qquad (6\text{-}133)$$

وبملاحظة أن :

$$g^i{}_\alpha \cdot g_k{}^\gamma \cdot \delta_i{}^k = g^i{}_\alpha \cdot g_i{}^\gamma = \delta_\alpha{}^\gamma \qquad (6\text{-}134)$$

نحصل بعد إخراج $g^j{}_\beta$ خارج قوسين على :

$$g^j{}_\beta (m^{\alpha\beta}|_\gamma \cdot \delta^\gamma{}_\alpha - q^\beta) = 0 \qquad (6\text{-}135)$$

وبضرب هذه المعادلة بـــ $g_j{}^\delta$ نحصل على :

$$\begin{aligned} g_j{}^\delta g^j{}_\beta (m^{\alpha\beta}|_\gamma \cdot \delta^\gamma{}_\alpha - q^\beta) = 0 \quad \delta^\delta{}_\beta (m^{\alpha\beta}|_\gamma \cdot \delta^\gamma{}_\alpha - q^\beta) = 0 \\ = \delta^\delta{}_\beta (m^{\alpha\beta}|_\alpha - q^\beta) = (m^{\alpha\delta}|_\alpha - q^\beta) \end{aligned} \qquad (6.136)$$

وهي نفس العلاقة فيما لو كتبنا :

$$m^{\alpha\beta}|_\alpha - q^\beta = 0 \qquad ; m^{\alpha\beta}|_\beta - q^\alpha = 0 \qquad (6\text{-}137)$$

وذلك باعتبار تناظر موتّرة عزوم المقطع.

وبنفس الأسلوب يتم تحويل معادلة توازن القوى القاصة (المعادلة الأولى مـــن العلاقـــة (6-86)) لتأخذ الشكل:

$$q^\alpha|_\alpha + \bar{p}^3 = 0 \qquad (6\text{-}138)$$

6-3-2-2-علاقات التشوهات-الانتقالات

يتم تحويل علاقات التشوهات -الانتقالات من الإحداثي الديكارتي إلى الإحداثي الطبيعي بضـــرب طرفي علاقة التشوهات-الانتقالات في الإحداثي الديكارتي بـــ $g^i{}_\alpha \cdot g^j{}_\beta$:

$$g^i{}_\alpha \cdot g^j{}_\beta \cdot \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} g^i{}_\alpha \cdot g^j{}_\beta (u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (6\text{-}139)$$

وبملاحظة العلاقتين (6-119)و(6-49) تصبح علاقات التشوهات-الانتقالات في الإحداثيـــات الطبيعية كما يلي:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) \qquad (6\text{-}140)$$

والمشتقات الواردة في العلاقة السابقة هي مشتقات أساسية ولها خواص الموتّرات ومعرفة كما في العلاقة (6-51).

نريد الآن صياغة المشتق الأساسي $u_{\alpha|\beta}$ بدلالة الانتقال $\overset{\circ}{u}_3$ وتعريف المشتق الأساسي من المرتبة الثانية للقيمة الأخيرة وذلك للمحافظة على خواص تحويله كموتّرة من المرتبة الثانية.يمكن صياغة العلاقة (6-118) بتحويل طرفها الثاني إلى الإحداثي الديكارتي بالشكل:

$$u_{\alpha} = -\theta^3 \cdot g^i{}_{\alpha} \cdot \overset{\circ}{u}_{3,i} \qquad (6\text{-}141)$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ β ينتج:

$$\begin{aligned} u_{\alpha,\beta} &= -\theta^3 (g^i{}_{\alpha,\beta} \cdot \overset{\circ}{u}_{3,i} + g^i{}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \overset{\circ}{u}_{3,i}}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^{\beta}}) \\ &= -\theta^3 (g^i{}_{\alpha,\beta} \cdot g_i{}^{\gamma} \overset{\circ}{u}_{3,\gamma} + g^i{}_{\alpha} \cdot g^j{}_{\beta} \cdot \overset{\circ}{u}_{3,ij}) \end{aligned} \qquad (6\text{-}142)$$

في الحد الأول من الطرف الثاني للعلاقة السابقة حولت $\overset{\circ}{u}_{3,i}$ إلى الإحداثي الطبيعي ثانية.وبنقل هذا الحد إلى الطرف الأول بعد ملاحظة العلاقة (6-118) نحصل على:

$$u_{\alpha,\beta} - g^i{}_{\alpha,\beta} \cdot g_i{}^{\gamma} \cdot u_{\gamma} = u_{\alpha|\beta} = -\theta^3 \cdot g^i{}_{\alpha} \cdot g^j{}_{\beta} \cdot \overset{\circ}{u}_{3,ij} \qquad (6\text{-}143)$$

نعرف الآن المشتق الأساسي من المرتبة الثانية للانتقال $\overset{\circ}{u}_3$ بالشكل:

$$\overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta} = g^i{}_{\alpha} \cdot g^j{}_{\beta} \cdot \overset{\circ}{u}_{3,ij} \qquad (6\text{-}144)$$

يلاحظ أن الطرف الثاني يحول كموترة من المرتبة الثانية ، وبضرب هذه العلاقة بالجداء $g_k{}^{\alpha} \cdot g_l{}^{\beta}$ نحصل على علاقة التحويل بالاتجاه المعاكس:

$$\overset{\circ}{u}_{3,kl} = g_k{}^{\alpha} \cdot g_l{}^{\beta} \cdot \overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta} \qquad (6\text{-}145)$$

وبمقارنة العلاقتين (6-143)-(6-144) نحصل على الصياغة المطلوبة :

$$u_{\alpha|\beta} = -\theta^3 \cdot \overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta} \qquad (6\text{-}146)$$

وبالتالي يمكن التعبير عن موترة التشوهات بدلالة المشتق الأساسي من المرتبة الثانية للانتقال:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\theta^3 (\overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta} + \overset{\circ}{u}_{3|\beta\alpha}) \qquad (6\text{-}147)$$

يحتوي جزء موترة التشوهات هذا على التشوهات $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{11}$.أما تشوهات القص $\varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}$ فتنعدم في علاقات مشابهة للعلاقة (6-75).

6-3-2-3-قانون السلوك

للحصول على قانون السلوك للمادة في الإحداثيات الطبيعية نعوض جـــزء موتــرة التشـــوهات (127-6) وجزء موترة الإجهادات (128-6) في قانون السلوك الخطـــي لحالــة الإحداثيـــات الديكارتية (90-6) فتنتج لدينا العلاقة التالية :

$$g^{i}{}_{\alpha} \cdot g^{j}{}_{\beta} \cdot \sigma^{\alpha\beta} = c^{ijkl} \cdot g_{k}{}^{\gamma} \cdot g_{l}{}^{\delta} \cdot \varepsilon_{\gamma\delta} \qquad (6\text{-}148)$$

بضرب هذه العلاقة من الطرفين بالجداء $g_i{}^{\eta} \cdot g_j{}^{\xi}$ نحصل على :

$$\begin{aligned} g_i{}^{\eta} \cdot g_j{}^{\xi} \cdot g^{i}{}_{\alpha} \cdot g^{j}{}_{\beta} \cdot \sigma^{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha}{}^{\eta} \cdot \delta_{\beta}{}^{\xi} \cdot \sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\eta\xi} \\ &= g_i{}^{\eta} \cdot g_j{}^{\xi} \cdot c^{ijkl} \cdot g_k{}^{\gamma} \cdot g_l{}^{\delta} \end{aligned} \qquad (6\text{-}149)$$

يلاحظ أنه إذا ألحقنا مركبات أشعة القاعدة الضدية بمعاملات المرونة للمادة بالشكل:

$$c^{\eta\xi\gamma\delta} = g_i{}^{\eta} \cdot g_j{}^{\xi} \cdot c^{ijkl} \cdot g_k{}^{\gamma} \cdot g_l{}^{\delta} \qquad (6\text{-}150)$$

لتمكنا من معاملة معاملات المرونة كموترة من المرتبة الرابعة إذ يتم تحويلها تماما بنفس أســـلوب تحويل الموترة من المرتبة الرابعة ولأصبحت العلاقة (149-6) كالتالي:

$$\sigma^{\eta\xi} = c^{\eta\xi\gamma\delta} \cdot \varepsilon_{\gamma\delta} \quad \text{أو} \quad \sigma^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \varepsilon_{\gamma\delta} \qquad (6\text{-}151)$$

يمكن الآن أن نطلق على معاملات المرونة موترة المرونة للمادة ويمكـــن الاســـتنتاج أن تحويلـــها بالشكل المعاكس أي من الإحداثيات الطبيعية إلى الإحداثيات الديكارتية يتم بالشكل التالي:

$$c^{ijkl} = g^{i}{}_{\alpha} \cdot g^{j}{}_{\beta} \cdot c^{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot g^{k}{}_{\gamma} \cdot g^{l}{}_{\delta} \qquad (6\text{-}152)$$

6-3-2-4-علاقات قوى المقطع-الانتقالات

على غرار تعريف الانحناءات المنسوبة إلى الإحداثيات الديكارتية نعرف الانحناءات في الإحداثيـات الطبيعية بالشكل:

$$\chi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\mathring{u}_{3|\alpha\beta} + \mathring{u}_{3|\beta\alpha}) \qquad (6\text{-}153)$$

وعلى هذا الأساس يمكن صياغة جزء موترة التشوهات في الإحداثيات الطبيعية بدلالة الانحناءات المنسوبة إليها بالشكل:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \theta^3 \cdot \chi_{\alpha\beta} \qquad (6\text{-}154)$$

وتكون موترة الإجهادات في الإحداثيات الطبيعية مكافئة لـ :

$$\sigma^{\alpha\beta} = \theta^3 \cdot c^{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \chi_{\gamma\delta} \qquad (6\text{-}155)$$

وبمكاملة الإجهادات على ارتفاع المقطع بشكل مماثل لما فعلناه في الحالة الديكارتية نحصل على موترة عزوم المقطع التالية:

$$m^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \chi_{\gamma\delta} \qquad (6\text{-}156)$$

يمكن معاملة $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ معاملة الموترة ،ويجري تحويله بشكل مشابه للموترة $c^{\alpha\beta\gamma\delta}$ بالشكل:

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_i^{\ \eta} \cdot g_j^{\ \zeta} \cdot E^{ijkl} \cdot g_k^{\ \gamma} \cdot g_l^{\ \delta} \qquad (6\text{-}157)$$

أو بالاتجاه العكسي:

$$E^{ijkl} = g^i_{\ \alpha} \cdot g^j_{\ \beta} \cdot E^{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot g^k_{\ \gamma} \cdot g^l_{\ \delta} \qquad (6\text{-}158)$$

6–3–3–المعادلة التفاضلية في الإحداثيات الطبيعية:

يمكن الحصول على المعادلة التفاضلية في الإحداثيات الطبيعية بنفس الطريقة التي تم بها الحصول عليها في الإحداثيات الديكارتية. إذ نقوم أولا بتشكيل معادلة توازن عزوم المقطع في الإحداثيات الطبيعية بحذف القوى القاصة من المعادلة (6–138) وذلك باشتقاق المعادلة (6–137) وتعويض الناتج في المعادلة (6–138) بالشكل:

$$m^{\alpha\beta}\,|_{\beta\alpha} = -\overline{p}^3 \qquad (6\text{-}159)$$

في هذه العلاقة يتم الجمع على القرينتين β,α . ويمكن استنتاج هذه العلاقة من مثيلتها الديكارتية (6–87) بتحويل هذه الأخيرة إلى الإحداثيات الطبيعية وفق قواعد التحويل السابقة الذكر. ومن ثم نعوض علاقات قوى المقطع-الانحناءات (6–156) في العلاقة (6–159) وذلك بعد استبدال الانحناءات بمشتقات الانتقالات من العلاقة (6–153) وبعد الإجراءات السابقة نحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$(E^{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \overset{\circ}{u}_{3|\gamma\delta})|_{\alpha\beta} = \overset{-3}{p} \quad (6\text{-}160)$$

يلاحظ في هذه العلاقة أن الجمع يتم أيضا على القرينتين α,β وأنه يجـــب أن نعــرف المشـــتق الأساسي من الدرجة الرابعة للانتقال $\overset{\circ}{u}_3$ ،ولهذا الغرض ننطلق من العلاقة (6-144) التي عــرف بها المشتق الأساسي من المرتبة الثانية للانتقال $\overset{\circ}{u}_3$. ونعمد بنفس الطريقـــة إلى تعريـــف المشـــتق الأساسي من المرتبة الثالثة لهذا الانتقال بحيث يملك خواص موترة من المرتبة الثالثة بالشكل:

$$\overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta\gamma} = g^i{}_\alpha \cdot g^j{}_\beta \cdot g^k{}_\gamma \cdot \overset{\circ}{u}_{3,ijk} \quad (6\text{-}161)$$

وبإتباع خطوات مشابهة لما ورد في إيجاد المشتق الأساسي من المرتبة الثانية فسوف نجد أن :

$$\overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta\gamma} = (\overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta})_{,\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} \cdot \overset{\circ}{u}_{3|\eta\beta} - \Gamma^{\xi}_{\beta\gamma} \cdot \overset{\circ}{u}_{3|\alpha\xi} \quad (6\text{-}162)$$

ورموز كريستوفل الواردة في هذه العلاقة يمكن استنتاجها على غرار تلك الواردة في العلاقة (52-6) ويعرف المشتق الأساسي من المرتبة الرابعة للانتقال $\overset{\circ}{u}_3$ بالشكل:

$$\overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta\gamma\delta} = g^i{}_\alpha \cdot g^j{}_\beta \cdot g^k{}_\gamma \cdot g^l{}_\delta \cdot \overset{\circ}{u}_{3,ijkl} \quad (6\text{-}163)$$

وهذا المشتق يمكن الحصول عليه من المشتق الأساسي (6-161) بإتباع نفس خطوات الاشـــتقاق بالشكل:

$$\overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta\gamma\delta} = (\overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta\gamma})_{,\delta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\delta} \cdot \overset{\circ}{u}_{3|\eta\beta\gamma} - \Gamma^{\zeta}_{\beta\delta} \cdot \overset{\circ}{u}_{3|\alpha\zeta\gamma} - \Gamma^{\xi}_{\gamma\delta} \cdot \overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta\xi} \quad (6\text{-}164)$$

ويمكن الحصول أيضا على المعادلة التفاضلية في الإحداثيات الطبيعية بتحويل مثيلتها في الإحداثيات الديكارتية (6-96) إلى الإحداثيات الطبيعية لهذا الغرض نكتب الأخيرة بالشكل :

$$k.\overset{\circ}{u}_{3,ijkl} \cdot \delta_j{}^k \cdot \delta_i{}^l = \overset{-3}{p} \quad (6\text{-}165)$$

حتى يتم تلافي خرق قاعدة الجمع لــ Einstein وذلك باعتبار أن الجمع يتم على القرينتين i,j .
والعلاقة السابقة يمكن تحويلها إلى الإحداثيات الطبيعية باستخدام معكـــوس العلاقـــة (6-163) التالي:

$$\overset{\circ}{u}_{3,ijkl} = g_i{}^\alpha \cdot g_j{}^\beta \cdot g_k{}^\gamma \cdot g_l{}^\delta \cdot \overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta\gamma\delta} \quad (6\text{-}166)$$

وذلك بالشكل :

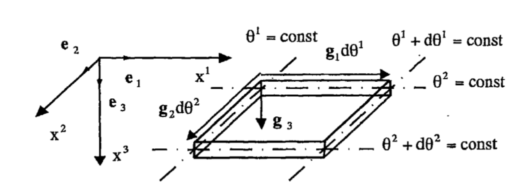
$$k \cdot g_i{}^\alpha \cdot g_j{}^\beta \cdot g_k{}^\gamma \cdot g_l{}^\delta \cdot \delta_j{}^k \cdot \delta_i{}^l \cdot \overset{\circ}{u}_{3|\alpha\beta\gamma\delta} = \overset{-3}{p} \quad (6\text{-}167)$$

والمعادلة الأخيرة تمثل المعادلة التفاضلية في الإحداثيات الطبيعية.

ملاحظة: في العلاقتين (165-6)و(167-6) يجب التمييز بين k المستخدمة كقرينة و k المستخدمة للتعبير عن قساوة البلاطة.

6-3-4-مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري

قبل تحويل مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري من الإحداثيات الديكارتية العلاقتين (111-6) و(112-6) لابد من إيجاد العنصر الحجمي dV في الإحداثيات الطبيعية والمقابل لمثيله $dV = dx^1dx^2dx^3$ في الإحداثيات الديكارتية.وكذلك العنصر السطحي dA في الإحداثيات الطبيعية والمقابل لمثيله في الإحداثيات الديكارتية $dA = dx^1dx^2$.



شكل6-14: العنصر الحجمي والعنصر السطحي

لنبدأ الآن بحساب عنصر تفاضلي سطحي dA مقتطع من بلاطة بين تزايد الخط الإحداثي الطبيعي $\theta^1 = const$ إلى $\theta^1 + d\theta^1 = const$ ، وتزايد الخط الإحداثي الطبيعي $\theta^2 = const$ إلى $\theta^2 + d\theta^2 = const$ انظر الشكل (14-6).يمكن التعبير عن التزايد التفاضلي على الخط الإحداثي الطبيعي $\theta^2 = const$ لتغير الإحداثي الطبيعي من $\theta^1 = const$ إلى $\theta^1 + d\theta^1 = const$ بالشعاع $g_1 \cdot d\theta^1$ ، والتزايد التفاضلي على الخط الإحداثي الطبيعي

$\theta^1 = const$ بتغير الإحداثي الطبيعي من $\theta^2 = const$ إلى $\theta^2 + d\theta^2 = const$ بالشعاع $g_2 \cdot d\theta^2$ ومساحة متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين مساو إلى:

$$dA = |g_1 \times g_2| d\theta^1 . d\theta^2 \tag{6-168}$$

أو:

$$dA = \sqrt{(g_1 \times g_2).(g_1 \times g_2)}\, d\theta^1 . d\theta^2 \tag{6-169}$$

ولحساب الجداء نستخدم قاعدة جداءات الأشعة التالية :

$$(u \times v)(y \times z) = (u.y)(v.z) - (v.y)(u.z) \tag{6-170}$$

وذلك باعتبار u,v,y,z أشعة ما لا على التعيين.وبتطبيق هذه القاعدة على الجداء تحت الجذر نحصل على:

$$dA = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}}\, d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 \tag{6-171}$$

وذلك بعد مراعاة العلاقة (6-18).

لحساب العنصر الحجمي dV يجب أن نعين أيضا الشعاع g_3 وهو لحالة عنصر من بلاطة مستوية ثابت ومساو إلى شعاع الواحدة على المحور x^3 لتطابق المحورين θ^3, x^3 . أي أن $g_3 = e_3$ وطويلة هذا الشعاع بالتالي مساوية للواحد،وتزايد العنصر التفاضلي باتجاه θ^3 يعبر عنه بالشعاع $g_3 d\theta^3$ وبالتالي يكون العنصر الحجمي:

$$dV = (g_1 d\theta^1 \times g_2 d\theta^2).g_3 d\theta^3 = \sqrt{g}.1.d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \tag{6-172}$$

يمكن الآن تحويل الطاقة الكامنة (6-111) من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات الطبيعية باستخدام العلاقات (6-127),(6-150),(6-171),(6-172) وبعد اعتبار المعادلة الثالثة من العلاقة (6-115) وأن الحمولات $\overline{p}^3$ لا تتغير بعد نسبها إلى الإحداثيات الطبيعية نحصل على:

$$\Pi = \sum_e \left(\frac{1}{2}\int_V \varepsilon_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} dV - \int_A \overline{p}^3 u_3^{\circ} dA\right) - \sum_m \overline{F}^{(m)} u_{(m)}^{\circ} \tag{6-173}$$

نبدل الآن جزء موترة التشوهات $\varepsilon_{\alpha\beta}$ بقيمته الواردة في العلاقة (6-154) ونحول التكامل الحجمي إلى تكامل على السطح وعلى ارتفاع المقطع فنحصل على:

$$\Pi = \sum_{e}[\frac{1}{2}\int_{A}\chi_{\alpha\beta}(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\theta^3 c^{\alpha\beta\gamma\delta}\theta^3 d\theta^3)\chi_{\gamma\delta}dA - \int_{A}\bar{p}^3 \overset{\circ}{u}_3 dA] - \sum_{(m)}\bar{F}^{(m)}\overset{\circ}{u}_{(m)} \quad (6\text{-}174)$$

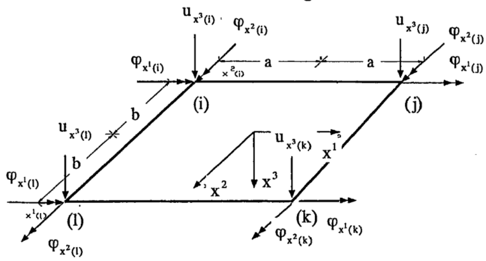
والتكامل المحصور بين القوسين الصغيرين يساوي إلى الموترة $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ المعطاة بالعلاقـــة (6-157) وبالتالي يكون:

$$\Pi = \sum_{e}[\frac{1}{2}\int_{A}\chi_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi_{\gamma\delta}\sqrt{g}.d\theta^1 d\theta^2 - \int_{A}\bar{p}^3 \overset{\circ}{u}_3\sqrt{g}.d\theta^1 d\theta^2] - \sum_{m}F^{(m)}\overset{\circ}{u}_{(m)}$$

(6-175)

وهو تعبير الطاقة الكامنة في الإحداثيات الطبيعية لبلاطة رقيقة تحت تأثير الحمـــولات الخارجيـــة المعتبرة.وفي حالة وجود حمولات موزعة مؤثرة على أطراف العناصر المنتهية يجب اعتبـــار العمـــل الذي تؤديه مثل هذه القوى في البلاطة السابقة.وللإلمام بجوانب الموضوع سوف ندرس في الفقـــرة القادمة عنصر منته مستطيل من نموذج الانتقالات في الإحداثيات الديكارتيـــة. وهـــذا العنصـــر معروف في المصادر العلمية بأنه العنصر ACM لبلاطة رقيقة.ومن ثم ننتقل إلى معالجـــة عنصـــر مطور عنه بالطريقة المقترحة لربط الحمولات بتوابع الانتقالات وســـتتم الدراســـة الأخـــيرة في الإحداثيات الطبيعية.

6-4-عنصر منته مستطيل من نموذج الانتقالات



شكل(6-15):عنصر منته مستطيل لبلاطة رقيقة،المحاور الإحداثية،درجات الحرية.

لنقتطع من بلاطة مستوية عنصرا منتهيا مستطيلا أبعاده 2a.x2b ولننسبه إلى جملة محاور إحداثيــة ديكارتية شكل(6–15).لكل عقدة من عقد العنصر ثلاث درجات حرية وهي مثلا للعقـــدة (i) الانتقال u_{x^3} في اتجاه x^3 والدوران φ_{x^1}حول x^1 والدوران φ_{x^2} حول x^2.وبالتالي يمكننـــا فرض تابع انتقالات يحتوي على اثني عشر ثابتا لإمكانية تحديد هذه الثوابت بدلالـــة انتقـــالات العقد.

اختير لوصف الحالة الانتقالية ضمن العنصر المنتهي التابع التالي:

$$\begin{aligned} u^{\circ}_{x^3}(x^1,x^2) &= c_0 + c_1x^1 + c_2x^2 + c_3(x^1)^2 + c_4x^1x^2 + c_5(x^2)^2 + c_6(x^1)^3 + c_7(x^1)^2x^2 \\ &+ c_8x^1(x^2)^2 + c_9(x^2)^3 + c_{10}(x^1)^3x^2 + c_{11}x^1(x^2)^3 \\ &= x^n \cdot c_n \end{aligned} \qquad (6-176)$$

وهذا التابع هو من التوابع التقريبية المصنف في المصادر العلمية كـــsserendipity class وهـــو تابع غير كامل لافتقاره إلى كافة حـــدود المرتبـــة الرابعـــة مـــن مثلـــث باســـكال وهـــي : $(x^1)^4, (x^1)^3x^2, (x^1)^2(x^2)^2, (x^2)^4$ على التوالي.ولكنه يبدي سلوكا حسنا في تقاربـه إلى الحل الدقيق.باستخدام العلاقـــات (6–73) تشـــتق الدورانـــات $\varphi_{x^2}, \varphi_{x^1}$ ضمـــن العنصـــر المنتهي،وبعد القيام بهذا الإجراء وتجميع العلاقات الناتجة بشكل مصفوفي نحصل على الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} u^{\circ}_{x^3} \\ \varphi_{x^1} \\ \varphi_{x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 & (x^1)^2 & x^1x^2 & (x^2)^2 & (x^1)^3 & (x^1)^2x^2 & x^1(x^2)^2 & (x^2)^3 & (x^1)^3x^2 & x^1(x^2)^3 \\ & & 1 & & x^1 & 2x^2 & & (x^1)^2 & 3x^1x^2 & 3(x^2)^2 & (x^1)^3 & 3x^1(x^2)^2 \\ & -1 & & -2x^1 & -x^2 & & -3(x^1)^2 & -2x^1x^2 & -(x^2)^2 & & -3(x^1)^2x^2 & -(x^2)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{11} \end{bmatrix}$$

$$u^{\circ}_i = x^n_i c_n \qquad ,i = 1,2,3 \qquad ,n = 0,1,2,\ldots\ldots,11 \qquad (6\text{-}177)$$

حيث يعبر u°_i الآن عن الشعاع الوارد في الطرف اليساري للعلاقة السابقة .بتعويض إحداثيـــات العقد (i),(j),(k),(l) في العلاقة السابقة نحصل على جملة معادلات خطية مؤلفة من اثنتي عشـــر معادلة على الشكل التالي:

$$u^{\circ}_{i(P)} = A^n_{i(p)} c_n \qquad ,(p) = (i),(j),(k),(l) \qquad (6\text{-}178)$$

مجاهيلها هي الثوابت الاختيارية $u^{\circ}_{i(p)}, c_n$ هي انتقالات ودورانات عقد العنصر $A^n_{i(p)}$ مصفوفة تحتوي فقط على قيم معلومة متعلقة بالإحداثيات الديكارتية لعقد العنصر المنتهي.تبين التجربة أن المصفوفة $A^n_{i(p)}$ قابلة في هذه الحالة للعكس دوما.باعتبار معكوسها $B^{i(p)}_n$ تتحدد الثوابت الاختيارية بدلالة انتقالات العقد بالشكل:

$$c_n = B^{i(p)}_n u_{i(p)} \tag{6-179}$$

نعوض الآن الثوابت الاختيارية في العلاقة (176-6) فنحصل على العلاقة التالية:

$$u^{\circ}_{x^3} = x^n B^{j(p)}_n u_{j(p)} = N^{j(p)} u_{j(p)} \tag{6-180}$$

حيث $N^{j(p)}$ توابع الشكل وهي:

$$N^{1(i)} = [2 - 3\theta^1 - 3\theta^2 + 4\theta^1\theta^2 + (\theta^1)^3 + (\theta^2)^3 - (\theta^1)^3\theta^2 - \theta^1(\theta^2)^3]/8$$
$$N^{2(i)} = [1 - \theta^1 - \theta 2 + \theta^1\theta^2 - (\theta^2)^2 + \theta^1(\theta^2)^2 + (\theta^2)^3 - \theta^1(\theta^2)^3]/8$$
$$N^{3(i)} = [-1 + \theta^1 + \theta^2 + (\theta^1)^2 - \theta^1\theta^2 - (\theta^1)^3 - (\theta^1)^2\theta^2 + (\theta^1)^3\theta^2]/8$$

$$N^{1(j)} = [2 + 3\theta^1 - 3\theta^2 - 4\theta^1\theta^2 - (\theta^1)^3 + (\theta^2)^3 + (\theta^1)^3\theta^2 + \theta^1(\theta^2)^3]/8$$
$$N^{2(j)} = [1 + \theta^1 - \theta^2 - \theta^1\theta^2 - (\theta^2)^2 - \theta^1(\theta^2)^2 + (\theta^2)^3 + \theta^1(\theta^2)^3]/8$$
$$N^{3(j)} = [1 + \theta^1 - \theta^2 - (\theta^1)^2 - \theta^1\theta^2 - (\theta^1)^3 + (\theta^1)^2\theta^2 + (\theta^1)^3\theta^2]/8$$

$$N^{1(k)} = [2 + 3\theta^1 + 3\theta^2 + 4\theta^1\theta^2 - (\theta^1)^3 - (\theta^2)^3 - (\theta^1)^3\theta^2 - \theta^1(\theta^2)^3]/8$$
$$N^{2(k)} = [-1 - \theta^1 - \theta^2 - \theta^1\theta^2 + (\theta^2)^2 + \theta^1(\theta^2)^2 + (\theta^2)^3 + \theta^1(\theta^2)^3]/8$$
$$N^{3(k)} = [1 + \theta^1 + \theta^2 - (\theta^1)^2 + \theta^1\theta^2 - (\theta^1)^3 - (\theta^1)^2\theta^2 - (\theta^1)^3\theta^2]/8$$

$$N^{1(l)} = [2 - 3\theta^1 + 3\theta^2 - 4\theta^1\theta^2 + (\theta^1)^3 - (\theta^2)^3 + (\theta^1)^3\theta^2 + \theta^1(\theta^2)^3]/8$$
$$N^{2(l)} = [-1 + \theta^1 - \theta^2 + \theta^1\theta^2 + (\theta^2)^2 - \theta^1(\theta^2)^2 + (\theta^2)^3 - \theta^1(\theta^2)^3]/8$$
$$N^{3(l)} = [-1 + \theta^1 - \theta^2 + (\theta^1)^2 + \theta^1\theta^2 - (\theta^1)^3 + (\theta^1)^2\theta^2 - (\theta^1)^3\theta^2]/8$$

(6-181)

حيث: $\theta^1 = \frac{x^1}{b}$, $\theta^2 = \frac{x^2}{b}$.

تشتق الانحناءات من التابع التقريبي للانتقالات (180-6) وفق العلاقات (92-6) فينتج أن :

$$\chi_{ij} = -\frac{1}{2}(N^{r(p)}_{,ij} + N^{r(p)}_{,ji})u_{r(p)} = -N^{r(p)}_{,ij}u_{r(p)} \qquad (6\text{-}182)$$

بالتوابع التقريبية (182-6)،(180-6) تأخذ الطاقة الكامنة لحالة بلاطة رقيقة (114-6) الشكل:

$$\pi = \sum_e [\frac{1}{2}u_{r(p)}(\int_A N^{r(p)}_{,ij}.E^{ijkl}.N^{s(q)}_{,kl}.dA)u_{s(q)} - u_{r(p)}\int_A \bar{p}^3.N^{r(p)}.dA$$

$$-\sum_m \bar{F}^{(m)} \cdot u^{\circ}_{(m)} \qquad (6\text{-}183)$$

$$= \sum_e (\frac{1}{2} \cdot u_{r(p)}k^{r(p)s(q)}u_{s(q)} - u_{r(p)}\bar{F}^{r(p)}) - \sum_m \bar{F}^m u^{\circ}_{(m)}$$

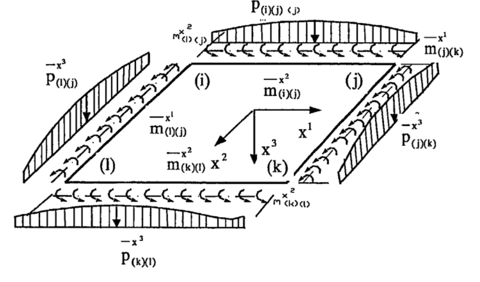
حيث:

$$k^{r(p)s(q)} = \int_A N^{r(p)}_{,ij}.E^{ijkl}.N^{s(q)}_{,kl}.dA \qquad (6\text{-}184)$$

مصفوفة القساوة لعنصر البلاطة الرقيقة.و:

$$\bar{F}^{r(p)} = \int_A \bar{p}^3.N^{r(p)}.dA \qquad (6\text{-}185)$$

الحمولات المركزة على عقد عنصر البلاطة الرقيقة والمكافئة للحمولة الموزعة.



شكل6-16:حمولات خارجية على أطراف العنصر المنتهي.

وفي حال وجود حمولات خارجية على أطراف العنصر المنتهي كما هو مبين في الشـــكل(6-16) يجري الانتقال من مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري لحالة الجسم الفراغي إلى الحالة المستوية لبلاطـــة رقيقة بشكل مماثل لما ورد عند الانتقال من المعادلة (5-57)إلى المعادلة (5-60) وذلك بعد فرض أن الحمولات الخارجية المطبقة على الأطراف الفاصلة بين عنصرين منتـــهيين متجـــاورين يمكـــن توزيعها بشكل عشوائي أو إلحاقها بأحد العنصرين أو كلاهما.والعمل الخارجي المنجز من قبل هذه القوى:

$$T = -\sum_{e} \int_{s_{\sigma}^{b,e}} \bar{p}_{b,e}^{r} . u_{r}^{b,e} . dS \qquad (6\text{-}186)$$

يجب إضافته إلى قيمة الطاقة الكامنة النهائية.

حيث $\bar{p}_{b,e}^{r}$ شعاع القوى الخارجية المؤثرة على أطراف العنصر المنتهي.

$u_{r}^{b,e}$ توابع الانتقالات على هذه الأطراف.وتشتق توابع الانتقالات على طرف مـــا مـــن أطراف العنصر المنتهي بتعويض معادلة هذا الطرف في توابع الانتقالات التقريبية ضمـــن العنصـــر المنتهي.

تستخدم التوابع التقريبية أيضا لوصف توابع الحمولات الخارجية على أطراف العناصر المنتهية. فعلى سبيل المثال إذا ماتم إعطاء تابع الحمولة $\bar{p}_{(i)(j)}$ على الطرف (j) (i) بثلاث قيم وهي قيمـــة الحمولة في العقدة (i) وقيمة الحمولة في منتصف الطرف (j) (i) وقيمتها في العقدة (j) ولتكـــن هذه القيم $\bar{p}^{1}_{(i)(j)}, \bar{p}^{2}_{(i)(j)}, \bar{p}^{3}_{(i)(j)}$ على التوالي عندها يمكن التعبير التقريبي عن تابع الحمولة $\bar{p}_{(i)(j)}$ بتابع شكل من الدرجة الثانية في x^1 يجري استنتاجه على غرار استنتاج التوابع التقريبية أثناء التعبير عن الانتقالات.

ليكن التابع التقريبي الذي يصف الحمولة من الشكل:

$$\bar{p}_{(i)(j)} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{p}^{1}_{(i)(j)} \\ \bar{p}^{2}_{(i)(j)} \\ \bar{p}^{3}_{(i)(j)} \end{bmatrix} = A_k . \bar{p}^{k}_{(i)(j)} \qquad (6\text{-}187)$$

حيث A_k تمثل توابع الشكل،وهي تابعة في حالة الحمولات السابقة للإحداثي x^1 .

على غرار هذا التابع يمكن كتابة التوابع الأخرى للحمولات.نرتب الآن توابع الحمولة الخارجيـــة قاطبة في شعاع من الشكل:

$$\bar{p}^{r}_{b,e} = \left\{ \bar{p}^{x^3}_{(i)(j)} \quad \bar{m}^{x^2}_{(i)(j)} \quad \bar{p}^{x^3}_{(j)(k)} \quad \bar{m}^{x^1}_{(j)(k)} \quad \bar{p}^{x^3}_{(k)(l)} \quad \bar{m}^{x^2}_{(k)(l)} \quad \bar{p}^{x^3}_{(l)(i)} \quad \bar{m}^{x^1}_{(l)(i)} \right\}$$

$$= A^r_k . \bar{p}^k_{b,e}$$

(6-188)

$\bar{p}^k_{b,e}$ هي قيم الحمولات الخارجية المعطاة لوصف توابع الحمولات مرتبة وفق التسلســـل الـــوارد للشعاع.

نرتب الانتقالات للأطراف في شعاع موافق لتسلسل الحمولات بحيث يعطـــي الجـــداء الســـلمي لشعاع الحمولات في شعاع الانتقالات العمل الناتج من الحمولة الخارجية وهذا التسلسل هو:

$$u^{b,e}_r = \left\{ u^{\circ(i)(j)}_{x^3} \quad \varphi^{(i)(j)}_{x^1} \quad u^{\circ(j)(k)}_{x^3} \quad \varphi^{(j)(k)}_{x^2} \quad u^{\circ(k)(l)}_{x^3} \quad \varphi^{(k)(l)}_{x^1} \quad u^{\circ(l)(i)}_{x^3} \quad \varphi^{(l)(i)}_{x2} \right\}$$

(6-189)

تنتج هذه التوابع من توابع الشكل (180-6) بتعويض معادلات الأطراف فيها.وبالنتيجة نحصـــل بعد التعويض على الشكل المصفوفي التالي:

$$u^{b,e}_r = L^{b,ej(p)}_r . u_{j(p)} = L^{b,es(q)}_r . u_{s(q)} \qquad (6\text{-}190)$$

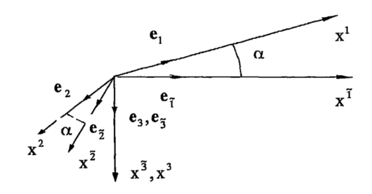
ويصبح العمل الخارجي لهذه الحمولات على مستوى العنصر المنتهي مساويا لـــ:

$$T = (-\int_{s^{b,e}_{\sigma}} \bar{p}^k_{b,e} . A^r_k . L^{b,es(q)}_r . dS) u_{s(q)} = -\bar{r}^{(s)(q)} . u_{s(q)} \qquad (6\text{-}191)$$

يضاف هذا الحد إلى قيمة الطاقة الكامنة الواردة في العلاقة (183-6).

وللتمكن من الجمع على كامل المنشأ يجب كتابة تعابير الطاقة الكامنة بدلالة الانتقالات المنســـوبة إلى جملة المحاور الإحداثية العامة $(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}})$ أو $(x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}})$ ذات الأشـــعة الواحديـــة $(e_{\bar{1}}, e_{\bar{2}}, e_{\bar{3}})$ أو $(e^{\bar{1}}, e^{\bar{2}}, e^{\bar{3}})$. شـــعاع الانتقـــالات في المحـــاور الإحداثيـــة الخاصـــــة لعقـــدة (x^1, x^2, x^3) أو (x_1, x_2, x_3)ذات الأشعة الواحدية (e_1, e_2, e_3)أو (e^1, e^2, e^3)

ما $\{\varphi_{x^2} \quad \varphi_{x^1} \quad u^{\circ}_{x^3}\}$ يقابله شعاع الانتقالات في المحاور الإحداثية العامة $\{\varphi_{x^{\bar{2}}} \quad \varphi_{x^{\bar{1}}} \quad u^{\circ}_{x^{\bar{3}}}\}$. وللتحويل بين الشعاعين يجب إيجاد العلاقة التي تربط بينهما. في الحالة التي لاينطبق فيها مركز الجملتين نجري انسحابا للمحاور الإحداثية العامة لينطبق مركزها على مركز جملة المحاور الإحداثية الخاصة بشكل مشابه لما ورد في العلاقة(5-44).



شكل(6-17):المحاور الإحداثية العامة والخاصة

يتم التعبير عن انتقالات نقطة ما من العنصر ولتكن النقطة p بنفس الطريقة التي عبر بها منها في العلاقة (5-46)،وبعد أخذ الحالة الخاصة للبلاطة بعين الاعتبار بملاحظة أن شعاعي الواحدة $e_3, e_{\bar{3}}$ متطابقان وعموديان على الأشعة الواحدية الأخرى.تتبسط العلاقة التفصيلية (5-47) التي تربط بين الانتقالات في المحاور الإحداثية الخاصة والانتقالات في المحاور الإحداثية العامة إلى:

$$\begin{bmatrix} u_{x^1(p)} \\ u_{x^2(p)} \\ u_{x^3(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\bar{1}} \cdot e_1 & e^{\bar{2}} \cdot e_1 & 0 \\ e^{\bar{1}} \cdot e_2 & e^{\bar{2}} \cdot e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^{\bar{1}}(p)} \\ u_{x^{\bar{2}}(p)} \\ u_{x^{\bar{3}}(p)} \end{bmatrix} \tag{6-192}$$

بالتعبير عن شعاع المكان في الإحداثيات المختلفة للنقطة (p) يمكن بشكل مماثل أن نجد:

$$\begin{bmatrix} x_{\bar{1}} \\ x_{\bar{2}} \\ x_{\bar{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \cdot e^{\bar{1}} & e_2 \cdot e^{\bar{1}} & 0 \\ e_1 \cdot e^{\bar{2}} & e_2 \cdot e^{\bar{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{6-193}$$

ولنفترض أن النقطة p واقعة على العمود النازل من العقدة (i) على مستوي سطح البلاطة فالانتقال $u_{x^3(p)}$ يعبر أيضا عن انتقال العقدة (i) الواقعة على السطح الوسطي للبلاطة كما أن الانتقال $u_{x^{\bar{3}}(p)}$ يعبر أيضا عن انتقال العقدة (i) وبالتالي:

$$u^{\circ}_{x^3(i)} = u^{\circ}_{x^{\bar{3}}(i)} \qquad (6\text{-}194)$$

وتصبح الدورانات حول الإحداثيات الخاصة مكافئة لـ :

$$\varphi_{x^1(1)} = \frac{\partial u^{\circ}_{x^3(i)}}{\partial x^2} = \frac{\partial u^{\circ}_{x^{\bar{3}}(i)}}{\partial x^{\bar{1}}} \cdot \frac{\partial x^{\bar{1}}}{\partial x^2} + \frac{\partial u^{\circ}_{x^{\bar{3}}(i)}}{\partial x^{\bar{2}}} \cdot \frac{\partial x^{\bar{2}}}{\partial x^2} \qquad (6\text{-}195)$$

$$= -\mathbf{e}_2.\mathbf{e}^{\bar{1}}.\varphi_{x^{\bar{2}}(i)} + \mathbf{e}_2.\mathbf{e}^{\bar{2}}.\varphi_{x^{\bar{1}}(i)}$$

$$\varphi_{x^2(i)} = -\frac{\partial u^{\circ}_{x^3(i)}}{\partial x^1} = -\frac{\partial u^{\circ}_{x^3(i)}}{\partial x^{\bar{1}}} \cdot \frac{\partial x^{\bar{1}}}{\partial x^1} - \frac{\partial u^{\circ}_{x^{\bar{3}}(i)}}{\partial x^{\bar{2}}} \cdot \frac{\partial x^{\bar{2}}}{\partial x^2} \qquad (6\text{-}196)$$

$$= \mathbf{e}_1.\mathbf{e}^{\bar{1}}.\varphi_{x^{\bar{2}}(i)} - \mathbf{e}_1.\mathbf{e}^{\bar{2}}.\varphi_{x^{\bar{1}}(i)}$$

وذلك باعتبار أن كلا من x^1, x^2 تابعة بمفردها لـ $x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}$.

ويمكن المتابعة بنفس الطريقة لإيجاد دستور التحويل الذي يربط بين موترة التشوهات المنسوب إلى الجملة الإحداثية الخاصة ونظيره المنسوب إلى الجملة الإحداثية العامة وكذلك الأمر بالنسبة لتحويل موترة الإجهادات.

وبتجميع العلاقات (6-194)،(6،195)،(6،196) نحصل على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} u^{\circ}_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^1(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_2.\mathbf{e}^{\bar{2}} & -\mathbf{e}_2.\mathbf{e}^{\bar{1}} \\ 0 & -\mathbf{e}_1.\mathbf{e}^{\bar{2}} & \mathbf{e}_1.\mathbf{e}^{\bar{1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{\circ}_{x^{\bar{3}}(i)} \\ \varphi_{x^{\bar{1}}(i)} \\ \varphi_{x^{\bar{2}}(i)} \end{bmatrix}$$

$$u_{r(p)} = T_r^{\bar{r}}.u_{\bar{r}(p)} \quad ; \quad u_{s(q)} = T_s^{\bar{s}}.u_{\bar{s}(q)} \qquad (6\text{-}197)$$

وهذا التحويل يتم إنجازه بالنسبة لكل عقدة من عقد العنصر المنتهي. وتصبح الطاقة الكامنة (6-183)مساوية لما يلي:

$$\Pi = \sum_{e}(\frac{1}{2}u_{\bar{r}(p)}.T_{r}^{\bar{r}}.k^{r(p)s(q)}.T_{s}^{\bar{s}}.u_{\bar{s}(q)} - u_{\bar{r}(p)}.T_{r}^{\bar{r}}.\bar{f}^{r(p)})$$

$$- \sum_{m} u_{\bar{r}(p)}.\bar{f}^{r(p)}.T_{r}^{\bar{r}} \qquad (6\text{-}198)$$

$$= \sum_{e}(\frac{1}{2}.u_{\bar{r}(p)}.k^{\bar{r}(p)\bar{s}(q)}.u_{\bar{s}(q)} - u_{\bar{r}(p)}.\bar{f}^{\bar{r}(p)}) - \sum_{m} u_{\bar{r}(p)}.\bar{f}^{\bar{r}(p)}$$

حيث:

$$k^{\bar{r}(p)\bar{s}(q)} = T_{r}^{\bar{r}}.k^{r(p)s(q)}.T_{s}^{\bar{s}} \qquad (6\text{-}199)$$

مصفوفة القساوة في الإحداثيات العامة و :

$$\bar{f}^{\bar{r}(p)} = T_{r}^{\bar{r}}.\bar{f}^{r(p)} \qquad (6\text{-}200)$$

شعاع الحمولات الخارجية المكافئة للحمولة الموزعة في الإحداثيات العامة.يمكن الآن الجمع على كامل المنشأ لنحصل على:

$$\Pi = \frac{1}{2}.u_{\bar{r}(n)}.k^{\bar{r}(n)\bar{s}(n')}.u_{\bar{s}(n')} - \bar{f}^{\bar{r}(n)}.u_{\bar{r}(n)} \qquad ;(n),(n') = 1,2,.... \qquad (6\text{-}201)$$

عدد عقد المنشأ.

حيث $k^{\bar{r}(n)\bar{s}(n')}$ مصفوفة القساوة العامة لكامل المنشأ و $u_{\bar{r}(n)}$ شعاع الانتقالات لكامل عقد المنشأ.وبعد أخذ المتغير الأول للطاقة الكامنة نحصل على جملة المعادلات الخطية لانتقالات العقد :

$$k^{\bar{r}(n)\bar{s}(n')}.u_{\bar{s}(n')} - \bar{f}^{\bar{r}(n)} = 0 \qquad (6\text{-}202)$$

بعد تعويض الشروط الطرفية للانتقالات في المعادلات السابقة وحلها بالطرق المعروفة والحصول على انتقالات العقد في المحاور الإحداثية العامة،تحول هذه إلى المحاور الإحداثية الخاصة ويجري حساب المجاهيل الستاتيكية والكينماتيكية من المعادلات الواردة في هذا الفصل وفق الطريقة الاعتيادية.

6-5-عنصر منتهي مستطيل من النموذج الهجين للإجهادات

كما رأينا يمثل مبدأ الطاقة المتممة المعدل الأساس النظري للتطبيق الهجين من نموذج الإجهادات .و قبل البدء بتطبيق هذا المبدأ على حالة بلاطة مستوية يجب تبسيط هذا المبدأ من الحالـــة الفراغيـــة للوسط المستمر المتمثل بالعلاقتين (3.78),(3.79) إلى الحالة المستوية للوسط المقسم إلى عنـــاصر منتهية و التي يتم فيها مراعاة الحالة الخاصة التي تمثل الوضعية الإجهادية و وضعيـــة التشـــوهات لبلاطة مستوية . يتم هذا التبسيط بشكل مماثل لما ورد في الفقرة (5-5).ونحصل بعد هذا التبسيط على العلاقة (5.63) و ذلك باعتبار أن نظرية السطوح الحرة الخالية من الإجهادات سارية المفعول و أن تطبيق القوى الخارجية يمكن اعتباره على السطح الوسطي للبلاطة و لاداعي لإعـــادة هـــذا التبسيط من جديد .ويمكن الانتقال مباشرة إلى شرح الخطوط الأساسية لهذا التطبيق كما يمكننـــا اختصار بعض الشروحات لورودها أثناء تطبيق هذه الطريقة على عنصر إطاري فراغي .

6-5-1- خوارزميات الطريقة الهجينة

وجدنا أنة اقتصرنا أثناء معالجة البلاطة الرقيقة على استخدام موتّرة الإجهادات المحددة في العلاقـة (6.77) و موترة التشوهات الموافقة لها المحددة في العلاقة (6.76) .و بناء عليه تختصر العلاقة الـتي تربط بين الإجهادات و بين التشوهات أو قانون المادة (2.49) للحالة الفراغية في حالة البلاطـــة الرقيقة إلى العلاقة (6.90) كما أن العلاقة العكسية التي تربط بين موترة التشـــوهات المختصـــرة (6.70) وموترة الإجهادات المختصرة (6.77) لحالة البلاطة الرقيقة يمكن استنتاجها من الحالـــة الفراغية المحددة بالعلاقة (2.50) بعد استبعاد العلاقات الخاصة غير المعتبرة في معالجـــة البلاطـة الرقيقة . و بعد إعادة ترتيب العلاقات الناتجة عن هذا الاستبعاد و مراعاة تناظر موترة الإجـهادات و التشوهات للبلاطة الرقيقة نحصل على :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x^1x^1} \\ \varepsilon_{x^2x^1} \\ \varepsilon_{x^1x^2} \\ \varepsilon_{x^2x^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & & & -\nu \\ & 1+\nu & 1+\nu & \\ & 1+\nu & 1+\nu & \\ -\nu & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{x^1x^1} \\ \sigma^{x^2x^1} \\ \sigma^{x^1x^2} \\ \sigma^{x^2x^2} \end{bmatrix} \tag{6.203}$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma^{kl}$$

حيث S_{ijkl} موتّرة الليونة لحالة البلاطة الرقيقة. و لتقييم طاقة التشوه الداخلية المتممة

$$\Pi_i^* = \tfrac{1}{2}\int_V \sigma^{ij} S_{ijkl}\sigma^{kl} dv \tag{6.204}$$

وجدنا أنه من الأنسب افتراض توابع قوى المقطع بدل من افتراض توابع الإجهادات و ذلك لتغير هذه الأخيرة على ارتفاع المقطع .و لذلك لابد من كتابة الطاقة الداخلية المتممة بدلالة قوى المقطع .لهذا الغرض نصيغ الطاقة الداخلية المتممة بدلالة الانحناءات بتعويض العلاقة (6.94) في العلاقة (6.204) فنحصل على :

$$\begin{aligned} \Pi_i^* &= \frac{1}{2}\int_A \chi_{ij} \left(\int_{-t/2}^{t/2} x^3 c^{ijkL} x^3 dx^3\right)\chi_{kl} dA \\ &= \frac{1}{2}\frac{t^3}{12}\int_A \chi_{ij} c^{ijkl} \chi_{ke} dA \end{aligned} \tag{6.205}$$

بعد ذلك تصاغ الانحناءات بدلالة قوى المقطع بإيجاد معكوس العلاقـــة (6.95) والـــذي يمكـــن صياغته بالشكل :

$$\chi_{ij} = \frac{12}{t^3} S_{ijkl} m^{kl} \tag{6.206}$$

و ذلك بعد الأخذ بعين الاعتبار أن $m^{x^1x^2} = m^{x^2x^1}$; $\chi_{x^1x^2} = \chi_{x^2x^2}$ أثناء أيجاد معكـــــوس العلاقة المعتبرة .و بتعويض العلاقة (6.206) في العلاقة (6.201) و بعد مراعاة أن S_{ijkl} يمثـــــل مقلوب c^{ijkl} نحصل على :

$$\Pi_i^* = \frac{1}{2}\frac{12}{t^3}\int_A m^{ij} S_{ijkl} m^{kl} dA \qquad (6.207)$$

يخضع اختيار توابع قوى المقطع للضوابط نفسها التي شرحت في الفقرة (5-5-2) و للمرء الحرية في اختيار هذه التوابع بحيث تتحقق المتطلبات الواردة في الفقرة المنوه عنها والتابع التقريبي التالي :

$$\begin{bmatrix} m^{x^1x^1} \\ m^{x^2x^1} \\ m^{x^1x^2} \\ m^{x^2x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & x^1 & x^2 & & & (x^1)^2 & x^1x^2 & (x^2)^2 & & \\ & 1 & & & x^1 & x^2 & & -x^1x^2 & \frac{1}{2}(x^1)^2 & & \frac{1}{2}(x^2)^2 & -x^1x^2 \\ & 1 & & & x^1 & x^2 & & -x^1x^2 & \frac{1}{2}(x^1)^2 & & \frac{1}{2}(x^2)^2 & -x^1x^2 \\ & & 1 & & & x^1 & x^2 & & & (x^1)^2 & x^1x^2 & (x^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \\ \beta_{10} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x^1x^2 \\ -\frac{1}{2}x^1x^2 \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \bar{p}^3$$

$$m^{ij} = p^{ijkl}\beta_{kl} + \bar{p}^{ij}\bar{\beta}; i, j = x^1, x^2; k = 1,2; \ell = 1,2,....,6$$

$$(6.208)$$

يحقق المتطلبات السابقة لحالة حمولة موزعة بانتظام على مساحة العنصر المنتهي و أهمـــــها معادلـــة التوازن الداخلية على المستوى التفاضلي .

ينتج الشكل المصفوفي الوارد في العلاقة (6.208) من تجميع قرائن الشكل الموتري في نفس العلاقة . حيث تجمع القرينتين kl في قرينة واحدة مثلا n و القرينتين(j) (i) في قرينـــة واحــدة (m) و شكل العلاقة السابقة المصفوفي يصبح: $m^m = P^{mn}\beta_n + \bar{p}^{mn}\bar{\beta}$.واستخدمت الأقواس للقرائن لتمييز قرائن الأطراف. بالتابع التقريبي السابق لقوى المقطع تأخذ طاقة التشوه الداخلية المتممـــة الشكل :

$$\begin{aligned}\Pi_i^* &= \tfrac{1}{2}\int_A (p^{ijkl}\beta_{kl} + \bar{p}^{ij}\bar{\beta})S'_{ijmn}(p^{mnop}\beta_{op} + \bar{p}^{mn}\bar{\beta})dA \\ &= \tfrac{1}{2}\beta_{kl}(\int_A p^{ijkl}S'_{ijmn}p^{mnop}dA)\beta_{op} + \tfrac{1}{2}\beta_{kl}(\int_A p^{ijkl}S'_{ijmn}\bar{p}^{mn}dA)\bar{\beta} \\ &+ \tfrac{1}{2}\beta_{op}(\int_A \bar{p}^{ij}S'_{ijmn}p^{mnop})\bar{\beta} + \tfrac{1}{2}\bar{\beta}(\int_A \bar{p}^{ij}S'_{ijmn}\bar{p}^{mn}dA)\bar{\beta} \\ &= \tfrac{1}{2}\beta_{kl}H^{klop}\beta_{op} + \tfrac{1}{2}\beta_{kl}\bar{H}^{kl}\bar{\beta} + C_1\end{aligned} \tag{6.209}$$

حيث:

$$H^{klop} = \int_A P^{ijkl}S'_{ijmn}P^{mnop}dA \tag{6.210}$$

$$\bar{H}^{kl} = \int_A P^{ijkl}S'_{ijmn}\bar{P}^{mn}dA\bar{\beta} \tag{6.211}$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\bar{\beta}(\int_A \bar{P}^{ij}S'_{ijmn}\bar{P}^{mn}dA)\bar{\beta} \tag{6.212}$$

و القرائن الجديدة المستخدمة تتحول بالشـــكل $m,n = x^1, x^2$ و o=1,2 و p=1,2,..........6 . S'_{ijmn} مساوية لـــ $\frac{1,2}{t^3}S_{ijmn}$.

يمثل الحد الثاني من الطاقة المتممة المعدلة (5.63) عمل القوى السطحية الطرفية علـــى أطــراف العنصر المنتهي . و تنتج القوى السطحية الطرفية من قوى المقطع ضمن العنصر المنتهي بتعويـــض

معادلات الأطراف الأربعة للعنصر المنتهي هي (i)(j),(j)(k),(k)(l),(l)(i) ومعادلاتها على التوالي: $x^1 = -a, x^2 = b, x^1 = a, x^2 = -b$ انظر الشكل (6-15). بتعويض هذه المعادلات في العلاقة (6.208) نحصل على المنحنيات التي تمثل العزوم على هذه الأطراف. وللحصول على المنحنيات التي تمثل القوى القاصة على هذه الأطراف تشتق الأخيرة و فق المعادلتين الثانية و الثالثة للعلاقة (6.85) من معادلات العزوم (6.208) و تعوض معادلات الأطراف في العلاقات الناتجة. وبعد اتخاذ هذه الإجراءات نحصل على الشكل المصفوفي التالي لقوى المقطع في أطراف العنصر المنتهي :

$$
\begin{bmatrix}
-q^{x2}_{(i)(j)} \\
m^{x^2x^2}_{(i)(j)} \\
q^{x^1}_{(j)(k)} \\
m^{x^1x^1}_{(j)(k)} \\
q^{x^2}_{(k)(l)} \\
-m^{x^2x^2}_{(k)(l)} \\
-q^{x^1}_{(l)(i)} \\
-m^{x^1x^1}_{(l)(i)}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
 & & & -2 & & -1 & -2b & -2x^1 & & -x^1 & -x^1 & \\
 & 1 & & & x^1 & -b & & & (x^1)^2 & -bx^1 & -bx^1 & b^2 \\
 & & 1 & & 2 & & & x^2 & & 2x^2 & 2x^2 & -2a \\
1 & & a & x^2 & & & a^2 & ax^2 & (x^2)^2 & & & \\
 & & & 2 & & 1 & -2b & 2x^1 & & x^1 & x^1 & \\
 & -1 & & & -x^1 & -b & & & -(x^1)^2 & -bx^1 & -bx^1 & -b^2 \\
 & & -1 & & -2 & & & -x^2 & & -2x^2 & -2x^2 & -2a \\
-1 & & a & x^2 & & & -a^2 & ax^2 & (x^2)^2 & & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\beta 1 \\
\beta 2 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
\beta 12
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
-b \\
 \\
-a \\
 \\
-b \\
 \\
-a \\

\end{bmatrix}
\bar{p}^3 ; \qquad P^i_{b,e} = \bar{R}^{ikl}_{b,e}\beta_{kl} + \bar{R}^{i}_{b,e}\bar{\beta}
$$

(6.213)

يلاحظ الآن أن b,e استخدمت كقرائن تتحول على أطراف العنصر المنتهي كما يلي : = b,l (i) (j) , (j)(k), (k) (l) , (l) (i) و يلاحظ أيضا أن العلاقة السابقة تحتوي على مقادير تتحول

قرائنها على x^1,x^2 و هي عزوم المقطع وأخرى تتحول قرائنها إما على x^1 أو على x^2 وهي قوى القص في المقطع. في الحالة العامة يكون من الأسلم فصل هذه العلاقة إلى علاقتـــين تحتـــوي إحداهما على عزوم المقطع بمفردها وأخرى تحتوي على القوى القاصة في المقطع وذلـــك لتـــلافي الالتباس أثناء التحويل من جملة إحداثيات إلى أخرى .ولأن مثل هذا الالتباس هنا غير وارد أثنـــاء استخدامنا للإحداثيات الديكارتية يمكن أن نعتبر أن القرينة i ,تتحول بالشكل $i=1;2$ أما بقيـة القرائن فتتحول كما في العلاقة (6.208) ويكون عدد عناصر $p^i{}_{b,e}$ مساوياً ل $4*2=8$
وعدد عناصر المصفوفة $R_{b,e}^{ikl}$ مساوياً ل $4*2*2*6=96$ أما الانتقالات على أطراف العنصـــر المنتهي ,التي يمكن افتراضها بشكل مستقل , والموافقة لشعاع قوى المقطع الطرفية ,فسنفترض أنـــه يمكن تقريبها بالتوابع التالية :

$$
\begin{bmatrix} u_{x^3}^{\circ(i)(j)} \\ \varphi_{x^1}^{(i)(j)} \\ u_{x^3}^{\circ(j)(k)} \\ \varphi_{x^3}^{(j)(k)} \\ u_{x^3}^{\circ(k)(l)} \\ \varphi_{x^1}^{(k)(l)} \\ u_{x^3}^{\circ(l)(i)} \\ \varphi_{x^2}^{(l)(i)} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
h_1^1 & & -ah_2^1 & h_3^1 & & -ah_4^1 & & & & & & \\
& \frac{1}{2}(1-\theta^1) & & & \frac{1}{2}(1+\theta^1) & & & & & & & \\
& & & h_1^2 & bh_2^2 & & h_3^2 & bh_4^2 & & & & \\
& & & & & \frac{1}{2}(1-\theta^2) & & & \frac{1}{2}(1+\theta^2) & & & \\
& & & & & & h_3^1 & & -ah_4^1 & h_1^1 & & -ah_2^1 \\
& & & & & & & \frac{1}{2}(1+\theta^1) & & & \frac{1}{2}(1-\theta^1) & \\
h_1^2 & -bh_2^2 & & & & & & & & h_3^2 & -bh_4^2 & \\
& & \frac{1}{2}(1-\theta^2) & & & & & & & & & \frac{1}{2}(1+\theta^2)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{x^3}^{\circ}(i) \\ \varphi_{x^1}(i) \\ \varphi_{x^2}(i) \\ u_{x^3}^{\circ}(j) \\ \varphi_{x^1}(j) \\ \varphi_{x^2}(j) \\ u_{x^3}^{\circ}(k) \\ \varphi_{x^1}(k) \\ \varphi_{x^2}(k) \\ u_{x^3}^{\circ}(l) \\ \varphi_{x^1}(l) \\ \varphi_{x^2}(l) \end{bmatrix}
$$

$$u_i^{b,e} = L_i^{b,e\,m(n)} u_{m(n)} ; m = 1,2,3 \ (n) = (i),(j),(k),,(l) \qquad (6.214)$$

حيث :

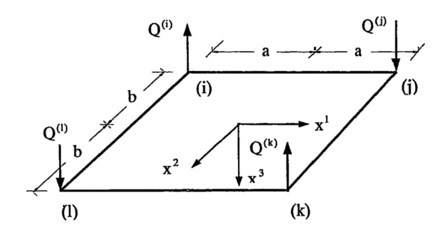
$$h_1^1=\frac{1}{4}\left(2-3\theta^1+\left(\theta^1\right)^3\right);h_3^1=\frac{1}{4}\left(2+3\theta^1-\left(\theta^1\right)^3\right)$$
$$h_2^1=\frac{1}{4}\left(1-\theta^1-\left(\theta^1\right)^2+\left(\theta^1\right)^3\right);h_4^1=\frac{1}{4}\left(-1-\theta^1+\left(\theta^1\right)^2+\left(\theta^1\right)^3\right)$$
$$h_1^2=\frac{1}{4}\left(2-3\theta^2+\left(\theta^2\right)^3\right);h_3^2=\frac{1}{4}\left(2+3\theta^2-\left(\theta^2\right)^3\right) \tag{6.215}$$
$$h_2^2=\frac{1}{4}\left(1-\theta^2-\left(\theta^2\right)^2+\left(\theta^2\right)^3\right);\ h_4^2=\frac{1}{4}\left(-1-\theta^2+\left(\theta^2\right)^2+\left(\theta^2\right)^3\right)$$
$$\theta^1=\frac{x^1}{a}\quad ;\quad \theta^2=\frac{x^2}{b}$$

لاستخراج هذه التوابع استخدمت على كل طرف من أطراف البلاطـة نفـس الطريقـة الـتي استخدمت لاستخراج توابع الانتقالات التقريبية في عنصر منتهي لإطار فراغي . مع ملاحظـة أن مركز المحاور الاحداثية منطبق على منتصف العنصر . و بالاستعانة بالعلاقتين (6.213),(6.214) يقيّم الحد الثاني من العلاقة (5.63) بالشكل :

$$T_1^{'}=\int_s p_{b,e}^{i}u_i^{b,e}d\varsigma$$
$$=\int_s(R_{b,e}{}^{ikl}\beta_{kl}+\overline{R}_{b,e}^{i}\overline{\beta})L_i^{b,em(n)}u_{m(n)}ds \tag{6.216}$$

بقي لايجاد قيمة الحد الثاني النهائية اعتبار عمل القوى الركنية $2m^{x^1x^2}$ الممثلة في الشكل 6-18. تحسب هذه القوى من التابع التقريبي للعزوم (6.208) بتعويض احداثيات عقد العنصر المنتـهي في هذه الأخيرة . بعد هذا التعويض نحصل على العلاقات التالية للقوى الركنية :

$$Q^{(i)}=-2\beta_2-2a\beta_5-2b\beta_6+2ab\beta_8-a^2\beta_9-b^2\beta_{11}+2ab\beta_{12}+ab\overline{p}^3$$
$$Q^{(j)}=2\beta_2+2a\beta_5-2b\beta_6+2ab\beta_8-+a^2\beta_9-b^2\beta_{11}+2ab\beta_{12}+ab\overline{p}^3 \tag{6.217}$$
$$Q^{(k)}=-2\beta_2-2a\beta_5-2b\beta_6+2ab\beta_8-a^2\beta_9-b^2\beta_{11}+2ab\beta_{12}+ab\overline{p}^3$$
$$Q^{(l)}=2\beta_2-2a\beta_5+2b\beta_6+2ab\beta_8+a^2\beta_9+b^2\beta_{11}+2ab\beta_{12}+ab\overline{p}^3$$



شكل 6-18: القوى الركنية على زوايا العنصر المنتهي

و العمل الذي تنجزه هذه القوى يساوي إلى مقادير هذه القوى الــواردة في العلاقــة الســابقة مضروبا بانتقالات العقد الموافقة في اتجاه المحور x^3 .

$$T_2' = Q^{m(n)} u_{m(n)} + \overline{Q}^{m(n)} u_{m(n)} \tag{6.218}$$

حيث :

$$Q^{m(n)} = \{Q^{(i)}\,0\,0\,Q^{(j)}\,0\,0\,Q^{(k)}\,0\,0\,Q^{(l)}\,0\,0\}$$

$$\overline{Q}^{(m)(n)} = \{ab\overline{p}^3\;0\;0\;ab\overline{p}^3\;0\;0\;ab\overline{p}^3\;0\;0\;ab\overline{p}^3\;0\;0\} \tag{6.219}$$

و تصبح قيمة الحد الثاني مساوية لـــ :

$$T = T_1' + T_2' = \beta_{ke} T^{klm(n)} u_{m(n)} + \overline{\beta} T^{m(n)} u_{m(n)} \tag{6.220}$$

حيث :

$$T^{klm(n)} = \int_s R^{ikl}_{b,e} L^{b,em(n)}_i dS + \frac{\partial}{\partial \beta_{kl}} Q^{m(n)} \quad (6.221)$$

$$\overline{T}^{m(n)} = \int_S \overline{R}^{i}_{b,e} L^{b,em(n)}_i dS + \frac{\partial}{\partial \overline{\overline{\beta}}} \overline{Q}^{m(n)} \quad (6.222)$$

وذلك لأن:

$$\beta_{kl}\left[\frac{\partial}{\partial \beta_{kl}} Q^{m(n)}\right] = Q^{m(n)} \quad (6.223)$$

$$\overline{\beta}\left[\frac{\partial}{\partial \overline{\overline{\beta}}} \overline{Q}^{m(n)}\right] = \overline{Q}^{m(n)} \quad (6.224)$$

أثناء جمع T_2' إلى T_1' ثم استبدال $Q^{m(n)}$.$\overline{Q}^{m(n)}$ في العلاقة (6.218) بمكافئاتها من العلاقتين (6.224),(6.223) .

يتم تقييم الحد الثالث للطاقة المعدلة في العلاقة (5.63) بشكل مماثل للطريقة التي تم شرحها أثناء تقييم الحد المتعلق بالحمولات الطرفية على أطراف عنصر البلاطة الرقيقة شكل (6-16) و التي وردت في العلاقات (6.187) و حتى (6.191) مع الفارق أن التوابع التقريبية على أطراف العنصر المنتهي نموذج الإجهادات يتم اختيارها بشكل مستقل عن التوابع التقريبية الأخرى .

نفرض أن التوابع التقريبية للانتقالات على أطراف العنصر المنتهي ممثلة بالعلاقات (6.214) و أن وصف تابع الحمولة يتم بشكل مماثل لما ورد في العلاقة (6.187) أي تابع من الدرجة الثانية في إحداثي الطرف . لحالة مثل هذا الوصف نأخذ التوابع التقريبية مثلا للطرف (j) (i) الشكل المفصل التالي :

$$A_1 = -\frac{1}{2}\theta^1 + \frac{1}{2}(\theta^1)^2; A_2 = 1-(\theta^1)^2; A_3 = \frac{1}{2}\theta^1 + \frac{1}{2}(\theta^1)^2 \quad (6.225)$$

و يمكن استنتاجها بسهولة لبقية الأطراف .

و يصبح الحد الثالث من الطاقة المتممة المعدلة بعد استخدام التوابع التقريبية المذكورة مكافئاً لـــ :

$$T = \int_{S_\sigma^{b,e}} \overline{p}^{i}_{b,e}\, u_i^{\ b,e} dS = \overline{p}^{k}_{b,e} \int_{S_\sigma^{b,e}} A^{\ i}_{\ k}\ L_i^{b,em(n)} u_{m(n)} dS = \overline{S}^{m(n)} u_{m(n)} \quad (6.226)$$

حيث :

$$\overline{S}^{m} = \overline{p}^{k}_{b,e} \int_{S_\sigma^{b,e}} A_k^i L_i^{b,em(n)} dS \quad (6.227)$$

شعاع الحمولات الخارجية المركزة على العقد والمكافئة للحمولة الموزعة على أطــــراف العنصـــر المنتهي . و بهذا تصبح الطاقة المتممة المعدلة :

$$\begin{aligned}\Pi_{ch} &= \frac{1}{2}\beta_{kl} H^{klop}\beta_{op} + \frac{1}{2}\beta_{kl}\overline{H}^{kl}\overline{\beta} + c_1 \\ &- \beta_{kl} T^{klm(n)} u_{m(n)} - \overline{\beta T}^{m(n)} u_{m(n)} + \overline{S}^{m(n)} u_{m(n)}\end{aligned} \quad (6.228)$$

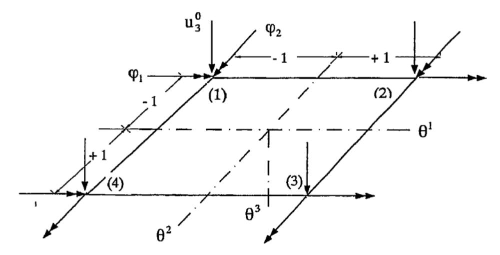
و هذا الشكل مكافئ لما هو وارد في العلاقة (5.86) و ذلك بعد ضم كل من القرينتـــين l, k والقرينتين o,p في قرينة واحدة . يتم اتباع نفس الأسلوب الوارد في العلاقات من (5.86) و حتى (5.98) للحصول على جملة المعادلات الخطية النهائية للبلاطة الرقيقة و المعادلات الناتجة أثناء هـذا الانتقال مماثلة لتلك المشتقة في العلاقات الأخيرة المذكورة مع اختـــلاف في أبعـــاد المصفوفـــات المستخدمة.

6-6-عنصر منتهي- نموذج الانتقالات بتوابع تقريبية متعلقة بالحمولات في الإحداثيات الطبيعية

بعد عرض عنصرين منتهيين من نموذج الانتقالات والنموذج الهجين للإجهادات في الإحداثيـــات الديكارتية ننتقل إلى عرض النموذج المقترح بتوابع انتقالات متعلقـــة بالحمولـــة في الإحداثيـــات الطبيعية . وسوف نقتصر في عرضنا على عنصر منته مستطيل محمل بحمولة موزعة بانتظام شـــدتها $\overline{p}^3$ على واحدة السطح وسوف يراعى في إنجاز هذه الدراسة العمومية في التطبيق بحيث إذا مـــا

أراد المرء تطبيق مثل هذه الدراسة على عنصر شبه منحرف والممثل للحالة العامة لوجد المفـــاهيم الضرورية لذلك والتي يمكن أن تساعد في إنجاز دراسته . ليكن لدينا العنصر المنتهي المستطيل المبين في الشكل (6–19) والمنسوب إلى جملة الإحداثيات الطبيعية $(\theta^1,\theta^2,\theta^3)$ ولتكن الإحداثيـات الديكارتية لرؤوسه: (1)(-a,-b); (2)(a,-b); (3)(a,b); (4)(-a,b)

والطبيعية: (1)(-1,-1), (2)(1,-1), (3)(1,1), (4)(-1,1) على التوالي .



شكل 6–19: عنصر منتهي مستطيل لبلاطة ، المحاور الإحداثية الطبيعية، درجات الحرية

في البدء تحسب الخواص الهندسية التفاضلية للعنصر وفق العلاقات الواردة في الفقرة 6–1. تبـــين هذه الحسابات أنها لحالة العنصر المستطيل ثابتة في كل نقطة من نقاطه ويكتفي بحسابها في نقطـــة واحدة ,بينما تختلف هذه الخواص من نقطة إلى أخرى في الحالة العامة(مثلاً حالة عنصر بشـــكل شبه منحرف) ولحالة العنصر المستطيل المعطى تكون هذه الخواص كالتالي :

$$\mathbf{g}_1 = a\mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{g}_2 = b\mathbf{e}_2$$
$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (a)^2 & 0 \\ 0 & (b)^2 \end{pmatrix}$$
$$\sqrt{g} = ab$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(b)^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}^1 = \frac{1}{a}\mathbf{e}^1$$

$$\mathbf{g}^2 = \frac{1}{b}\mathbf{e}^2$$

$$\mathbf{g}_{1,1} = \mathbf{g}_{1,2} = \mathbf{g}_{2,1} = \mathbf{g}_{2,2} = 0$$

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$$

(6.229)

يلاحظ أيضا أن كل رموز كريستوفل معدومة لحالة العنصر المستطيل بينما تكون قيمها في الحالـة العامة (حالة شبة المنحرف مثلآ) مغايرة للصفر .

يفترض الآن التابع التقريبي للانتقالات u_3^0 في الإحداثيات الطبيعية على الشكل التالي :

$$u_3^0 = c_0 + c_1\theta^1 + c_2\theta^2 + c_3(\theta^1)^2 + c_4\theta^1\theta^2 + c_5(\theta^2)^2$$
$$+ c_6(\theta^1)^3 + c_7(\theta^1)^2\theta^2 + c_8\theta^1(\theta^2)^2 + c_9(\theta^2)^3 c_{10}(\theta^1)^3\theta^2$$
$$+ c_{11}\theta^1(\theta^2)^3 + c_{12}(\theta^1)^2(\theta^2)^2 = c_\alpha\theta^\alpha$$

(6.230)

خلافا للمعتاد يحتوي التابع التقريبي السابق على عدد من الحدود أكبر من العدد المعتاد و الممثـــل بعدد من العقد مضروبا بعدد درجات الحرية للعقدة الواحدة . و الحدود التي تزيد عـــن العـــدد السابق مخصصة لاحتواء المؤثرات الخارجية .و هذه الحدود ممثلة في التابع التقريبي السابق بـــالحد الثالث عشر المضاف على التابع المعروف في المصادر العلمية . و باعتبار أن رمـــوز كريســـتوفل معدومة في حالة العنصر المستطيل ، مما يترتب على ذلك تماثل المشتق الأساسي و المشتق العـــادي فإن اشتقاق التابع التقريبي (6.230)وفق المعادلة التفاضلية (6.167) يؤدي عندما نريد تحقيقها إلى :

$$2.4.k g_i{}^1 g_j{}^2 g_k{}^2 g_l{}^1 \delta_j{}^k \delta_l{}^i c_{12} = \overline{p}^3 \qquad (6.231)$$

و ذلك باعتبار أن ($u^0_{3,1221} = u^0_{3,2112}$) و أن($u^0_{3,1111} = u^0_{3,2222} = 0$).

و بعد نشر جداء مركبات أشعة القاعدة الأساسية في التركيب (6.231) و تعويض مركباتها من المعادلتين الأولى و الثانية للعلاقة (6.229) نجد أن :

$$8k.a^2b^2c_{12} = \overline{p}^3 ; c_{12} = \frac{\overline{p}^3}{8k.a^2b^2} \tag{6.232}$$

و بعد تعيين الثابت الفائض c_{12} ينقسم التابع التقريبي u_3^0 إلى جزء متجانس يحوي على الثوابت من c_0 إلى c_{11} و جزء آخر غير متجانس يتضمن الحمولة الخارجية في مستوى العنصر بالشكل :

$$u_3^0 = c_0 + c_1\theta^1 + c_2\theta^2 + c_3(\theta^1)^2 + c_4\theta^1\theta^2 + c_5(\theta^2)^2$$

$$+ c_6(\theta^1)^3 + c_7(\theta^1)^2 + c_8\theta^1(\theta^2)^2 + c_9(\theta^2)^3 + c_{10}(\theta^1)^3\theta^2$$

$$+ c_{11}\theta^1(\theta^2)^3 + \frac{\overline{p}^3}{8ka^2b^2}\left(\theta^1\right)^2\left(\theta^2\right)^2$$

$$= \theta^{n'}c_{n'} + \overline{\theta}\overline{p}^3 \quad ; \quad \overline{\theta} = \frac{\overline{p}^3}{8ka^2b^2}\left(\theta^1\right)^2\left(\theta^2\right)^2 n' = 0,1,2,.....,11$$

(6.233)

و الآن تكفي المعادلات الناتجة عن تعويض إحداثيات العقد (4),(3),(2),(1) في العلاقة (6.233) و مشتقاتها بالنسبة للإحداثي θ^2 (الممثل للدوران φ_1)و بالنسبة للإحداثي θ^1 (الممثل للدوران φ_2)لتعيين الثوابت الإثنتي عشر المتبقية . و إحداثيات العقد المقصودة هي الإحداثيات الطبيعية و ليس الديكارتية ، لأن التوابع المختارة هي في الإحداثيات الطبيعية . و بعد التعويض نحصل على جملة معادلات خطية مؤلفة من اثنتي عشر معادلة على الشكل التالي :

$$
\begin{bmatrix} u_3^{\circ} \\ \varphi_{1(1)} \\ \varphi_2(1) \\ u_3^{\circ}(2) \\ \varphi_1(2) \\ \varphi_2(2) \\ u_3^{\circ}(3) \\ \varphi_1(3) \\ \varphi_2(3) \\ u_3^{\circ}(4) \\ \varphi_1(4) \\ \varphi_2(4) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & & -1 & -2 & & 1 & 3 & 3 & -1 & -3 \\
 & -1 & & 2 & 1 & & -3 & -2 & 1 & & 3 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
 & & 1 & & 1 & -2 & & 1 & -3 & 3 & 1 & 3 \\
 & -1 & & -2 & 1 & & -3 & 2 & 1 & & 3 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & & 1 & 2 & & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\
 & -1 & & -2 & -1 & & -3 & -2 & -1 & & -3 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
 & & 1 & & -1 & 2 & & 1 & -3 & 3 & -1 & -3 \\
 & -1 & & 2 & -1 & & -3 & 2 & -1 & & -3 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix}
$$

$$
+\frac{\overline{p}^{3}}{8ka^2b^2}
\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

$$
u^{\circ}_{\rho(p)} = A^{n'}{}_{\rho(p)} c_{n'} + \overline{A}_{\rho(p)} \overline{p}^{3} ; \rho = 1,2,3; (p) = (1),(2),(3),(4) \qquad (6.235)
$$

مجاهيلها هي الثوابت الاختيارية $c_{n'}$ ، $u^{\circ}_{\rho(p)}$ هي انتقالات ودورانات عقد العنصر .بنقل الحـــد الثاني من الطرف الثاني للعلاقة السابقة إلى الطرف الأول نحصل على :

$$A^{\circ}_{\rho(p)} c_{n'} = u^{\circ}_{\rho(p)} - \overline{A}_{\rho(p)} \overline{p}^3 \qquad (6.235)$$

وبإيجاد مقلوب المصفوفة $A^{n'}_{\rho(p)}$ يمكن تعيين الثوابت الاختيارية وهي مساوية لما يلي:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -3 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & -1 & -1 & 4 & -1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u^{\circ}_{3(1)} \\ \varphi_{1(1)} \\ \varphi_{2(1)} \\ u^{\circ}_{3(2)} \\ \varphi_{1(2)} \\ \varphi_{2(2)} \\ u^{\circ}_{3(3)} \\ \varphi_{1(3)} \\ \varphi_{2(3)} \\ u^{\circ}_{3(4)} \\ \varphi_{1(4)} \\ \varphi_{2(4)} \end{bmatrix} - \frac{\overline{p}^3}{8ka^2b^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$c_{n'} = B^{\rho(p)}_{n'} (u^{\circ}_{\rho(p)} - \overline{A}_{\rho(p)} \overline{p}^3 \qquad (6.236)$$

بتعويض الثوابت الاختيارية من العلاقة في (6.227) نحصل على توابع الشكل والمؤلفة الآن من جزء متجانس مرتبط بانتقالات العقد وجزء غير متجانس مرتبط بالحمولة الخارجية الموزعة على العنصر وذلك كما يلي :

$$u^{\circ}_3 = \theta^{n'} B^{\rho(p)}_{n'} u^{\circ}_{\rho(p)} - \theta^{n'} B^{\rho(p)} \overline{A}_{\rho(p)} \overline{P}^3 + \overline{\theta}.\overline{p}^3 = N^{\rho(p)} u^{\circ}_{\rho(p)} + \overline{NP}^3 \qquad (6.237)$$

وتوابع الشكل $N^{\rho(P)}$ مكافئة تماماً لـ $N^{j(p)}$ في العلاقة (6.180) والمعطاة تفصيلياً في العلاقة (6,181) وأما $\overline{N}$ فتعطى بالعلاقة :

$$\overline{N} = \frac{1}{8K.a^2b^2} (1 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 + (\theta^1)^2 (\theta^2)^2) \qquad (6.238)$$

بهذه التوابع يجب تقييم تعبير الطاقة الكامنة (6.175). وباعتبار أن كل رموز كريستوفل معدومة مما ينتج عنه تكافؤ المشتق الأساسي $u^{\circ}_3\big|_{\alpha\beta}$ و المشتق العادي $u^{\circ}_{3},_{\alpha\beta}$ ، وبالتالي يمكن اشتقاق موتّرة الانحناءات (6.153) من العلاقة (6.237) بالشكل :

$$\chi_{\alpha\beta} = -(N^{\rho(p)}{}_{,\alpha\beta}\, \overset{\circ}{u}_{\rho(p)} + \overline{N}_{,\alpha\beta}\, \overline{p}^{3}) \tag{6.239}$$

و بهذا يصبح تعبير الطاقة الكامنة كما يلي :

$$\Pi = \sum_{e} \Big[\tfrac{1}{2} \overset{\circ}{u}_{\rho(p)} (\int_A N^{\rho(p)}{}_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\eta(q)}{}_{,\gamma\delta} \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2) \overset{\circ}{u}_{\eta(q)}$$

$$+ \overset{\circ}{u}_{\rho(p)} (\int_A N^{\rho(p)}{}_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} \overline{N}_{,\gamma\delta}\, \overline{p}^{3} \sqrt{g}\, d\theta^1 \theta^2)$$

$$+ \tfrac{1}{2} (\int_A \overline{p}^{3}\, \overline{N}_{,\alpha\beta}\, E^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \overline{N}_{,\gamma\delta}\, \overline{p}^{3} \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2)$$

$$- \overset{\circ}{u}_{\rho(p)} (\int_A N^{\rho(p)}\, \overline{p}^{3} \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2) - \int_A \overline{N}\, \overline{P}^{3} \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2$$

$$- \sum_{m} \overline{F}^{\rho(p)}\, \overset{\circ}{u}_{\rho(p)}; \qquad \eta = 1,2,3; q = (1),(2),(3),(4)$$

$$= \sum_{e} (\tfrac{1}{2} \overset{\circ}{u}_{\rho(p)} k^{\rho(p)\eta(q)} \overset{\circ}{u}_{\eta(q)} - \overset{\circ}{u}_{\rho(p)} \overline{F}_1^{\rho(p)} + \overset{\circ}{u}_{\rho(p)} \overline{F}_2{}^{\rho(p)} + c) - \sum_{m} \overline{F}^{\rho(p)} \overset{\circ}{u}_{\rho(p)} \tag{6.240}$$

حيث :

$$k^{\rho(p)\eta(q)} = \int_A N^{\rho(p)}{}_{,\alpha\beta}\, E^{\alpha\beta\gamma\delta}\, N^{\eta(q)}{}_{,\gamma\delta} \sqrt{g}\, d\theta^1 \theta^2 \tag{6.241}$$

$$\overline{F}_1{}^{\rho(p)} = \int_A N^{\rho(p)} \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 \tag{6.242}$$

$$\overline{F}_2{}^{\rho(p)} = \int_A N^{\rho(p)}{}_{,\alpha\beta}\, E^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \overline{N}_{,\gamma\delta}\, \overline{p}^{3} \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 \tag{6.243}$$

$$c = \tfrac{1}{2} \int_A \overline{p}^{3}\, \overline{N}_{,\alpha\beta}\, E^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \overline{N}_{,\gamma\delta}\, \overline{p}^{3} \sqrt{g}\, d\theta^1 \theta^2 - \int_A \overline{N} (\overline{p}^{3})^2 \sqrt{g}\, d\theta^1 d^2 \tag{6.243}$$

يلاحظ أثناء الانتقال من العلاقة (6.175) إلى العلاقة (6.240) من أنه بالرغم من أن الحمولات مركزة على بعض عقد البلاطة فقد تم تنضيد شعاع الانتقال $\overset{\circ}{u}_m$ لبعض عقد البلاطة في شعاع الانتقال لكامل عقد البلاطة . قبل تجميع العلاقة (6.240) على كامل عناصر البلاطة يجب نسب الطاقة الكامنة الواردة في العلاقة السابقة بالنسبة للإحداثيات الطبيعية إلى الإحداثيات الديكارتية الخاصة بالعنصر ومن ثم نسبها إلى الإحداثيات الديكارتية العامة لكامل المنشأ . و الخطوة الأخيرة كانت قد نوقشت في الفقرة السابقة و تنجز كما هو وارد في العلاقة (6.197) أما بالنسبة

للتحويل من الإحداثيات الطبيعية إلى الإحداثيات الديكارتية الخاصة بالعنصر فيستنتج بالتعبير عن شعاع انتقالات العقدة في الإحداثيات الطبيعية بدلالة مثيله في الإحداثيات الديكارتية و الشروحات التالية تقود إلى مثل هذا التعبير . باعتبار أن المحورين الإحداثيين x^3,θ^3 متطابقان فالانتقال وفق المحور θ^3 لعقدة ما (p) مكافئ تماماً لانتقال هذه العقدة وفق المحور x^3 أي :

$$u^{\circ}_{3(p)} = u^{\circ}_{x^3(p)} \qquad (6.245)$$

أما الدورانات كمشتقات للانتقالات فيتم تحويلها وفق علاقة التحويل التالية :

$$u^{\circ}_{3,\alpha} = g^{i}{}_{\alpha}\, u^{\circ}_{x^3,i} \qquad (6.246)$$

و عليه يكون :

$$\begin{aligned} u^{\circ}_{3,1} &= g^{x^1}{}_{1} u^{\circ}_{x^3,x1} + g^{x^2}{}_{1}, u^{\circ}_{x^3,x^2} \\ u^{\circ}_{3,2} &= g^{x^1}{}_{2} u^{\circ}_{x^3,x1} + g^{x^2}{}_{2}, u^{\circ}_{x^3,x^2} \end{aligned} \qquad (6.247)$$

و بالاستعانة بالعلاقات(6.73).(6.116) و تعويض مركبات أشعة القاعدة الأساسية من (6.229) نجد أن:

$$\begin{aligned} -\varphi_2 &= a(-\varphi_{x^2}) \\ \varphi_1 &= b\varphi_{x^1} \end{aligned} \qquad (6.248)$$

و العلاقات (6.245),(6.248) يمكن ترتيبها بالشكل المصفوفي التالي :

$$\begin{bmatrix} u^{\circ}_{3(p)} \\ \varphi_{1(p)} \\ \varphi_{2(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{\circ}_{x^3} \\ \varphi_{x^1(p)} \\ \varphi_{x^2(p)} \end{bmatrix}; u^{\circ}_{(p)} = T^{(i)}_{(p)} u^{\circ}_{(i)} \qquad (6.249)$$

و بعد ترتيبها لكامل عقد العنصر كالتالي :

$$u^{\circ}_{\rho(p)} = T_{\rho(p)}{}^{l(i)} u^{\circ}_{l(i)}; l = x^1, x^2, x^3; (i) = (1),(2),(3),(4) \qquad (6.250)$$

والمصفوفة $T_{\rho(p)}{}^{l(i)}$ هي مصفوفة أبعادها (12*12) ،كل عناصرها أصفاراً ما عدا قطرها الرئيسي الذي يحتوي على العناصر 1,b,a مكررة أربع مرات على التوالي . بتعويض العلاقة (6.250) في (6.240) نحصل على الطاقة الكامنة منسوبة إلى جملة المحاور الإحداثية الخاصة:

$$\pi = \sum_{e} [\frac{1}{2}\left(u^{\circ}_{l(i)} T_{\rho(p)}{}^{l(i)} K^{\rho(p)\eta(q)} T_{\eta(q)}{}^{m(j)} u^{\circ}_{m(j)}\right) - u^{\circ}_{l(i)} T_{\varsigma(p)}{}^{l(i)} \bar{f}_{1}{}^{\rho(p)}$$

$$+ u^{\circ}_{l(i)} T_{\rho(p)}{}^{l(i)} \overline{f_{2}}^{\rho(p)} + c] - \sum_{m} u^{\circ}_{l(i)} T_{\rho(p)}{}^{l(i)} \bar{f}^{\rho(p)} \qquad (6.251)$$

$$= \sum_{e} \left[\frac{1}{2}\left(u^{\circ}_{l(i)} K^{l(i)m(j)} u^{\circ}_{m(j)}\right) - u^{\circ}_{l(i)} \overline{f_{2}}^{l(i)} + c\right] - \sum_{m} u^{\circ}_{l(i)} \bar{f}^{l(i)}$$

حيث تحسب مصفوفة القساوة وأشعة الحمولة محولة إلى الإحداثيات الديكارتية الخاصـــــة وفـــق العلاقات:

$$K^{l(i)m(j)} = T_{\rho(p)}{}^{l(i)} K^{\rho(p)\eta(q)} T_{\eta(q)}{}^{m(j)} \qquad (6.252)$$

$$\bar{f}_{1}{}^{l(i)} = T_{\rho(p)}{}^{l(i)} \bar{f}_{1}{}^{\rho(p)} \qquad (6.253)$$

$$\bar{f}_{2}{}^{l(i)} = T_{\rho(p)}{}^{l(i)} \bar{f}_{2}{}^{\rho(p)} \qquad (6.254)$$

$$\bar{f}^{l(i)} = T_{\rho(p)}{}^{l(i)} \bar{f}^{\rho(i)} \qquad (6.255)$$

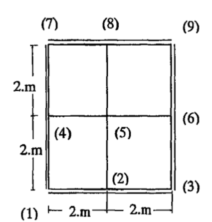
بعد تحويل العلاقة (6.251) ونسبها إلى جملة المحاور الإحداثية العامة والجمع على كامل عنـــاصر المنشأ وأخذ المتغير الأول للطاقة الكامنة الناتجة نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية :

$$K^{\bar{l}(n)\bar{m}(n')} u_{\bar{m}(n')} - \bar{f}^{\bar{l}(n)} = 0 \qquad (6.256)$$

يجب التنويه هنا إلى أنه بعد حساب المجاهيل أو انتقالات العقد في المحاور الإحداثية العامة بنتيجـــة حل المعادلات (6.256) يجب تحويل هذه الانتقالات في البدء إلى جملة المحاور الإحداثية الخاصـة و من ثم تحول إلى جملة المحاور الإحداثية الطبيعية للحصول على الانتقالات في الإحداثيات الطبيعية . عندها يمكن استخدام علاقات نظرية المرونة في الإحداثيات الطبيعية لحساب بقية المجاهيل الحركيـة والستاتيكية و تحول بدورها وفق علاقات التحويل الخاصة بها ثانية إلى جملة المحـــاور الإحداثيـة الديكارتية . قد يبدو مثل هذا الطريق شاق طويل للمبتدئ و لا تتضح فائدته من تطبيقـــه علـــى عناصر هندسية بأشكال منتظمة، و تتضح هذه الفائدة أكثر بعد التعرض لعناصر منتهية بطبولوجية معقدة كالعناصر شبة المنحرفة و عناصر منتهية بأطراف منحنيـــة . عندهـــا ســيبدو اســتخدام الإحداثيات الديكارتية شاقاً ومعقداً إن لم يكن مستحيلاً .وفيما يلي ستعطى نتـــائج الاختبـــار العددي لحالة بلاطة مربعة مستندة استناداً بسيطاً من جميع أطرافها و محملة بحمولة موزعة بانتظـام على كامل مساحتها و تملك الخواص الهندسية الواردة في الشكل 6-20 . و قد اختـــيرت هـــذه

البلاطة لأنها تملك حلاً تحليلياً دقيقاً ممثل إلى جانب حلول تقريبية بعناصر منتهية معروفة في المصادر العلمية في الأشكال من 6-21 إلى 6-26 وهذه العناصر المنتهية المساقة للمقارنة العددية هي العنصر الشهير بـ DKT و عنصر أخر شهير بـ ACM . أما نتائج العنصر المقترح في الفقرة 6-6 فقد أدرجت تحت اسم العنصر DE و يبين الشكل 6-21 قيم الطاقة الكامنة لكامل البلاطة بدلالة الشبكة المقسمة لها إلى عناصر منتهية. وقد أنشئ الخط البياني لقيم الطاقة الكامنة من أجل شبكات من العناصر المنتهية قوامها 2*2 عنصراً و حتى 16*16 عنصراً.و هذه الشبكات مستخدمة أيضاً لتمثيل القيم الأخرى من انتقالات و عزوم انعطاف و قوى قاصة ممثلة في الأشكال 6-22 حتى 6-26 يلاحظ أن العنصر (DE) يمثل تحسيناً نوعياً للطاقة الكامنة و قيم التأثير الأخرى كما أن تقارب حله إلى الحل الدقيق أسرع بكثير من الحلول التقريبية الأخرى . و بالتالي فحساسيته بالنسبة إلى التقسيم الشبكي قليلة و يمكن الحصول به على نتائج مقبولة هندسياً دون الحاجة إلى تقسيم المنشأ تقسيماً شبكياً دقيقاً .

x^1



$E = 1.82 * 10^7 \, kN/m^2$

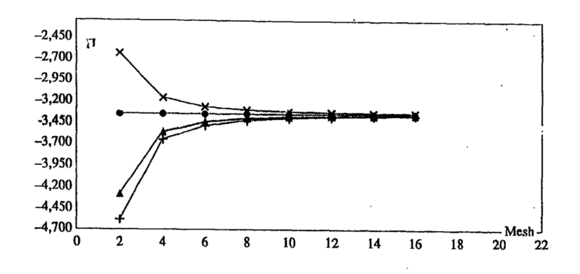
$t = 0.1m$

$\nu = 0.3$

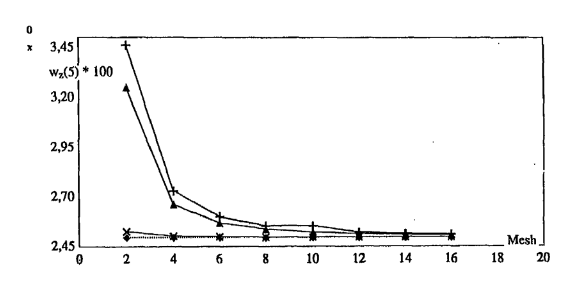
$\bar{p}^{x^3} = 40.kN/m^2$

x^2

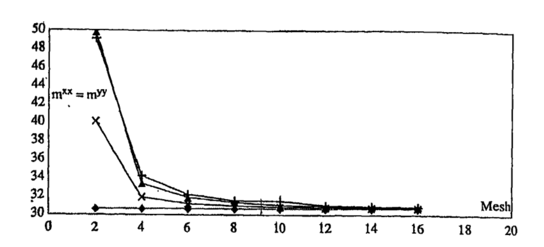
شكل 6-20: بلاطة مستندة استناداً بسيطاً من جميع أطرافها ومحملة بحمولة موزعة بانتظام الخواص الهندسية.



شكل 6–21: الطاقة الكامنة

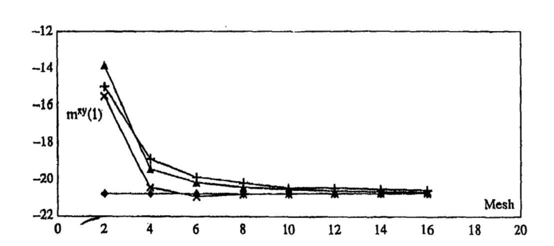


شكل 6–22: انتقالات نقطة منتصف البلاطة (5) $u^0_{x_3}$

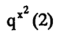


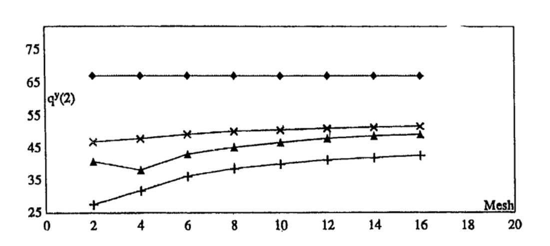
شكل 6-23 : عزوم الانعطاف $m^{x^1x^1}(5) = m^{x^2x^2}(5)$

$m^{x^1x^2} = m^{x^2x^1}$



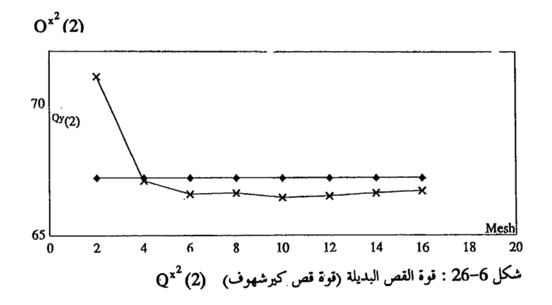
شكل 6-24 : عزم الفتل : $m^{x^1x^2} = m^{x^2x^1}$





شكل 6-25 : القوة القاصة $q^{x^2}(2)$

$Q^{x^2}(2)$



شكل 6-26 : قوة القص البديلة (قوة قص كيرشهوف) $Q^{x^2}(2)$

6-7: المصادر العلمية:

1. Schultz - Piszachich ,W.
Tensoralgebra und - analysis ,Aus der Serie Mathematik fuer Ingenieure Naturwissenshaftler Oekonomen Landwrite (Hrsgb.O.Beyer; H. Erfurth ; O .Greuel ;H.Kander ; K.Mateuffel ; G. Zeidler) Bd.11, BSB .B.G Teubner verlagsgesellschaft , Leipzig 1988

2. Weaver ,w.;Johnston , P.R.
Structural dynamics by finite elements
Prentice-Hall , Englewood cliffs , New Jersey ,1987

3. Abo Diab,S.
Entwicklung und einsatz gemischt -hybrider finiter Elemente Fuer Aufgaben der linearen Kinetik von Faltwerken - Ein Beitrag zu FALT-FEM,.Technische Universitaet Dresden ,diss 1989.

4. Girkmann,K.
Flaechentragwerke
Springer- Verlag , 1983

5. Oden ,J.T.;Kikuchi,N.
Finite element method for constrained problems in Elasticity
Int.J.Num.Meth.Eng.,V ol.18,P.701-725,1982.

6. Batoz, J.L.;Ben Tahhar,M.
Evalution of a new quadrilateral thin plate bending element ,
Int.J.Num.Meth.Eng,Vol.18,P.1655-77,1982.

7. Brebbia , C.A.
Finite -Element-Systeme-A Handbook
Springer-Verlag, 1985

8. Oden , J.T. ;Reddy ,J.N.

Variational Methods in Theoretical Mechanics
Springer-Verlag , 1976.

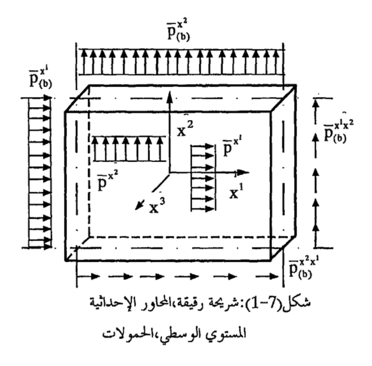
9. Timoshenko , S.T. ;Goodier , J.N.
Theory of elasticity , Third Eddition ,MCGraw-Hill Book Company.
1970

10.Meiszner,U.
Finite - Element - Analysis
Springer - Verlag , Berlin 1974

11.Gallagher,R.H.
Finite - Element - Analysis
Springer-Verlag,Berlin 1974

12.Clough,R.W;Penzien,J.
Dynamics of Structures
MCGrow-Hill Book Company , New York ,1975.

7-الشرائح الرقيقة:



شكل(7-1): شريحة رقيقة، المحاور الإحداثية
المستوي الوسطي، الحمولات

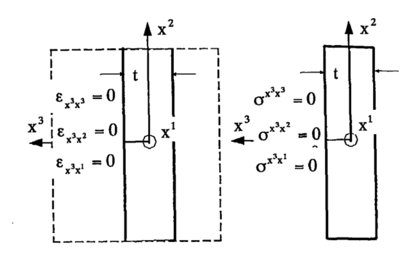
في هذا الفصل سوف تدرس الخطوط الأساسية لنظرية الشرائح الرقيقة بتفصيل مسهب إذ تدرس في البدء الخطوط الأساسية لمعادلات نظرية المرونة لحالتي عمل الشرائح كحالة إجهادات مستوية وكحالة تشوهات مستوية وسوف تدرس هاتان الحالتان بصيغة موحّدة ويشار إلى نقاط الاختلاف عند ورودها. بالإضافة إلى ذلك سوف يعرض عدد من العناصر المنتهية المطورة لحل مسائل الشرائح الرقيقة وسيتم حل عدد ليس بالقليل من الأمثلة الحسابية لمختلف المشاكل الإنشائية كتعرض الشرائح للحمولات الخارجية والفروقات الحرارية وهبوط المساند.

تعرف الشرائح بأنها منشآت مستوية ينحصر حجمها بين مستويين متوازيين البعد بينهما يمثل سماكة الشريحة وهو أصغر بكثير من البعدين الآخرين، وتتعرض الشرائح فقط لحمولات واقعة في مستويها ويفترض أن يبقى المستوي الوسطي للشريحة مستويا بعد تعرضها للمؤثرات الخارجية. ويمثل الشكل (7-1) شريحة مستوية معرضة لتأثير الأحمال الخارجية، وقد نسبت هذه الشريحة إلى جملة محاور إحداثية وحدد المستوي x^1x^2 كمستوي وسطي للشريحة . يفترض عادة

أن الحمولات الخارجية مطبقة في المستوي الوسطي للشريحة. وعلى هذا الأساس وضعت فرضيات تسهيلية لدراسة الشرائح بشكل مبسط واشتقت على أساس هذه الفرضيات معـــادلات نظريـــة المرونة.وسوف تستعرض في البدء حالات عمل الشرائح المفترضة قبل البدء باستعراض معـــادلات نظرية المرونة للشرائح الرقيقة.

يصنف عمل الشرائح وفق طبيعة الإجهادات أو التشوهات المفترض حصولها في الوســـط الممثـــل للشريحة وتنضوي طبيعة عمل الشرائح تحت حالتين أساسيتين،أولهما تسمى حالـــة الإجـــهادات المستوية وتسمى الثانية حالة التشوهات المستوية.

في حالة الإجهادات المستوية يفترض بأن السطوح المحددة للشريحة والموازية للمســـتوي الوســـطي للشريحة x^1x^2 أي السطحين $x^3 = \pm\frac{t}{2}$ خالية من الإجهادات شكل (7-2-آ) وعليه تكـــون إجهادات هذه السطوح وهي $\sigma^{x^3x^3}, \sigma^{x^3x^2}, \sigma^{x^3x^1}$ معدومة.



a) حالة الإجهادات المستوية b) حالة التشوهات المستوية

شكل 7-2: حالات عمل الشرائح

كما يفترض أن الإجهادات المتبقية وهي $\sigma^{x^1x^1}, \sigma^{x^2x^1}, \sigma^{x^1x^2}, \sigma^{x^2x^2}$ لا تتغير باتجاه x^3 وبالتـــالي تكون هذه الإجهادات تابعة فقط للإحداثيات المستقلة x^1, x^2 أي أن :

$$\sigma^{x^1x^1} = \sigma^{x^1x^1}(x,^1 x^2)$$
$$\sigma^{x^2x^1} = \sigma^{x^2x^1}(x^1, x^2)$$
$$\sigma^{x^1x^2} = \sigma^{x^1x^2}(x^1, x^2) \qquad \sigma^{ij} = \sigma^{ij}(x^1, x^2) \qquad (7\text{-}1)$$
$$\sigma^{x^2x^2} = \sigma^{x^2x^2}(x^1, x^2)$$

و العلاقات (7-1) تمثل المجاهيل الستاتيكية لحالة الإجهادات المستوية.

إذا ما اعتبرت الحالة الإجهادية السائدة هذه كحالة أساسية أو كنقطة انطلاق تكون حالة التشوهات السائدة والمنبثقة عن علاقات التشوهات- الإجهادات (العلاقات32 - 2) ممثلة بالمعادلات التالية:

$$\varepsilon_{x^1x^1} = \frac{1}{E}(\sigma^{x^1x^1} - \nu\sigma^{x^2x^2})$$
$$\varepsilon_{x^2x^1} = \frac{1+\nu}{E}\sigma^{x^2x^1}$$
$$\varepsilon_{x^1x^2} = \frac{1+\nu}{E}\sigma^{x^1x^2}$$
$$\varepsilon_{x^2x^2} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma^{x^1x^1} + \sigma^{x^2x^2}) \qquad (7\text{-}2)$$
$$\varepsilon_{x^3x^3} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma^{x^1x^1} - \nu\sigma^{x^2x^2})$$

بناء على هذه العلاقات يكون جزء موترة التشوهات:

$$\varepsilon_{x^1x^1} = \varepsilon_{x^1x^1}(x^1, x^2)$$
$$\varepsilon_{x^2x^1} = \varepsilon_{x^2x^1}(x^1, x^2)$$
$$\varepsilon_{x^1x^2} = \varepsilon_{x^1x^2}(x^1, x^2) \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x^1, x^2) \qquad (7\text{-}3)$$
$$\varepsilon_{x^2x^2} = \varepsilon_{x^2x^2}(x^1, x^2)$$

متعلقا فقط بالإحداثيات المستقلة x^1, x^2 .كما أن التشوه :

$$\varepsilon_{x^3x^3} = \varepsilon_{x^3x^3}(x^1, x^2) \qquad (7\text{-}4)$$

متعلق فقط بنفس الإحداثيات المستقلة مما يعني أن التشوهات أيضا ثابتة على سماكة الشريحة .وهذا يؤدي بدوره إلى تناقض هذه النتيجة مع المعطيات الأساسية المفترضة في العلاقـــات (1-7) إذ أن حالة هذه الإجهادات المفترضة غير متوافقة مع حالة التشوهات الناتجة.ويتجلى هـــــذا التنـــاقض واضحا في علاقات التوافق ،فحالة التشوهات الناتجة تؤدي إلى استحالة تحقيق المعادلات الثانيـــــة والثالثة والأخيرة من علاقات التوافق(38-2).وذلك لأن المشتقات :

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{x^3x^3,x^1x^1} \neq 0 \\ &\varepsilon_{x^3x^3,x^2x^2} \neq 0 \\ &\varepsilon_{x^3x^3,x^1x^2} \neq 0 \end{aligned} \qquad (7.5)$$

غير مساوية للصفر،بينما تكون مشتقات توابع التشوهات جميعها بالنســـبة للاحداثـــي المســـتقل x^3 معدومة.وبالتالي فالحلول الناتجة عن فرضيات عمل الشرائح وفق الحالة الإجهادية المســـتوية ما هي إلا حلول تقريبية.جدير بالذكر هنا أن لحساب المجاهيل الستاتيكية والكينماتيكية : $\sigma^{x^1x^1}, \sigma^{x^1x^2}, \sigma^{x^2x^2}, \varepsilon_{x^1x^1}, \varepsilon_{x^1x^2}, \varepsilon_{x^2x^2}, \varepsilon_{x^3x^3}$ لدينا فقط معادلتي توازن وهي معادلـــة إسقاط في اتجاه كل من المحاور الإحداثية x^1, x^2 وأربع معادلات ممثلة بعلاقـــات التشـــوهات الانتقالات (2-7) (مع اعتبار التناظر $\sigma^{x^1x^2} = \sigma^{x^2x^1}$: $\varepsilon_{x^1x^2} = \varepsilon_{x^2x^1}$).والمسألة غير مقـــررة ستاتيكيا ويستعان بالمعادلة الأولى من علاقات التوافق(38-2) لحســـاب المجـــاهيل الســـتاتيكية والكينماتيكية،وحالة الإجهادات المستوية حالة شائعة بالنسبة للشرائح المحدودة السماكة والمعرضـة لقوى في مستويها.

تصادف حالة التشوهات المستوية في الشرائح الممتدة إلى مالا نهاية شكل(7-2-ب) فعند اقتطـاع شريحة بعرض t من وسط الشريحة بقصد دراسته يمكن الاعتبار بأن التشـــوه في اتجـــاه الامتـــداد اللانهائي للشريحة معرقل.وعليه تعتبر التشوهات $\varepsilon_{x^3x^3}, \varepsilon_{x^3x^2}, \varepsilon_{x^3x^1}$ معدومـــة والتشـــوهات الأخرى:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x^1x^1} &= \varepsilon_{x^1x^1}(x^1, x^2) \\ \varepsilon_{x^2x^1} &= \varepsilon_{x^2x^1}(x^1, x^2) \\ \varepsilon_{x^1x^2} &= \varepsilon_{x^1x^2}(x^1, x^2) \\ \varepsilon_{x^2x^2} &= \varepsilon_{x^2x^2}(x^1, x^2) \end{aligned} \quad , \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x^1, x^2) \qquad (7\text{-}6)$$

مستوية وغير متعلقة بالإحداثي المستقل x^3. في حال اعتبار حالة التشوهات هذه كحالة أساسية وتنبثق عنها الحالة الإجهادية. عندها تعتبر العلاقات التالية:

$$\begin{aligned}
\sigma^{x^1x^1} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{x^1x^1} + \nu\varepsilon_{x^2x^2}] \\
\sigma^{x^2x^1} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{x^2x^1} \\
\sigma^{x^1x^2} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{x^1x^2} \\
\sigma^{x^2x^2} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu\varepsilon_{x^1x^1} + (1-\nu)\varepsilon_{x^2x^2}] \\
\sigma^{x^3x^3} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu\cdot\varepsilon_{x^1x^1} + \vartheta\varepsilon_{x^2x^2}]
\end{aligned} \tag{7.7}$$

عن علاقات الإجهادات –التشوهات.

وباعتبار أن التشوهات متعلقة فقط بالإحداثيات المستقلة (x^1, x^2) يكون أيضا جزء موترة الإجهادات:

$$\begin{aligned}
\sigma^{x^1x^1} &= \sigma^{x^1x^1}(x^1, x^2) \\
\sigma^{x^2x^1} &= \sigma^{x^2x^1}(x^1, x^2) \\
\sigma^{x^1x^2} &= \sigma^{x^1x^2}(x^1, x^2) \\
\sigma^{x^2x^2} &= \sigma^{x^2x^2}(x^1, x^2)
\end{aligned} \quad ;\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(x^1, x^2) \tag{7-8}$$

ثابتا على سماكة الشريحة المعتبرة t وغير متعلق بالإحداثي المستقل x^3 كما يكون الإجهاد :

$$\sigma^{x^3x^3} = \sigma^{x^3x^3}(x^1, x^2) \tag{7-9}$$

ثابتاً أيضاً وغير متعلق بالإحداثي المستقل x^3. خلافاً لحالة الإجهادات المستوية تمثل الحلول الناتجة عن فرضيات عمل الشرائح وفق حالة التشوهات المستوية حلاً دقيقاً لنظرية المرونة. إذ أن كل معادلات التوافق (2-38) باستثناء الأولى محققة بافتراض حالة التشوهات المستوية،ويتم تحقيق المعادلة الأولى أثناء صياغة المعادلة التفاضلية لحالة التشوهات المستوية.

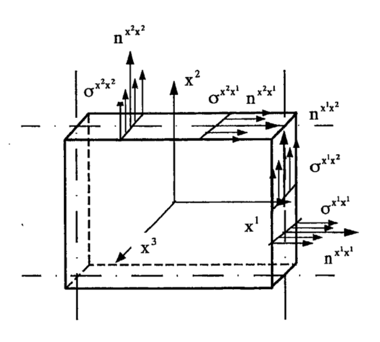
في هذا الفصل لن تتم دراسة كل حالة من حالات عمل الشرائح على حدى.إنما سيتم إعطاء صياغة مناسبة للمعادلات الأساسية لنظرية الشرائح ترتبط فيها المجاهيل الستاتيكية والكينماتيكية مع بعضها البعض بشكل مناسب.وسيتم التنويه عن الاختلافات بين حالة الإجهادات المستوية وحالة التشوهات المستوية أثناء وجودها في سياق الاشتقاقات المعطاة.

7-1-معادلات نظرية المرونة في الإحداثيات الديكارتية:

7-1-1-مجاهيل نظرية المرونة:

نستنتج مما سبق أن انتقالات نقاط الشريحة جميعها تتعين بتعيين انتقالات المستوي الوسطي للشريحة. وباعتبار أن الانتقالات تتم في نفس المستوي الوسطي للشريحة فتعيين انتقالات المستوي الوسطي يتم بتعيين الانتقالين u_{x^1}, u_{x^2} لكل نقطة من نقاط هذا المستوي.وسوف يستغنى هنا عن تمييز انتقالات المستوي الوسطي بالشكل $u^\circ{}_{x^1}, u^\circ{}_{x^2}$ وذلك لتطابق $u^\circ{}_{x^1}$ مع u_{x^1} و $u^\circ{}_{x^2}$ مع u_{x^2} . بالإضافة إلى الانتقالين u_{x^1}, u_{x^2} سوف نعتبر موتّرة التشوهات المختصرة (7-3) أو (7-6) ممثلة للمجاهيل الكينماتيكية المستقلة التي يجب تعيينها.وتعتبر موتّرة الإجهادات المختصرة (7-1)أو(7-8) ممثلة للمجاهيل الستاتيكية المستقلة المأخوذة بعين الاعتبار.نحصل على قوى المقطع بمكاملة الإجهادات على سطوح المقاطع وباعتبار التوزع المنتظم للإجهادات أو التشوهات على سطوح المقاطع نحصل على قوى المقطع التالية لواحدة الطول من الشريحة:

$$
\begin{aligned}
n^{x^1x^1} &= \int_A \sigma^{x^1x^1} \cdot dA = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma^{x^1x^1} \cdot 1 \cdot dx^3 = \sigma^{x^1x^1} \cdot t \\
n^{x^2x^1} &= \int_A \sigma^{x^2x^1} \cdot dA = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma^{x^2x^1} \cdot 1 \cdot dx^3 = \sigma^{x^2x^1} \cdot t \\
n^{x^1x^2} &= \int_A \sigma^{x^1x^2} \cdot dA = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma^{x^1x^2} \cdot 1 \cdot dx^3 = \sigma^{x^1x^2} \cdot t \\
n^{x^2x^2} &= \int_A \sigma^{x^2x^2} \cdot dA = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma^{x^2x^2} \cdot 1 \cdot dx^3 = \sigma^{x^2x^2} \cdot t
\end{aligned}
\qquad (7-10)
$$



شكل(7-3) قوى المقطع للشريحة

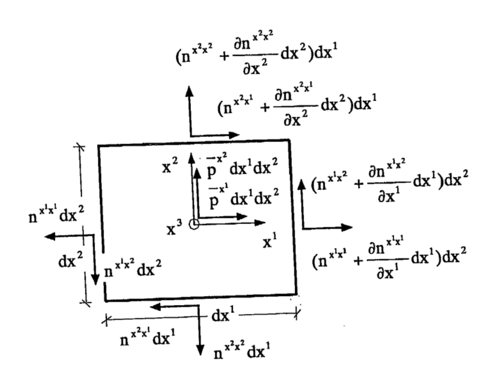
وقوى المقطع هذه بالإضافة إلى الإجهادات ممثلة على الشـــكل (7-3). ويعـــبر عـــن (7-10) باستخدام كتابة القرائن بالشكل :

$$n^{ij} = t.\sigma^{ij} \qquad (7\text{-}11)$$

7-1-2-معادلات نظرية المرونة:

7-1-2-1-معادلات التوازن:

بعد اقتطاع عنصر تفاضلي dx^1dx^2 من شريحة مستوية وتمثيل قوى المقطع على الضفة الســـالبة للمقطع وتغيرات قوى المقطع المكافئة للحدود الأولى الخطية من منشور قوى المقطع وفق سلســـلة تايلور على الضفة الموجبة للمقطع وكتابة معادلات التوازن،وهي معادلة إسقاط في اتجاه المحور x^1 ومعادلة إسقاط في اتجاه المحور x^2 ومعادلة عزوم حول المحور x^3 نحصل على النتيجة التالية:



شكل(7-4)عنصر تفاضلي مقتطع من شريحة ،المحاور الإحداثية،قوى المقطع،الحمولات.

$$\begin{aligned} &n^{x^1x^1}{}_{,x^1}+n^{x^2x^1}{}_{,x^2}+\bar{p}^{x^1}=0\\ &n^{x^1x^2}{}_{,x^1}+n^{x^2x^2}{}_{,x^2}+\bar{p}^{x^2}=0 \qquad (7\text{-}12)\\ &n^{x^1x^2}=n^{x^2x^1}\end{aligned}$$

ويعبر عن المعادلات السابقة بكتابة القرائن بالشكل :

$$\begin{aligned} &n^{ij}{}_{,j}+\bar{p}^{i}=0 \qquad (7.13)\\ &n^{ij}=n^{ji}\end{aligned}$$

يتضح من معادلات التوازن السابقة أن انتقال القوى في المنشآت المستوية لا يتم فقط مع اتجاه تطبيق الحمولة وانما يتعلق بتغير قوى القص في الاتجاه العمودي على اتجاه تطبيق الحمولة.

7-1-2-2-علاقات التشوهات-الانتقالات:

تعبر العلاقات التالية:

$$\varepsilon_{x^1x^1} = \frac{\partial u_{x^1}}{\partial x^1}$$

$$\varepsilon_{x^2x^1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{x^2}}{\partial x^1} + \frac{\partial u_{x^1}}{\partial x^2}\right)$$

$$\varepsilon_{x^1x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{x^1}}{\partial x^2} + \frac{\partial u_{x^2}}{\partial x^1}\right) \quad ; \; \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (7\text{-}14)$$

$$\varepsilon_{x^2x^2} = \frac{\partial u_{x^2}}{\partial x^2}$$

عن علاقات التشوهات الانتقالية لحالة الشريحة الرقيقة.

7-1-2-3-قانون السلوك:

يمثل قانون السلوك لحالة الشريحة بالمعادلات التالية:

$$\sigma^{x^1x^1} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{x^1x^1} + \nu\varepsilon_{x^2x^2} + \nu\varepsilon_{x^3x^3}]$$

$$\sigma^{x^2x^2} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu\varepsilon_{x^1x^1} + (1-\nu)\varepsilon_{x^2x^2} + \nu\varepsilon_{x^3x^3}]$$

$$\sigma^{x^3x^3} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu\varepsilon_{x^1x^1} + \nu\varepsilon_{x^2x^2} + (1-\nu)\varepsilon_{x^3x^3}] \qquad (7\text{-}15)$$

$$\sigma^{x^1x^2} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{x^1x^2}$$

$$\sigma^{x^1x^2} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{x^2x^1}$$

وهذه المعادلات مشتقة من قانون هوك للحالة الفراغية (2-31)بعد اعتبار الحالة الخاصة لعمل الشريحة.فهي إما وفق حالة الإجهادات المستوية والتي يكون فيها ($\sigma^{x^3x^1} = \sigma^{x^1x^3} = \sigma^{x^3x^2} = \sigma^{x^2x^2} = 0$) و إما وفق حالة التشوهات المستوية ويكون فيها ($\varepsilon_{x^3x^1} = \varepsilon_{x^1x^3} = \varepsilon_{x^3x^2} = \varepsilon_{x^2x^3} = 0$) .

لحالة التشوهات المستوية تتبسط العلاقات(15-7) لتصبح مطابقة للعلاقات(7-7) وذلك باعتبـار أن $\varepsilon_{x^3x^3} = 0$. ولحالة الإجهادات المستوية يفترض أن يكون $\sigma^{x^3x^3} = 0$ وهذا يعني أن المعادلة الثالثة من العلاقات (15-7) يجب أن تكون مكافئة للصفر وهذا يقضي إلى المساواة التالية:

$$\varepsilon_{x^3x^3} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{x^1x^1} + \varepsilon_{x^2x^2}) \qquad (7\text{-}16)$$

وبتعويض هذه القيمة في المعادلتين الأولى والثانية من العلاقات (15-7) نحصل على:

$$\begin{aligned} \sigma^{x^1x^1} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{x^1x^1} + \nu\varepsilon_{x^2x^2}) \\ \sigma^{x^2x^2} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{x^1x^1} + \varepsilon_{x^2x^2}) \end{aligned} \qquad (7\text{-}17)$$

وللحالتين أي حالة الإجهادات المستوية وحالة التشوهات المستوية يمكن كتابة قـــانون الســـلوك بالشكل المعهود:

$$\sigma^{ij} = c^{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (7\text{-}18)$$

وهو تفصيليا بالشكل:

$$\begin{bmatrix} \sigma^{x^1x^1} \\ \sigma^{x^2x^1} \\ \sigma^{x^1x^2} \\ \sigma^{x^2x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{x^1x^1x^1x^1} & c^{x^1x^1x^2x^1} & c^{x^1x^1x^1x^2} & c^{x^1x^1x^2x^2} \\ c^{x^2x^1x^1x^1} & c^{x^2x^1x^2x^1} & c^{x^2x^1x^1x^2} & c^{x^2x^1x^2x^2} \\ c^{x^1x^2x^1x^1} & c^{x^1x^2x^2x^1} & c^{x^1x^2x^1x^2} & c^{x^1x^2x^2x^2} \\ c^{x^2x^2x^1x^1} & c^{x^2x^2x^2x^1} & c^{x^2x^2x^1x^2} & c^{x^2x^2x^2x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x^1x^1} \\ \varepsilon_{x^2x^1} \\ \varepsilon_{x^1x^2} \\ \varepsilon_{x^2x^2} \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}19)$$

والنشر يتم باعتبار أن القرينة i تتحول بأسرع من j والقرينة l تتحول بأسرع من k . وتم تحويـــل المصفوفة الرباعية C^{ijkl} إلى مصفوفة ثنائية كما و أن القرينتين ij قد جمعتـــا في قرينـــة واحـــدة وكذلك القرينتين kl .وعلى القارئ نشر العلاقة (18-7) بالمبادئ المعروفة لديه ومقارنة المنشـــور الناتج مع ذلك المعطى في العلاقة(19-7).ولكلا حالتي الإجهادات المستوية والتشوهات المستوية يكون:

$$c^{x^1x^1x^2x^1} = c^{x^1x^1x^1x^2} = c^{x^2x^1x^1x^1} = c^{x^2x^1x^2x^2} = c^{x^1x^2x^1x^1} = c^{x^1x^2x^2x^2} = c^{x^2x^2x^2x^1} = c^{x^2x^2x^2x^2} = 0 \qquad (7\text{-}20)$$

وهنا تتميز حالة الإجهادات المستوية عن حالة التشوهات المستوية. فلحالة الإجهادات المســـــتوية يكون:

$$c^{x^1x^1x^1x^1} = c^{x^2x^2x^2x^2} = c$$
$$c^{x^1x^1x^2x^2} = c^{x^2x^2x^1x^1} = \nu \cdot c$$
$$c^{x^1x^2x^1x^2} = c^{x^2x^1x^2x^1} = c^{x^1x^2x^2x^1} = c^{x^2x^1x^1x^2} = \frac{1}{2}(1-\nu)\cdot c \qquad (7\text{-}21)$$
$$c = \frac{E}{1-\nu^2}$$

مع العلاقة الإضافية:

$$\varepsilon_{x^3x^3} = -\frac{\nu}{E}(\sigma^{x^1x^1} + \sigma^{x^2x^2}) \qquad (7\text{-}22)$$

ولحالة التشوهات المستوية يكون :

$$c^{x^1x^1x^1x^1} = c^{x^2x^2x^2x^2} = c$$
$$c^{x^1x^1x^2x^2} = c^{x^2x^2x^1x^1} = \nu \cdot c \qquad (7\text{-}23)$$
$$c^{x^1x^2x^1x^2} = c^{x^2x^1x^2x^1} = c^{x^1x^2x^2x^1} = c^{x^2x^1x^1x^2} = \frac{1}{2}(1-\nu)\cdot c$$
$$c = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

مع العلاقة الإضافية :

$$\sigma^{x^3x^3} = \nu \cdot (\sigma^{x^1x^1} + \sigma^{x^2x^2}) \qquad (7\text{-}24)$$

والعلاقة السابقة يمكن استنتاجها مباشرة من مقارنة المعادلتين الأولى والرابعة من العلاقات (7–7) مع المعادلة الخامسة من العلاقات نفسها.

7–1–2–4–علاقات قوى المقطع–الانتقالات:

بتعويض قانون السلوك (18–7)في العلاقة(11–7)نحصل على علاقات تربط بين قـوى المقطـع والتشوهات:

$$n^{ij} = t \cdot c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \qquad (7\text{-}25)$$

وبتبديل علاقة التشوهات -الانتقالات (7-14)في العلاقة السابقة نحصل على علاقة قوى المقطع-الانتقالات :

$$n^{ij} = \frac{1}{2} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot (u_{k,l} + u_{l,k}) \qquad (7\text{-}26)$$

7-1-3-المعادلة التفاضلية:

يتم الحصول على المعادلة التفاضلية للانتقالات بتعويض علاقات قوى المقطع-الانتقالات (7-26) في معادلات التوازن(7-13):

$$[\frac{1}{2} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot (u_{k,l} + u_{l,k})]_{,j} + \overline{p}^{i} = 0 \qquad (7\text{-}27)$$

في حالة ثبات المعاملات c^{ijkl} يمكن إخراجها خارج قوس التفاضل ونحصل بالنتيجة التالية علـــى المعادلتين التفاضليتين التاليتين للانتقالات :

$$t \cdot c^{x^1x^1x^1x^1} \cdot u_{x^1,x^1x^1} + t \cdot c^{x^2x^1x^1x^2} \cdot u_{x^1,x^2x^2} + t \cdot (c^{x^1x^1x^2x^2} + c^{x^2x^1x^2x^1}) \cdot u_{x^2,x^2x^1} + \overline{p}^{x^1} = 0$$

$$t \cdot c^{x^2x^2x^2x^2} \cdot u_{x^2,x^2x^2} + t \cdot c^{x^1x^2x^2x^1} \cdot u_{x^2,x^1x^1} + t \cdot (c^{x^2x^2x^1x^1} + c^{x^1x^2x^1x^2}) \cdot u_{x^1,x^1x^2} + \overline{p}^{x^2} = 0$$

(7-28)

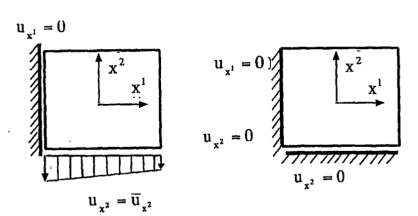
تعتمد الطريقة الكلاسيكية على إيجاد الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية السابقة.

تحتوي مثل هذه الحلول على ثوابت المعادلة التفاضلية والتي يتم تحديدها لكل مسألة على حـــدى من الشروط الطرفية.

7-1-4-الشروط الطرفية:

7-1-4-1-الشروط الطرفية الهندسية:

تصاغ الشروط الطرفية الهندسية لتعبر رياضيا عن شروط استناد الشريحة



شكل(7–5):شروط طرفية هندسية

والشكل(7-5)يبين بعض الأمثلة على صياغة مثل هذه الشروط،والتعبير الرياضي كما نعلم هو:

$$u_{x^1} = \bar{u}_{x^1}$$

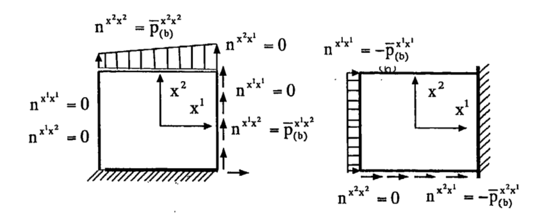
$$\text{on} \quad s_u \qquad (7.29)$$

$$u_{x^2} = \bar{u}_{x^2}$$

حيث $\bar{u}_{x^1}, \bar{u}_{x^2}$ قيم للانتقالات معلومة على الأطـــراف والـــتي تكـــون فيـــها الانتقـــالات معلومة (S_u). ويمكن أن تمثل $\bar{u}_{x^2}, \bar{u}_{x^1}$ توابع ثابتة بقيم معلومـــة مســـبقاً علـــى الأطـــراف المذكورة.

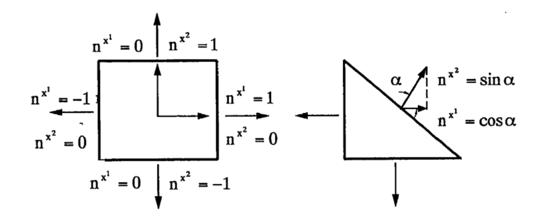
7–1–4–2–الشروط الطرفية الميكانيكية:

من خلال الشروط الطرفية الميكانيكية تعرف الإجهادات على الأطراف s_σ، بحيث تتساوى توابع الإجهادات الداخلية مع توابع الإجهادات الناشئة عن القوى الخارجية المعلومة المطبقة على تلـــك الأطراف.



شكل(7–6):شروط طرفية ميكانيكية.

ولاختلاف إشارة العلاقات الطرفية لتساوي القوى الداخلية مع القوى الخارجيـــة كمـا يبـين الشكل(7–6) يعرف شعاع الناظم الموجب بأنه شعاع الناظم الخارج من الطرف (شـــكل7–7) عندها تصاغ الشروط الطرفية الميكانيكية بالشكل:



شكل(7–7):مركبات شعاع الناظم الموجب.

$$n^{x^2x^1} \cdot n_{x^1} = \overline{p}^{x^1}{}_{(b)}$$
$$n^{x^2x^2} \cdot n_{x^2} = \overline{p}^{x^1}{}_{(b)}$$
$$n^{x^1x^2} \cdot n_{x^1} = \overline{p}^{x^1x^2}{}_{(b)} \qquad (7\text{-}30)$$
$$n^{x^2x^1} \cdot n_{x^2} = \overline{p}^{x^2x^1}{}_{(b)}$$

من الصعوبة بمكان إيجاد الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية للانتقالات والتي تحقق الشـــــروط الطرفية المذكورة لذلك يلجأ عادة إلى إدخال ما يسمى بتوابع الإجهادات(توابع AIRY).وتختــار توابع الإجهادات هذه بحيث تحقق نفس الشروط التي تتطلبها المعادلات التفاضلي الآنفة الذكر.

7–1–5–توابع الإجهادات (توابعAIRY):

يجب أن تحقق توابع الإجهادات المدخلة شروط التوازن على عنصر تفاضلي. بافتراض أن تـــابع الإجهادات هذا،الذي يحقق شروط التوازن تابع من الشكل $F(x^1, x^2)$ ؛ فمعـــادلات التوازن(7–12) تقتضي في حالة عدم وجود حمولات موزعة أن يكون:

$$n^{x^1x^1} = e^{x^1x^2} e^{x^1x^2} f_{,x^2x^2}$$
$$n^{x^2x^2} = e^{x^2x^1} e^{x^2x^1} f_{,x^1x^1}$$
$$n^{x^1x^2} = e^{x^1x^2} e^{x^2x^1} f_{,x^2x^1} \qquad (7\text{-}31)$$
$$n^{x^2x^1} = e^{x^2x^1} e^{x^1x^2} f_{,x^1x^2}$$
$$e^{x^1x^2} = 1; e^{x^2x^1} = -1; \overline{p}^{x^1} = 0; \overline{p}^{x^2} = 0$$

ويمكن تحقيق معادلات التوازن أيضا في الحالة التي تكون فيها الحمولات $\overline{p}^{x^2}, \overline{p}^{x^1}$ ثابتة وموزعـة بانتظام على مساحة الشريحة. في هذه الحالة تبقى المعادلتان الأولى والثانية من العلاقـــــات (31–7)دون تغيير أما المعادلتان الثالثة والرابعة فتصبحان:

$$n^{x^1x^2} = e^{x^1x^2} e^{x^2x^1} (f_{,x^2x^1} + x^2 \overline{p}^{x^1} + x^1 \overline{p}^{x^2})$$
$$n^{x^2x^1} = e^{x^2x^1} e^{x^1x^2} (f_{,x^1x2} + x^2 \overline{p}^{x^1} + x^1 \overline{p}^{x^2}) \quad (7\text{-}32)$$

وبعد اختيار تابع الإجهادات $F(x^1, x^2)$ محقق لشروط التوازن يفترض به الآن أن يحق علاقات التشوهات-الانتقـــالات (7-14)وقـــانون الســـلوك(7-19) أو علاقـــات قـــوى المقطـــع-التشوهات(7-25) بالإضافة إلى تحقيق للشروط الطرفية الهندسية والميكانيكية. ولكي يحصل مـــا سبق ذكره يجب إدخال المعادلات السابقة في اشتقاق المعادلة التفاضلية. ولهذا الغرض تجرى بعـض التعديلات في كتابة هذه المعادلات. من علاقات التشوهات-الانتقالات نحصل بالتفاضل المباشـــر على علاقة التوافق التالية:

$$e^{x^1x^2} e^{x^1x^2} \varepsilon_{x^1x^1,x^2x^2} + e^{x^2x^1} e^{x^2x^1} \varepsilon_{x^2x^2,x^1x^1} + e^{x^1x^2} e^{x^1x^2} \varepsilon_{x^1x^2,x^2x^1} + e^{x^2x^1} e^{x^1x^2} \varepsilon_{x^2x^1,x^1x^2} = 0 \quad (7\text{-}33)$$

وهذه العلاقة مطابقة لمعادلة التوافق الأولى من العلاقات(2-38).والـــتي ســـبق ذكرهـــا بأنهـــا ستستخدم لحساب المجاهيل الستاتيكية والكينماتيكية.

يتم الآن كتابة قانون السلوك بدلالة التشوهات بإيجاد مقلوب العلاقة (7-18)فنحصل على:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma^{kl} \quad (7\text{-}34)$$

وهي تفصيلياً:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x^1x^1} \\ \varepsilon_{x^2x^1} \\ \varepsilon_{x^1x^2} \\ \varepsilon_{x^2x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x^1x^1x^1x^1} & s_{x^1x^1x^2x^1} & s_{x^1x^1x^1x^2} & s_{x^1x^1x^2x^2} \\ s_{x^2x^1x^1x^1} & s_{x^2x^1x^2x^1} & s_{x^2x^1x^1x^2} & s_{x^2x^1x^2x^2} \\ s_{x^1x^2x^1x^1} & s_{x^1x^2x^2x^1} & s_{x^1x^2x^1x^2} & s_{x^1x^2x^2x^2} \\ s_{x^2x^2x^1x^1} & s_{x^2x^2x^2x^1} & s_{x^2x^2x^1x^2} & s_{x^2x^2x^2x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{x^1x^1} \\ \sigma^{x^2x^1} \\ \sigma^{x^1x^2} \\ \sigma^{x^2x^2} \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

والمعاملات:

$$s_{x^1x^1x^2x^1} = s_{x^1x^1x^1x^2} = s_{x^2x^1x^1x^1} = s_{x^2x^1x^2x^2} = s_{x^1x^2x^2x^2} = s_{x^2x^2x^2x^1} = s_{x^2x^2x^1x^2} = 0 \quad (7\text{-}36)$$

لكلا حالتي التشوهات المستوية والإجهادات المستوية. ولحالة الإجهادات المستوية يكون:

$$s_{x^1x^1x^1x^1} = s_{x^2x^2x^2x^2} = s$$
$$s_{x^1x^1x^2x^2} = s_{x^2x^2x^1x^1} = -\nu \cdot s$$
$$s_{x^1x^2x^1x^2} = s_{x^2x^1x^2x^1} = s_{x^1x^2x^2x^1} = s_{x^2x^1x^1x^2} = \frac{1}{2}(1+\nu)\cdot s \qquad (7\text{-}37)$$
$$s = \frac{1}{E}$$

ولحالة التشوهات المستوية يكون:

$$s_{x^1x^1x^1x^1} = s_{x^2x^2x^2x^2} = (1-\nu)\cdot s$$
$$s_{x^1x^1x^2x^2} = s_{x^2x^2x^1x^1} = -\nu \cdot s$$
$$s_{x^1x^2x^1x^2} = s_{x^2x^1x^2x^1} = s_{x^1x^2x^2x^1} = s_{x^2x^1x^1x^2} = \frac{1}{2}\cdot s \qquad (7\text{-}38)$$
$$s = \frac{1+\nu}{E}$$

ولتلافي الالتباس ننوه هنا أن s,c استخدمت بقيم مختلفة في العلاقـــات(7-21),(7-23),(7-37), (7-38) . ومن العلاقة(7-34) نستطيع استنتاج علاقة تربط بين التشوهات وقوى المقطع:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{t}\cdot s_{ijkl}\cdot n^{kl} \qquad (7\text{-}39)$$

وكان بالإمكان إيجاد مثل هذه العلاقة مباشرة بأخذ معكوس العلاقة (7-25).

بتعويض العلاقات (7-31) في العلاقة (7-33) وإجراء عمليات اشتقاق العلاقة الناتجة وفق علاقة التوافق (7-33) نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحكم مسألة الشريحة على الشكل:

$$\frac{\partial^4 F}{(\partial x^1)^4} + \frac{\partial^4 F}{(\partial x^1)^2(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^4 F}{(\partial x^2)^2(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^4 F}{(\partial x^2)^4} = 0 \qquad (7\text{-}40)$$

أو بإدخال معامل لابلاس:

$$\Delta\Delta F = 0 \qquad (7\text{-}41)$$

ولكل مسألة من مسائل الشرائح يجب إيجاد توابع الإجهادات التي تحقق المعادلة التفاضليـة(7-41) بالإضافة إلى تحقيقها للشروط الطرفية الهندسية والميكانيكية الخاصة بكل مسألة. ولحالات بسـيطة وطبولوجيات هندسية منتظمة يمكن إيجاد الحلول التحليلية للمعادلة التفاضلية.أما في الحالة العامة

فيلجأ عادة إلى الطرق العددية وفي مقدمتها طرائق العناصر المنتهية.وفي هذا الفصـــل لـــن يتـــم استعراض كل طرق العناصر المنتهية التي استعرضت في الفصل السادس لحل البلاطات الرقيقة،وإنما سيكتفى بعرض عنصر منتهي مستطيل من النموذج الهجين لحل الشرائح، ويجمع هذا العنصر مـــع نظيره من النموذج الهجين لحل البلاطات الرقيقة بغية استخدام العنصر الناتج في حـــل المنشـــآت المثنية المستوية.

7-2-عنصر شريحة مثلثي في الإحداثيات الديكارتية:

كما رأينا أثناء اشتقاقنا لمبدأ الطاقة الكامنة الأصغري في ميكانيك المرونة الخطية أن هـــذا المبـــدأ يقتضي بأن يكون المتغير الأول لتابعي الطاقة الكامنة معدوماً ضمن شروط المسموحية الحركيـــة لانتقالات الجسم المعزول طاقياً والقوى المطبقة المحافظة. وقد عبر عن هذا المبدأ رياضياً بالشكل:

$$\delta\pi = \delta\left\{\sum_e \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_{ij}\cdot c^{ijkl}\cdot\varepsilon_{kl}\cdot dV - \int_V \overline{f}^i\cdot u_i\cdot dV - \int_{S_\sigma}\overline{T}^i\cdot u_i\cdot ds\right\} = 0 \qquad (7\text{-}42)$$

وبعد اعتبار الحالة الخاصة لعمل الشرائح سواءً ضمن صيغة الاجهادات المستوية أو التشوهات المستوية ومراعاة كافة الافتراضات الوارد ذكرها في مقدمة هذا الفصل تتحول الصيغة الثلاثية الأبعاد (7.42) إلى الصيغة الثنائية البعد التالية:

$$\delta\pi = \delta\left\{\sum_e \left(\frac{1}{2}\int_A \varepsilon_{ij}\cdot tc^{ijkl}\cdot\varepsilon_{kl}\cdot dA - \int_A \overline{p}^i\cdot u_i\cdot dA - \int_{S_\sigma}\overline{p}^i_{b,e}\cdot u_i^{b,e}\cdot ds\right) - \sum_m \overline{F}^{(m)}u_m\right\} = 0 \qquad (7\text{-}43)$$

حيث:

$u_i^{b,e}$: الانتقالات على محيط العنصر المنتهي.

$\overline{p}^i_{b,e}$: القوى الخارجية المؤثرة على محيط العنصر المنتهي.

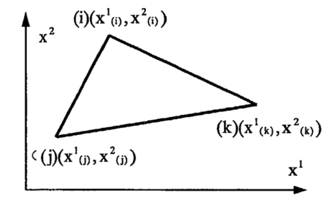
$\sum_m$: المجموع على العقد المحملة بقوى مركزة .

$\overline{F}^{(m)}$: القوة المركزة على العقدة (m) .

$u_{(m)}$: انتقالات العقدة (m) .

والرمز b,e يدل على محيط العنصر المنتهي.

لنقتطع الآن من شريحة مستوية عنصراً مثلثياً منسوباً إلى جملة محاور إحداثية ديكارتية وإحداثيات رؤوسه هي : $(i)(x^1_{(i)}, x^2_{(i)}), (j)(x^1_{(j)}, x^2_{(j)}), (k)(x^1_{(k)}, x^2_{(k)})$ على التوالي ولكل عقدة من عقد العنصر درجتي حرية وهي الانتقال u_{x^1} والانتقال u_{x^2}. وباعتبار أن انتقالاً في اتجاه x^1 لا يولد أي انتقال في اتجاه x^2 يمكن أن نعتبر أن الانتقالين مستقلين عن بعضهما البعض.



شكل 7-8 : عنصر شريحة مثلثي ، المحاور الاحداثية ، احداثيات العقد

ولهذا باستطاعتنا أن نختار لكل انتقال في اتجاه ما تابعاً تقريبياً متعلقاً فقط بدرجات حرية ذلك الاتجاه ومجموعها ثلاث درجات حرية وهي انتقالات رؤوس المثلث في ذلك الاتجاه.وأبسط اختيار هو أن نختار لتابع الانتقال u_{x^1} في نقطة ما لا على التعيين (x^1, x^2) واقعة ضمن المثلث التابع التقريبي التالي:

$$u_{x^1} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{x^1 0} \\ c_{x^1 1} \\ c_{x^1 2} \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}44)$$

ولتابع الانتقال u_{x^2} التابع التقريبي المشابه:

$$u_{x^2} = \begin{bmatrix}1 & x^1 & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{x^2 0}\\ c_{x^2 1}\\ c_{x^2 2}\end{bmatrix} \qquad (7\text{-}45)$$

وبتجميعهما يمكن التعبير عن العلاقتين السابقتين بالكتابة بالقرائن كما يلي:

$$u_i = x^n c_{in}\,; n = 0,1,2; i = x^1, x^2 \qquad (7\text{-}46)$$

تقتضي الشروط الطرفية اللازمة للعنصر المنتهي أن يولّد كل من تابعي الانتقال ضمـــن العنصـــر المنتهي انتقالات العقد عند تعويض إحداثيات هذه الأخيرة في كل من التابعين.أي:

$$\begin{bmatrix}u_{x^1(i)}\\ u_{x^1(j)}\\ u_{x^1(k)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & x^1{}_{(i)} & x^2{}_{(i)}\\ 1 & x^1{}_{(j)} & x^2{}_{(j)}\\ 1 & x^1{}_{(k)} & x^2{}_{(k)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{x^1 0}\\ c_{x^1 1}\\ c_{x^1 2}\end{bmatrix} \qquad (7\text{-}47)$$

$$\begin{bmatrix}u_{x^2(i)}\\ u_{x^2(j)}\\ u_{x^2(k)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & x^1{}_{(i)} & x^2{}_{(i)}\\ 1 & x^1{}_{(j)} & x^2{}_{(j)}\\ 1 & x^1{}_{(k)} & x^2{}_{(k)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{x^2 0}\\ c_{x^2 1}\\ c_{x^2 2}\end{bmatrix} \qquad (7\text{-}48)$$

أو اختصاراً :

$$u_{i(p)} = A^n{}_{(p)} \cdot c_{in} \qquad (p)=(i),(j),(k) \qquad (7\text{-}49)$$

وننوه هنا إلى أنه يجب عدم الالتباس بين (i) المستخدمة للدلالة على العقدة وبين القرينـــة i الـــتي تتحول على x^1, x^2. تتعين الثوابت الاختيارية c_{in} بدلالة انتقالات العقد بعكس العلاقة السابقة ومعكوسها هو:

$$c_{in} = B_n{}^{(p)} \cdot u_{i(p)} \qquad (7\text{-}50)$$

حيث:

$$B_n{}^{(p)} = \frac{1}{2A}\begin{pmatrix} x^1{}_{(j)}x^2{}_{(k)} - x^1{}_{(k)}x^2{}_{(j)} & -x^1{}_{(i)}x^2{}_{(k)} + x^1{}_{(k)}x^2{}_{(i)} & x^1{}_{(i)}x^2{}_{(j)} - x^1{}_{(j)}x^2{}_{(i)}\\ -x^2{}_{(k)} + x^2{}_{(j)} & x^2{}_{(k)} - x^2{}_{(i)} & -x^2{}_{(j)} + x^2{}_{(i)}\\ x^1{}_{(k)} - x^1{}_{(j)} & -x^1{}_{(k)} + x^1{}_{(i)} & x^1{}_{(j)} - x^1{}_{(i)} \end{pmatrix}$$

(7.51)

تنتج توابع الانتقالات التقريبية من تعويض الثوابت الاختيارية بقيمها المحددة في(7-50),(7-51) في (7-46) فنحصل على:

$$u_i = x^n \cdot B^{(p)}{}_n \cdot u_{i(p)} = N^{(p)} u_{i(p)} \tag{7-52}$$

حيث:

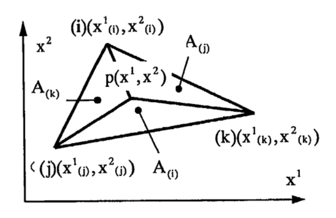
$$N^{(p)} = \begin{bmatrix} N^{(i)} & N^{(j)} & N^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2A_{(i)}}{2A} & \frac{2A_{(j)}}{2A} & \frac{2A_{(k)}}{2A} \end{bmatrix} \tag{7-53}$$

$$2A_{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 \\ 1 & x^1{}_{(j)} & x^2{}_{(j)} \\ 1 & x^1{}_{(k)} & x^2{}_{(k)} \end{bmatrix}, 2A_{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 \\ 1 & x^1{}_{(k)} & x^2{}_{(k)} \\ 1 & x^1{}_{(i)} & x^2{}_{(i)} \end{bmatrix}, 2A_{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 \\ 1 & x^1{}_{(i)} & x^2{}_{(i)} \\ 1 & x^1{}_{(j)} & x^2{}_{(j)} \end{bmatrix} \tag{7-54}$$

وقيم هذه المعينات تمثل مساحات المثلثات الثلاثة الجزئية المشكلة بوصل النقطة لا علـــى التعيـــين (x^1, x^2) الواقعة ضمن المثلث الأصلي إلى رؤوسه الثلاثة.

وتوابع الشكل هذه ليست سوى ما يسمى بالإحداثيات الطبيعية المثلثية والمعرفة كالتالي:

$$\lambda_1 = \frac{A_{(i)}}{A}; \lambda_2 = \frac{A_{(j)}}{A}; \lambda_3 = \frac{A_{(k)}}{A} \tag{7-55}$$



شكل 7-9: توابع الشكل كمساحات المثلثات الجزئية

كما سنرى لاحقاً أثناء دراسة المثلث في الإحداثيات الطبيعية.

الآن نستطيع وفق علاقات التشوهات-الانتقالات (7-14) إيجاد موتّرة التشوهات:

$$u_{i,j} = N^{(p)}{}_{,j} \cdot u_{i(p)} \qquad u_{j,i} = N^{(P)}{}_{,i} \cdot u_{j(p)} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{7-56}$$

وذلك بعد الأخذ بعين الاعتبار تماثل المشتقات $u_{j,i}, u_{i,j}$. والمصفوفة $N^{(p)}{}_{,j}$ هي بالتفصيل:

$$N^{(p)}{}_{,j} \equiv \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} x^2{}_{(j)(k)} & x^1{}_{(k)(j)} \\ x^2{}_{(k)(i)} & x^1{}_{(i)(k)} \\ x^2{}_{(i)(j)} & x^1{}_{(j)(i)} \end{bmatrix}; \qquad x^i{}_{(m)(n)} = x^i{}_{(m)} - x^i{}_{(n)} \tag{7-57}$$

يلاحظ أن موتّرة التشوهات ثابتة وتتعلق فقط بإحداثيات رؤوس المثلث وهي غير متعلقة بالإحداثيات المستقلة x^1, x^2. وتعبير الطاقة الداخلية يمكن تقييمه بكل بساطة بالشكل :

$$\pi_i = \frac{1}{2}\int_A \varepsilon_{ij} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot dA =$$
$$\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \int_A dA = \frac{A}{2} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \tag{7-58}$$

وذلك باعتبار أن التعابير التي أخرجت خارج إشارة التكامل كلها ثابتة ولا تحوي على المتحولات المستقلة x^1, x^2.

وبعد تعويض موتّرة التشوهات بقيمتها من العلاقة (7-56) نحصل على:

$$\pi_i = \frac{A}{2} \cdot (\frac{1}{2} N^{(p)}{}_{,j} u_{i(p)} + \frac{1}{2} N^{(p)}{}_{,i} u_{j(p)}) \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot (\frac{1}{2} N^{(q)}{}_{,l} \cdot u_{k(q)} + \frac{1}{2} N^{(q)}{}_{,k} \cdot u_{l(q)})$$
$$= \frac{1}{2} \cdot u_{i(p)} \cdot k^{i(p)k(q)} \cdot u_{k(q)} \tag{7-59}$$

حيث:

$$k^{i(p)k(q)} = (\frac{1}{2} N^{(p)}{}_{,j} + \frac{1}{2} N^{(p)}{}_{,i}) \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot (\frac{1}{2} N^{(q)}{}_{,l} + \frac{1}{2} N^{(q)}{}_{,k}) \tag{7-60}$$

مصفوفة القساوة للعنصر. وهذه المصفوفة تحوي 36 عنصراً كما هو واضح من تحول قرائنها.وعناصر هذه المصفوفة بعد تحويلها إلى مصفوفة ثنائية الأبعاد كما لو ضمت القرينتين i(p) في قرينة واحدة و k(p) في قرينة واحدة أيضاً،هي:

$$k^{i(p)k(q)} = \begin{bmatrix} k^{x^1(i)x^1(i)} & k^{x^1(i)x^2(i)} & k^{x^1(i)x^1(j)} & k^{x^1(i)x^2(j)} & k^{x^1(i)x^1(k)} & k^{x^1(i)x^2(k)} \\ k^{x^2(i)x^1(i)} & k^{x^2(i)x^2(i)} & k^{x^2(i)x^1(j)} & k^{x^2(i)x^2(j)} & k^{x^2(i)x^1(k)} & k^{x^2(i)x^2(k)} \\ k^{x^1(j)x^1(i)} & k^{x^1(j)x^2(i)} & k^{x^1(j)x^1(j)} & k^{x^1(j)x^2(j)} & k^{x^1(j)x^1(k)} & k^{x^1(j)x^2(k)} \\ k^{x^2(j)x^1(i)} & k^{x^2(j)x^2(i)} & k^{x^2(j)x^1(j)} & k^{x^2(j)x^2(j)} & k^{x^2(j)x^1(k)} & k^{x^2(j)x^2(k)} \\ k^{x^1(k)x^1(i)} & k^{x^1(k)x^2(i)} & k^{x^1(k)x^1(j)} & k^{x^1(k)x^2(j)} & k^{x^1(k)x^1(k)} & k^{x^1(k)x^2(k)} \\ k^{x^2(k)x^2(i)} & k^{x^2(k)x^2(i)} & k^{x^2(k)x^1(j)} & k^{x^2(k)x^2(j)} & k^{x^2(k)x^1(k)} & k^{x^2(k)x^2(k)} \end{bmatrix} \tag{7-61}$$

حيث:

$$c = \frac{Et}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{4A}$$

$$k^{x^1(i)x^1(i)} = \left[(x^2{}_{(j)(k)})^2 + \frac{1-\nu}{2} \cdot (x^1{}_{(k)(j)})^2 \right] \cdot c$$

$$k^{x^2(i)x^1(i)} = \left[\nu \cdot x^1{}_{(k)(j)} \cdot x^2{}_{(j)(k)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^2{}_{(j)(k)} \cdot x^1{}_{(k)(j)} \right] \cdot c$$

$$k^{x^2(i)x^2(i)} = \left[(x^1{}_{(k)(j)})^2 + \frac{1-\nu}{2} \cdot (x^2{}_{(j)(k)})^2 \right] \cdot c$$

$$k^{x^1(j)x^1(i)} = \left[x^2{}_{(k)(j)} \cdot x^2{}_{(j)(k)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^1{}_{(i)(k)} \cdot x^1{}_{(k)(j)} \right] \cdot c$$

$$k^{x^1(j)x^2(i)} = \left[\nu \cdot x^2{}_{(k)(i)} \cdot x^1{}_{(k)(j)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^1{}_{(i)(k)} \cdot x^2{}_{(j)(k)} \right] \cdot c$$

$$k^{x^1(j)x^1(j)} = \left[(x^2{}_{(k)(i)})^2 + \frac{1-\nu}{2} \cdot (x^1{}_{(i)(k)})^2 \right] \cdot c$$

$$k^{x^2(j)x^1(i)} = \left[\nu \cdot x^1{}_{(i)(k)} \cdot x^2{}_{(j)(k)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^2{}_{(k)(i)} \cdot x^1{}_{(k)(j)}\right] \cdot c$$

$$k^{x^2(j)x^2(i)} = \left[x^1{}_{(i)(k)} \cdot x^1{}_{(k)(j)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^2{}_{(k)(i)} \cdot x^2{}_{(j)(k)}\right] \cdot c$$

$$k^{x^2(j)x^1(j)} = \left[\nu \cdot x^1{}_{(i)(k)} \cdot x^2{}_{(k)(i)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^2{}_{(k)(i)} \cdot x^1{}_{(i)(k)}\right] \cdot c$$

$$k^{x^2(j)x^2(j)} = \left[(x^1{}_{(i)(k)})^2 + \frac{1-\nu}{2} \cdot (x^2{}_{(k)(i)})^2\right] \cdot c$$

$$k^{x^1(k)x^1(i)} = \left[x^2{}_{(i)(j)} \cdot x^2{}_{(j)(k)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^1{}_{(j)(i)} \cdot x^1{}_{(k)(j)}\right] \cdot c$$

$$k^{x^1(k)x^2(i)} = \left[\nu \cdot x^2{}_{(i)(j)} \cdot x^1{}_{(k)(j)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^1{}_{(j)(i)} \cdot x^2{}_{(j)(k)}\right] \cdot c$$

$$k^{x^1(k)x^1(j)} = \left[x^2{}_{(i)(j)} \cdot x^2{}_{(k)(i)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^1{}_{(j)(i)} \cdot x^1{}_{(i)(k)}\right] \cdot c \qquad (7\text{-}62)$$

$$k^{x^1(k)x^2(j)} = \left[\nu \cdot x^2{}_{(i)(j)} \cdot x^1{}_{(i)(k)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^1{}_{(j)(i)} \cdot x^2{}_{(k)(i)}\right] \cdot c$$

$$k^{x^1(k)x^1(k)} = \left[(x^2{}_{(i)(j)})^2 + \frac{1-\nu}{2} \cdot (x^1{}_{(j)(i)})^2\right] \cdot c$$

$$k^{x^2(k)x^1(i)}=\left[\nu\cdot x^1{}_{(j)(i)}\cdot x^2{}_{(j)(k)}+\frac{1-\nu}{2}\cdot x^2{}_{(i)(j)}\cdot x^1{}_{(k)(j)}\right]\cdot c$$

$$k^{x^2(k)x^2(i)}=\left[x^1{}_{(j)(i)}\cdot x^1{}_{(k)(j)}+\frac{1-\nu}{2}\cdot x^2{}_{(i)(j)}\cdot x^2{}_{(j)(k)}\right]\cdot c$$

$$k^{x^2(k)x^1(j)}=\left[\nu\cdot x^1{}_{(j)(i)}\cdot x^2{}_{(k)(i)}+\frac{1-\nu}{2}\cdot x^2{}_{(i)(j)}\cdot x^1{}_{(i)(k)}\right]\cdot c$$

$$k^{x^2(k)x^2(j)}=\left[x^1{}_{(j)(i)}\cdot x^1{}_{(i)(k)}+\frac{1-\nu}{2}\cdot x^2{}_{(i)(j)}\cdot x^2{}_{(k)(i)}\right]\cdot c$$

$$k^{x^2(k)x^1(k)}=\left[\nu\cdot x^1{}_{(j)(i)}\cdot x^2{}_{(i)(j)}+\frac{1-\nu}{2}\cdot x^2{}_{(i)(j)}\cdot x^1{}_{(j)(i)}\right]\cdot c$$

$$k^{x^2(k)x^2(k)}=\left[(x^1{}_{(j)(i)})^2+\frac{1-\nu}{2}\cdot(x^2{}_{(i)(j)})^2\right]\cdot c$$

والعلاقة السابقة تمثل عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة القساوة بالإضافة إلى العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي،والعناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي تؤخذ بالتناظر.

تنتج القوى المركزة على العقد والمكافئة لحمولة موزعة من تقييم تعبير الحد الثاني من العلاقة(43-7).في الحالة العامة يمكن أن تكون الحمولات الخارجية $\bar{f}^i$ تابعة للإحداثيات المستقلة x^2,x^1 وغير موزعة بانتظام. في هذه الحالة يمكن استخدام صيغة التوابع التقريبية أيضاً لتقريب تابع الحمولة.

لنفرض أن قيم توابع الحمولة الخارجية $\bar{f}^i$ على العقد $(k),(j),(i)$ هي على الترتيب $\bar{f}^i{}_{(i)},\bar{f}^i{}_{(j)},\bar{f}^i{}_{(k)}$, وهي بالطبع قيمتين على كل عقدة، واحدة في اتجاه x^1 والأخرى في اتجاه x^2.عندها يمكن استخدام نفس الصيغة المشابهة للتوابع التقريبية للانتقالات(52-7) لتقريب تابع الحمولة:

$$\bar{f}^i=N^{(q)}\cdot\bar{f}^i{}_{(q)} \tag{7-63}$$

ويصبح الحد الثاني من(43-7) كما يلي:

$$\pi_a = -\int_A \bar{f}^i \cdot u_i \cdot dA = \bar{f}^i_{(q)} (\int_A N^{(q)} \cdot N^{(p)} \cdot dA) \cdot u_{i(p)}$$
$$= \bar{f}^i_{(q)} \cdot c^{(q)(p)} \cdot u_{i(p)} = \bar{f}^{i(p)} \cdot u_{i(p)} \qquad (7\text{-}64)$$

والقوى المركزة على العقد والمكافئة للحمولات الموزعة هي:

$$\bar{f}^{i(p)} = \bar{f}^{(i)}_{(q)} \cdot c^{(q)(p)} \qquad (7\text{-}65)$$

حيث:

$$c^{(q)(p)} = \int_A N^{(q)} \cdot N^{(p)} \cdot dA = \int_A N^{(q)} \cdot N^{(p)} \cdot dx^1 \cdot dx^2 \qquad (7\text{-}66)$$

إذا لابد لحساب القوى المركزة على العقد والمكافئة للحمولة الموزعة من إجراء التكامل السابق على سطح المثلث.ولتسهيل إجراء هذه التكاملات يمكن إجراء انسحاب للمحاور الإحداثية بحيث يصبح مركزها منطبقا على مركز ثقل المثلث. ففي هذه الحالة يكون:

$$\frac{x^1_{(i)} + x^1_{(j)} + x^1_{(k)}}{3} = \frac{x^2_{(i)} + x^2_{(j)} + x^2_{(k)}}{3} = 0 \qquad (7\text{-}68)$$

وتتحقق علاقات التكامل التالية على سطح المثلث:

$$\int dx^1 \cdot dx^2 = A \qquad \text{(مساحة المثلث)}$$
$$\int x^1 \cdot dx^1 \cdot dx^2 = \int x^2 \cdot dx^1 \cdot dx^2 = 0$$
$$\int (x^1)^2 \cdot dx^1 \cdot dx^2 = \frac{A}{12} \cdot ((x^1_{(i)})^2 + (x^1_{(j)})^2 + (x^1_{(k)})^2) \qquad (7\text{-}69)$$
$$\int (x^2)^2 \cdot dx^1 \cdot dx^2 = \frac{A}{12} \cdot ((x^2_{(i)})^2 + (x^2_{(j)})^2 + (x^2_{(k)})^2)$$
$$\int x^1 \cdot x^2 \cdot dx^1 \cdot dx^2 = \frac{A}{12} \cdot (x^1_{(i)} \cdot x^2_{(i)} + x^1_{(j)} \cdot x^2_{(j)} + x^1_{(k)} \cdot x^2_{(k)})$$

والتكاملات المعطاة في العلاقة السابقة والتي سيكتفى بإعطائها دون برهان تحتوي على كل التكاملات التي تظهر في العلاقة (7-66) .

تحتوي المصفوفة $c^{(q)(p)}$ على تسع عناصر وهي:

$$c^{(q)(p)} = \begin{bmatrix} c^{(i)(i)} & c^{(j)(i)} & c^{(k)(i)} \\ c^{(i)(j)} & c^{(j)(j)} & c^{(k)(j)} \\ c^{(i)(k)} & c^{(j)(k)} & c^{(k)(k)} \end{bmatrix} = \frac{2A}{24} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}70)$$

لإيجاد عناصر المصفوفة السابقة من قبل القارئ يمكـــن الاســـتفادة مـــن بعـــض الاختصـــارات والتسهيلات ملخصة في العلاقات التالية:

$$a_i = x^1{}_{(j)}x^2{}_{(k)} - x^1{}_{(k)}x^2{}_{(j)}; a_j = x^1{}_{(k)}x^2{}_{(i)} - x^1{}_{(i)}x^2{}_{(k)}; a_k = x^1{}_{(i)}x^2{}_{(j)} - x^1{}_{(j)}x^2{}_{(i)}$$

$$b_i = x^2{}_{(j)} - x^2{}_{(k)}; b_j = x^2{}_{(k)} - x^2{}_{(i)}; b_k = x^2{}_{(i)} - x^2{}_{(j)}$$

$$c_i = x^1{}_{(k)} - x^1{}_{(j)}; c_j = x^1{}_{(i)} - x^1{}_{(k)}; c_k = x^1{}_{(j)} - x^1{}_{(i)}$$

$$2A = a_i + b_i x^1{}_{(i)} + c_i x^2{}_{(i)} = a_j + b_j x^1{}_{(j)} + c_j x^2{}_{(j)} = a_k + b_k x^1{}_{(k)} + c_k x^2{}_{(k)}$$

$$a_m = \frac{2}{3}A; m = i, j, k$$

(7-71)

$$b_m x^1{}_n + c_m x^2{}_n = \frac{4}{3}A \quad \text{if} \quad m=n$$

$$= -\frac{2}{3}A \quad \text{if} \quad m \neq n \qquad ; \ m,n = i,j,k.$$

وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها الحمولة الخارجية $\bar{f}^i$ في العلاقة(7-63) موزعة بانتظام وشدتها بالتالي على كل عقدة ثابتة ومساوية لـــ $\bar{f}^i$ تصبح القوى الخارجية المركزة على عقد العنـــاصر والمكافئة للحمولة الموزعة (العلاقة(7-65)) بالشكل:

$$\bar{f}^{i(p)} = \bar{f}^i{}_{(q)} \cdot \frac{A}{3} \cdot \delta^{(q)(p)} \qquad (7\text{-}72)$$

أي أن القوة الموزعة بانتظام على كامل السطح تتوزع بالتساوي على العقد الثلاثة ومقدار القـــوة المركزة على كل عقدة يكون مساويا لثلث شدة القوة الموزعة مضروبا بمساحة سطح المثلث.
يتم الجمع على كامل المنشأ بعد تحويل تعابير طاقة التشوه الداخلية وعمل القوى الخارجية إلى جملة الإحداثيات العامة وذلك بعد وضع العلاقة التي تربط الانتقالات المنسوبة إلى الإحداثيات الخاصـــة بالعنصر والانتقالات المنسوبة إلى جملة الإحداثيات العامة. وهذه العلاقة بسيطة واستنتاجها ســـهل ولاداعي للخوض فيه.

تحصل بنتيجة التغيرات الحرارية تشوهات في مستوي الشريحة.وفي التغيرات العادية لدرجة الحرارة يمكن أن نفترض أن التشوهات تتناسب طرداً مع تغيرات درجة الحرارة. وباعتبار أنه في دراستنا اقتصرنا على دراسة المادة المتجانسة فإن التشوه الحراري هو واحد في كل الاتجاهات ومقداره $\alpha \cdot \Delta T$ حيث α معامل التمدد الحراري و ΔT التغير الحراري الحاصل.

وبهذا تصبح علاقات التشوهات-الإجهادات للحالة الفراغية:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x^1x^1} &= \frac{1}{E}[\sigma^{x^1x^1} - \vartheta(\sigma^{x^2x^2} + \sigma^{x^3x^3})] + \alpha \cdot \Delta T \\
\varepsilon_{x^2x^2} &= \frac{1}{E}[\sigma^{x^2x^2} - \vartheta(\sigma^{x^3x^3} + \sigma^{x^1x^1})] + \alpha \cdot \Delta T \qquad (7.73) \\
\varepsilon_{x^3x^3} &= \frac{1}{E}[\sigma^{x^3x^3} - \vartheta(\sigma^{x^1x^1} + \sigma^{x^2x^2})] + \alpha \cdot \Delta T
\end{aligned}$$

ووفق هذه العلاقات لا تتغير الاتجاهات الرئيسية والتشوهات الرئيسية الحاصلة في المكعب التفاضلي.

في الحقيقة إن الحقل الحراري $T(x^1, x^2, x^3, t)$ يؤثر في الحالة الإجهادية وحالة التشوهات الحاصلة في جزء من منشأ في اللحظة t. وكذلك الأمر تؤثر حقول الإجهادات والتشوهات الحاصلة في جزء المنشأ المدروس على توزع الحقل الحراري.وهذا التأثير المتبادل بين الحقل الحراري وحقول التشوهات والإجهادات يصبح مهما في حالة حصول تشوهات وإجهادات كبيرة جداً. أما في المسائل العملية العادية فإنه يمكن إهمال التغيرات الحرارية الناتجة عن إجهاد المنشأ أو تشغيل المنشأ على الحمولات العادية.ويبقى تأثير التغيرات الحرارية غير المنبعثة من المادة المتشوهة. ولهذه الحالة نفترض أن الحقل الحراري معطى بواسطة القياسات ويعامل معاملة الحمولات المعطاة. أما بالنسبة لتشوهات القص والتي تعبر عن التغير الزاوي بين ليفين متعامدين فيفترض أنه ليس هناك تداخل بين تشوه القص والتشوهات الناظمية.أي أن التأثير الحراري كتأثير مسبق لايبدل الزاوية بين ليفين متعامدين من المادة والليفان المذكوران يبقيان بعد تعرضهما للتشوه الحراري المسبق

متعامدان وإنما يحصل مثل هذا التغير لاحقاً مُسبباً من الاجهادات الناتجة عن التشـــوه الحـــراري، ولذلك تبقى علاقات التشوهات-الإجهادات والخاصة بتشوهات القص نفس العلاقات الســـابقة دون تغيير.أي:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{x^1x^2} &= \frac{\sigma^{x^1x^2}}{G} \\ 2\varepsilon_{x^2x^3} &= \frac{\sigma^{x^2x^3}}{G} \quad ; G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ 2\varepsilon_{x^3x^1} &= \frac{\sigma^{x^3x^1}}{G} \end{aligned} \tag{7.74}$$

إذا لا تؤثر التشوهات الحرارية المسبقة للمادة المعتبرة في التغير الزاوي بين ليفين متعامدين.

والعلاقات السابقة تمثل قانون هوك للحالة الإجهادية الفراغية. بجمع العلاقات الثلاثة الأولى نحصل على:

$$\begin{aligned} e &= \frac{1-2\nu \cdot s}{E} + 3\alpha \cdot \Delta T \\ e &= \varepsilon_{x^1x^1} + \varepsilon_{x^2x^2} + \varepsilon_{x^3x^3} \\ s &= \sigma^{x^1x^1} + \sigma^{x^2x^2} + \sigma^{x^3x^3} \end{aligned} \tag{7.75}$$

إذا ما أدخلنا المعامل k والمسمى معامل الانضغاط بالشكل:

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{2(1+\nu) \cdot G}{3(1-2\nu)} \tag{7.76}$$

يمكن أن نكتب:

$$e = \frac{s}{3k} + 3\alpha \cdot \Delta T \tag{7.77}$$

قانون هوك يمكن صياغته أيضا باستخدام المعامل G بالشكل:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2G}[\sigma^{kl} - \frac{\nu}{1+\nu} \cdot s \cdot \delta_{kl}] + \alpha \cdot \Delta T \cdot \delta_{kl} \tag{7.78}$$

وهذه الصياغة هي الصياغة التقليدية لقانون السلوك.

يمكن عكس هذه المعادلات لنحصل على:

$$\sigma^{kl} = 2G[\varepsilon_{kl} + \frac{\nu}{1-\nu}\cdot e\cdot\delta_{kl} - \frac{1-\nu}{1-2\nu}\cdot\alpha\cdot\Delta T\cdot\delta_{kl}] \quad (7.79)$$

وهذه الصيغ مستخدمة في بعض المراجع إضافة إلى الصيغ التي درسناها أثناء دراسة قانون السلوك والتي استخدمت فيها ثوابت Lam :

$$\lambda = \frac{\nu\cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7.80)$$

إذا نستنتج مما سبق أنه لاعتبار تأثير الحرارة كحمولة خارجية نفترض أن التشوه الحراري الحاصل هو تشوه معطى أو بالأحرى تشوه مسبق . ويكون التشوه الكلي مساويا للتشوه الداخلي الحاصل نتيجة تأثير القوى الداخلية ε_{ij} والتشوه المسبق الحاصل نتيجة التشوهات الحرارية $\bar{\varepsilon}_{ij}$ وتكون الطاقة الكامنة للجملة:

$$\pi = \frac{1}{2}\int_V(\varepsilon_{ij} - \overline{\varepsilon_{ij}})\cdot c^{ijkl}\cdot(\varepsilon_{kl} - \overline{\varepsilon_{kl}})\cdot dV - \int_V \bar{f}^i\cdot u_i\cdot dV - \int_{s_\sigma}\bar{T}^i\cdot u_i\cdot ds \quad (7.81)$$

والمتغير الأول للطاقة الكامنة باعتبار المقادير والتي عليها ‾ معطاة هو:

$$\begin{aligned}\delta\pi = \frac{1}{2}\int_V\delta\varepsilon_{ij}\cdot c^{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \bar{\varepsilon}_{kl})dV + \frac{1}{2}\int_V(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij})\cdot c^{ijkl}\cdot\delta\varepsilon_{kl}\cdot dV \\ - \int_V\bar{f}^i\delta u_i dV - \int_{s_\sigma}\bar{T}^i\delta u_i ds = 0\end{aligned} \quad (7.82)$$

وباعتبار تناظر موترة التشوهات الداخلية والناتجة أيضا عن التأثيرات الحرارية يكون:

$$\begin{aligned}\delta\pi = \int_V\delta\varepsilon_{ij}\cdot c^{ijkl}\cdot\varepsilon_{kl}\cdot dV - \int_V\delta\varepsilon_{ij}\cdot c^{ijkl}\cdot\bar{\varepsilon}_{kl}\cdot dV \\ - \int_V\bar{f}^i\cdot\delta u_i\cdot dV - \int_{s_\sigma}\bar{T}^i\cdot\delta u_i\cdot ds = 0\end{aligned} \quad (7.83)$$

إذا تساهم التأثيرات الحرارية في الحمولة الخارجية عبر الحد الثاني من العلاقة السابقة.ولاعتبار هذه التأثيرات لابد من تقييم الحد المذكور

$$T_1 = \int_V\delta\varepsilon_{ij}\cdot c^{ijkl}\cdot\bar{\varepsilon}_{kl}\cdot dV \quad (7.84)$$

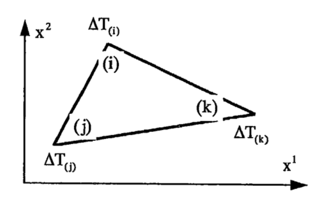
لنعتبر الآن أن التوزع الحراري منتظم على سماكة الشريحة فيصبح التكامل السابق:

$$T_1 = \int_A \delta\varepsilon_{ij} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \bar{\varepsilon}_{kl} \cdot dA \qquad (7.85)$$

$\delta\varepsilon_{ij}$ كنا قد حسبناها سابقاً بدلالة مشتقات توابع الشكل :

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(N^{(p)}{}_{,j}.\delta u_{i(p)} + N^{(p)}{}_{,i}.\delta u_{j(p)}) \qquad (7.86)$$

ولنحسب الآن $\bar{\varepsilon}_{kl}$. لنفترض أنه في معطيات المسألة قد وصف تغير الحقل الحراري بقياس تغير درجة الحرارة على عقد الشريحة.على العنصر المنتهي ذو العقد (i),(j),(k) كانت تغيرات درجات الحرارة المقاسة $\Delta T_{(i)}, \Delta T_{(j)}, \Delta T_{(k)}$ على الترتيب.باعتبار أن التشوه يهمنا في نقطة ما



شكل 7–10: تغيرات درجات الحرارة على عقد العنصر المنتهي

لا على التعيين من مستوي العنصر يمكن أن نستخدم مسودة التوابع التقريبية المستخدمة للانتقالات في تقريب تابع التغيرات الحرارية.إذا تغير درجة الحرارة في نقطة ما لاعلى التعيين يعطى بالشكل:

$$\Delta T = N^{(q)} \cdot \Delta T_{(q)} \qquad (7.87)$$

وبالتالي يكون حقل التشوهات المسبقة الناتجة عن تأثير تغير درجة الحرارة:

$$\bar{\varepsilon}_{kl} = \alpha \cdot \Delta T = \alpha \cdot N^{(q)} \cdot \Delta T_{(q)} \cdot \delta_{kl} \qquad \text{if} \quad k \neq l \qquad (7.88)$$
$$\bar{\varepsilon}_{kl} \neq 0$$

ويصبح التكامل السابق كالتالي:

$$T_1 = \frac{1}{2}\delta u_{i(p)}\int_A N^{(p)}{}_{,j} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \alpha \cdot N^{(q)} \cdot \Delta T_{(q)}.\delta_{kl} \cdot dA$$
$$+\frac{1}{2}\delta u_{j(p)}\int_A N^{(p)}{}_{,i} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \alpha \cdot N^{(q)} \cdot \Delta T_{(q)} \cdot \delta_{kl}.dA = \frac{1}{2}\delta u_{i(p)} \cdot \bar{f}_{\Delta T}{}^{i(q)} + \frac{1}{2}\delta u_{j(p)} \cdot \bar{f}_{\Delta T}{}^{j(q)}$$

(7.89)

والحمولة المركزة على عقد العنصر والمكافئة للتأثير الحراري تعطى بالشكل:

$$\bar{f}_{\Delta T}{}^{i(q)} \equiv \frac{1}{2}\bar{f}_{\Delta T}{}^{i(q)} + \frac{1}{2}\bar{f}_{\Delta T}{}^{j(q)} = \frac{1}{2}[\int_A N^{(p)}{}_{,j} \cdot \alpha t \cdot c^{ijkl}.\delta_{kl} \cdot N^{(q)} \cdot dA] \cdot \Delta T_{(q)}$$
$$+\frac{1}{2}[\int_A N^{(p)}{}_{,i} \cdot \alpha t \cdot c^{ijkl}.\delta_{kl} \cdot N^{(q)} \cdot dA] \cdot \Delta T_{(q)} \equiv c^{i(p)(q)} \cdot \Delta T_{(q)}$$

(7.90)

سوف نقوم الآن بتقييم التعبير T_1 باستخدام الشكل المصفوفي.

لنصيغ الآن التشوهات المسبقة بالشكل المصفوفي التالي:

$$\bar{\varepsilon}_{kl} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{x^1x^1} \\ \bar{\varepsilon}_{x^1x^2} \\ \bar{\varepsilon}_{x^2x^1} \\ \bar{\varepsilon}_{x^2x^2} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} N^{(i)} & N^{(j)} & N^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ N^{(i)} & N^{(j)} & N^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta T_{(i)} \\ \Delta T_{(j)} \\ \Delta T_{(k)} \end{bmatrix} \qquad (7.91)$$

وكما نعلم فإن C^{ijkl} معطاة بالعلاقة:

$$c^{ijkl} \equiv \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \nu \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (7.92)$$

و $\delta\varepsilon_{ij}$ هي:

$$
\begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{x^1x^1} \\ \delta\varepsilon_{x^2x^1} \\ \delta\varepsilon_{x^1x^2} \\ \delta\varepsilon_{x^2x^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \cdot \begin{bmatrix} x^2{}_{(j)(k)} & 0 & x^2{}_{(k)(i)} & 0 & x^2{}_{(i)(j)} & 0 \\ \frac{1}{2}x^1{}_{(k)(j)} & \frac{1}{2}x^2{}_{(j)(k)} & \frac{1}{2}x^1{}_{(i)(k)} & \frac{1}{2}x^2{}_{(k)(i)} & \frac{1}{2}x^1{}_{(j)(i)} & \frac{1}{2}x^2{}_{(i)(j)} \\ \frac{1}{2}x^1{}_{(k)(j)} & \frac{1}{2}x^2{}_{(j)(k)} & \frac{1}{2}x^1{}_{(i)(k)} & \frac{1}{2}x^2{}_{(k)(i)} & \frac{1}{2}x^1{}_{(j)(i)} & \frac{1}{2}x^2{}_{(i)(j)} \\ 0 & x^1{}_{(k)(j)} & 0 & x^1{}_{(i)(k)} & 0 & x^1{}_{(j)(i)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u_{x^1(i)} \\ \delta u_{x^2(i)} \\ \delta u_{x^1(j)} \\ \delta u_{x^2(j)} \\ \delta u_{x^1(k)} \\ \delta u_{x^2(k)} \end{bmatrix}
\tag{7.93}
$$

نقيم أولا الجداء $\delta\varepsilon_{ij} \cdot c^{ijkl}$ لنحصل على:

$$
\delta\varepsilon_{ij} \cdot c^{ijkl} = \begin{bmatrix} \delta u_{x^1(i)} & \delta u_{x^2(i)} & \delta u_{x^2(j)} & \delta u_{x^2(j)} & \delta u_{x^1(k)} & \delta u_{x^2(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^2{}_{(j)(k)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1{}_{(k)(j)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1{}_{(k)(j)} & \nu x^2{}_{(j)(k)} \\ \nu x^1{}_{(k)(j)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2{}_{(j)(k)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2{}_{(j)(k)} & x^1{}_{(k)(j)} \\ x^2{}_{(k)(i)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1{}_{(i)(k)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1{}_{(i)(k)} & \nu x^2{}_{(k)(i)} \\ \nu x^1{}_{(i)(k)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2{}_{(k)(i)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2{}_{(k)(i)} & x^1{}_{(i)(k)} \\ x^2{}_{(i)(j)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1{}_{(j)(i)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1{}_{(j)(i)} & \nu x^2{}_{(i)(j)} \\ \nu x^1{}_{(j)(i)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2{}_{(i)(j)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2{}_{(i)(j)} & x^1{}_{(j)(i)} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A}
\tag{7.94}
$$

وفي النهاية يكون الحد T_1 بالشكل:

$$
\int_A \delta\varepsilon_{ij} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \bar{\varepsilon}_{kl} \cdot dA = \begin{bmatrix} \delta u_{x^1(i)} & \delta u_{x^2(i)} & \delta u_{x^1(j)} & \delta u_{x^2(j)} & \delta u_{x^1(k)} & \delta u_{x^1(k)} \end{bmatrix}
$$

$$
\left(\int_A \frac{t}{2A} \cdot \begin{bmatrix} (1+\nu)x^2{}_{(j)(k)}N^{(i)} & (1+\nu)x^2{}_{(j)(k)}N^{(j)} & (1+\nu)x^2{}_{(j)(k)}N^{(k)} \\ (1+\nu)x^1{}_{(k)(j)}N^{(i)} & (1+\nu)x^1{}_{(k)(j)}N^{(j)} & (1+\nu)x^1{}_{(k)(j)}N^{(k)} \\ (1+\nu)x^2{}_{(k)(i)}N^{(i)} & (1+\nu)x^2{}_{(k)(i)}N^{(j)} & (1+\nu)x^2{}_{(k)(i)}N^{(k)} \\ (1+\nu)x^1{}_{(i)(k)}N^{(i)} & (1+\nu)x^1{}_{(i)(k)}N^{(j)} & (1+\nu)x^1{}_{(i)(k)}N^{(k)} \\ (1+\nu)x^2{}_{(i)(j)}N^{(i)} & (1+\nu)x^2{}_{(i)(j)}N^{(j)} & (1+\nu)x^2{}_{(i)(j)}N^{(k)} \\ (1+\nu)x^1{}_{(j)(i)}N^{(i)} & (1+\nu)x^1{}_{(j)(i)}N^{(j)} & (1+\nu)x^1{}_{(j)(i)}N^{(i)} \end{bmatrix} dA \right) \begin{bmatrix} \Delta T_{(i)} \\ \Delta T_{(j)} \\ \Delta T_{(k)} \end{bmatrix}
$$

$$
= \delta u_{i(p)} \cdot c^{i(p)(q)} \cdot \Delta T_{(q)}
\tag{7.95}
$$

والمصفوفة $c^{i(p)(q)}$ تعطى بعد إنجاز التكامل السابق بفرض أن مركز الإحداثيات ينطبق على مركز ثقل المثلث وبعد الانتباه إلى تماثل a_i, a_j, a_k:

$$c^{i(p)(q)} = \frac{E\alpha t}{6(1-\nu)} \begin{bmatrix} x^2{}_{(j)(k)} & x^2{}_{(j)(k)} & x^2{}_{(j)(k)} \\ x^1{}_{(k)(j)} & x^1{}_{(k)(j)} & x^1{}_{(k)(j)} \\ x^2{}_{(k)(i)} & x^2{}_{(k)(i)} & x^2{}_{(k)(i)} \\ x^1{}_{(i)(k)} & x^1{}_{(i)(k)} & x^1{}_{(i)(k)} \\ x^2{}_{(i)(j)} & x^2{}_{(i)(j)} & x^2{}_{(i)(j)} \\ x^1{}_{(j)(i)} & x^1{}_{(j)(i)} & x^1{}_{(j)(i)} \end{bmatrix} \quad (7.96)$$

ويمكن أيضا استخدام طريقة فك التعبير T_1 للحصول على حدوده فرادى .

حالة هبوط المساند أو الانتقالات المسبقة:

من حالات التحميل الخارجية والتي تؤدي إلى نشوء قوى في المنشآت هي حالات هبوط المساند أو حالة وجود انتقالات مسبقة. لنفرض أنه حصل في بعض نقاط المنشأ انتقالات مسبقة.ففي هذه الحالة نقسم شعاع الانتقالات النهائي الكلي u إلى مجموع شعاعين شعاع الانتقالات الحاصل دون وجود الانتقالات المسبقة $u_{\tilde{m}(n')}$ وشعاع الانتقالات المسبقة $\bar{u}_{\tilde{m}(n')}$ ويكون تعبير الطاقة الكامنة الكلي للمنشأ كما يلي:

$$\pi = \frac{1}{2}(u_{\tilde{l}(n)} + \bar{u}_{\tilde{l}(n)})k^{\tilde{l}(n)\tilde{m}(n')}(u_{\tilde{m}(n')} + \bar{u}_{\tilde{m}(n')}) - \bar{f}^{\tilde{l}(n)}(u_{\tilde{l}(n)} + \bar{u}_{\tilde{l}(n)}) \quad (7.97)$$

عدد عقد المنشأ $\quad (n),(n') = 1,2,3$ ، $\tilde{m}, \tilde{l} = x^{\tilde{1}}, x^{\tilde{2}}$

والمتغير الأول للطاقة الكامنة هو:

$$\delta\pi = \delta u_{\tilde{l}(n)}[k^{\tilde{l}(n)\tilde{m}(n')}(u_{\tilde{m}(n')} + \bar{u}_{\tilde{m}(n')}) - \bar{f}^{\tilde{l}(n)}] = 0 \quad (7.98)$$

وذلك لأن المتغير الأول للانتقالات المسبقة المعلومة $(\delta\bar{u}_{\tilde{l}(n)} = 0)$ مساو للصفر وتصبح جملة المعادلات الخطية بالشكل:

$$k^{\tilde{l}(n)\tilde{m}n'}u_{\tilde{m}(n')} = -k^{\tilde{l}(n)\tilde{m}n'}\bar{u}_{\tilde{m}(n')} + \bar{f}^{\tilde{l}(n)} \quad (7.99)$$

أي أن تأثير هبوط المساند أو الانتقالات المسبقة ممثل في الطرف الأيمن بالجداء $-k^{\bar{l}(n)\bar{m}(n')}\bar{u}_{\bar{m}(n')}$ وهو حاصل جداء مصفوفة القساوة العامة في شعاع الانتقالات المسبقة.فإذا كان الانتقال المسبق قد حدث على عدد محدود من العقد فإن الجداء السابق ممثل بجداء الأعمدة من مصفوفة القساوة العامة الموافقة لأرقام العقد التي حصل فيها الانتقال مضروبا في الانتقال المسبق نفسه.

معالجة النوابض

في حالة وجود نابض ثابت صلابته c يسند عقدة ما (p) من الشريحة في اتجاه ما تكون الطاقة الداخلية المتولدة عن قوى مرونة النابض والناتجة عن انتقال العقدة (i) بالاتجاه بالمقدار $u_{(p)}$:

$$\pi_s = \frac{1}{2} u_{(p)} \cdot c \cdot u_{(p)} \tag{7.100}$$

هذه الطاقة يجب تحويلها بدلالة انتقالات العقدة (p) باتجاه المحاور الإحداثية العامة قبل إضافتها إلى تابع الطاقة الكامنة.لنفترض أن $u_{(p)}$ ترتبط مع الانتقالات باتجاه المحاور الإحداثية العامة بعلاقة التحويل:

$$u_{(p)} = T^{\bar{l}} \cdot u_{\bar{l}(p)} \tag{7.101}$$

بهذا نحصل على:

$$\pi_s = \frac{1}{2} u_{\bar{l}(p)} T^{\bar{l}} c T^{\bar{m}} u_{\bar{m}(p)} \tag{7.102}$$

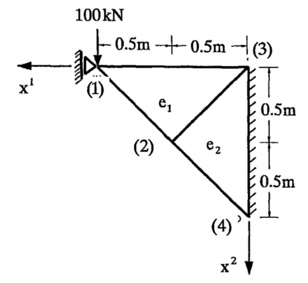
إذا نضيف المقدار $T^{\bar{l}}cT^{\bar{m}}$ في المكان الموافق للعقدة (p) المسندة بالنابض.

أما القوة المحورية في النابض فيتم حسابها بعد حساب الانتقالات المجهولة بحساب انتقال العقدة (p) باتجاه محور النابض وفق علاقة التحويل الواردة أعلاه ومن ثم نحسب القوة في النابض بالعلاقة المعروفة:

$$N_{(p)} = -c \cdot u_{(p)} \tag{7.103}$$

مثال 7–1

لدينا شريحة مثلثية قائمة أبعادها وخواصها الهندسية بالإضافة إلى تقسيمها إلى عناصر منتهية وترقيم عقد عناصرها مبينة على الشكل م7–1. إذا خضعت الشريحة لقوة شاقولية مقدارها 100 kN في العقدة (1) والمطلوب في جملة المحاور الإحداثية x^1x^2 :



$$E = 2.1\times10^7\,kN/m^2; t = 0.2m; \nu = 0.3$$

شكل م7–1: شريحة مثلثية ، المحاور الإحداثية ، الأبعاد والخواص الهندسية ،الحمولة

1–حساب انتقالات العقد.

2–حساب ردود الأفعال وتمثيلها على الشكل.

3– تحديد حالة التشوهات والإجهادات في العنصرين e_2, e_1 .

4– حساب الطاقة الكامنة للجملة.

الحل:

1– حساب انتقالات العقد:

حساب ثابت مصفوفة القساوة :

$$C = \frac{2.1\times10^7 \times 0.2}{1-0.09}\cdot\frac{1}{4\cdot\frac{1\times0.5}{2}} = 4615384.615$$

حساب مصفوفة القساوة:

العنصر e_1 :

نرقم عقد العنصر وفق الترتيب التالي:

(i)=(1) (j)=(2) (k)=(3)

فتكون فروقات إحداثيات العقد كما يلي:

$$x^1_{(i)(j)} = 0.5 \qquad x^2_{(i)(j)} = -0.5$$
$$x^1_{(j)(k)} = 0.5 \qquad x^2_{(j)(k)} = 0.5$$
$$x^1_{(k)(i)} = -1 \qquad x^2_{(k)(i)} = 0$$

وعليه تحسب مصفوفة القساوة للعنصر الأول بالشكل:

$$K_{e_1} = 4615384.615\begin{bmatrix} 0.3375 & -0.1625 & -0.175 & 0.15 & -0.1625 & 0.0125 \\ -0.1625 & 0.3375 & 0.175 & -0.5 & -0.0125 & 0.1625 \\ -0.175 & 0.175 & 0.35 & 0 & -0.175 & -0.175 \\ 0.15 & -0.5 & 0 & 1 & -0.15 & -0.5 \\ -0.1625 & -0.0125 & -0.175 & -0.15 & 0.3375 & 0.1625 \\ 0.0125 & 0.1625 & -0.175 & -0.5 & 0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix}$$

العنصر e_2:

وبشكل مماثل نحصل في العنصر الثاني على:

(i)=(3) (j)=(2) (k)=(4)

$$x^1_{(i)(j)} = -0.5 \qquad x^2_{(i)(j)} = -0.5$$
$$x^1_{(j)(k)} = 0.5 \qquad x^2_{(j)(k)} = -0.5$$
$$x^1_{(k)(i)} = 0 \qquad x^2_{(k)(i)} = 1$$

$$K_{e_2} = 4615384.615\begin{bmatrix} 0.3375 & 0.1625 & -0.5 & -0.175 & 0.1625 & 0.0125 \\ 0.1625 & 0.3375 & -0.15 & -0.175 & -0.0125 & -0.1625 \\ -0.5 & -0.15 & 1 & 0 & -0.5 & 0.15 \\ -0.175 & -0.175 & 0 & 0.35 & 0.175 & -0.175 \\ 0.1625 & -0.0125 & -0.5 & 0.175 & 0.3375 & -0.1625 \\ 0.0125 & -0.1625 & 0.15 & -0.175 & -0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix}$$

وبعد التجميع نحصل على جملة المعادلات الخطية:

$$4615384615\begin{bmatrix} 0.3375 & -0.1625 & -0.175 & 0.15 & -0.1625 & 0.0125 & 0 & 0 \\ -0.1625 & 0.3375 & 0.175 & -0.5 & -0.0125 & 0.1625 & 0 & 0 \\ -0.175 & 0.175 & 1.35 & 0 & -0.675 & -0.325 & -0.5 & 0.15 \\ 0.15 & -0.5 & 0 & 1.35 & -0.325 & -0.675 & 0.175 & -0.175 \\ -0.1625 & -0.0125 & -0.675 & -0.325 & 0.75 & 0.325 & 0.1625 & 0.0125 \\ 0.0125 & 0.1625 & -0.325 & -0.675 & 0.325 & 0.75 & -0.0125 & -0.1625 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.175 & 0.1625 & -0.0125 & 0.3375 & -0.1625 \\ 0 & 0 & 0.15 & -0.175 & 0.0125 & -0.1625 & -0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1(1)} \\ u_{2(1)} \\ u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \\ u_{1(3)} \\ u_{2(3)} \\ u_{1(4)} \\ u_{2(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}^{x^1}{}_{(1)} \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ \vec{F}^{x^1}{}_{(3)} \\ \vec{F}^{x^2}{}_{(3)} \\ \vec{F}^{x^1}{}_{(4)} \\ \vec{F}^{x^2}{}_{(4)} \end{bmatrix}$$

بتعويض الشروط الطرفية تتقلص جملة المعادلات الخطية لتصبح كما يلي :

$$4615384.615\begin{bmatrix} 0.3375 & 0.175 & -0.5 \\ 0.175 & 1.35 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{2(1)} \\ u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وتكون انتقالات العقد المجهولة بالشكل :

$$u_{2(1)} = \frac{771.4285}{4395604.396} = 1.67143 \times 10^{-4}$$

$$u_{1(2)} = \frac{-100}{4395604.396} = -2.16667 \times 10^{-5}$$

$$u_{2(2)} = \frac{285.714}{4395604.396} = 6.19048 \times 10^{-5}$$

2–حساب ردود الأفعال :

يتم حساب ردود الأفعال من جملة المعادلات العامة قبل تعويض الشروط الطرفية فيها وذلك بتعويض انتقالات العقد المحسوبة من الفقرة السابقة في المعادلات المذكورة فنحصل بعد حذف العمليات الصفرية على:

$$\begin{bmatrix} \overline{F}^{x^1}{}_{(1)} \\ \overline{F}^{x^1}{}_{(3)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(3)} \\ \overline{F}^{x^1}{}_{(4)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(4)} \end{bmatrix} = 4615384.615\begin{bmatrix} -0.1625 & -0175 & 0.15 \\ -0.0125 & -0.675 & -0.325 \\ 0.1625 & -0.325 & -0.675 \\ 0 & -0.5 & 0.175 \\ 0 & 0.15 & -0.175 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.67134 \times 10^{-4} \\ -2.16667 \times 10^{-5} \\ 6.19048 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -65 \\ -35 \\ -35 \\ 100 \\ -65 \end{bmatrix}$$

3– تحديد حالة التشوهات والإجهادات:

العنصر e_1 :

نحسب في البدء مشتقات الانتقالات :

$$u_{i,j}=\begin{bmatrix}0 & -2.16667\times10^{-5} & 0\\ 1.67142\times10^{-4} & 6.19048\times10^{-5} & 0\end{bmatrix}\frac{1}{2\frac{1\times0.5}{2}}\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ 0 & 1\\ -0.5 & -0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -4.33333\times10^{-5}\\ 1.67142\times10^{-4} & -4.33333\times10^{-5}\end{bmatrix}$$

ومن ثم نحسب التشوهات من علاقات التشوهات-الانتقالات :

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}0 & 6.19048\times10^{-5}\\ 6.19048\times10^{-5} & -4.33333\times10^{-5}\end{bmatrix}$$

وبعدئذ نحصل على الاجهادات من قانون السلوك :

$$\begin{bmatrix}\sigma^{11}\\ \sigma^{21}\\ \sigma^{12}\\ \sigma^{22}\end{bmatrix}=\frac{2.1\times10^{7}}{1-0.09}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.3\\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0\\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0\\ 0.3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 6.19048\times10^{-5}\\ 6.19048\times10^{-5}\\ -4.3333\times10^{-5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-300\\ 1000\\ 1000\\ -1000\end{bmatrix}$$

العنصر e_2 :

وبشكل مماثل نحصل في العنصر الثاني على :

$$u_{i,j}=\begin{bmatrix}0 & -2.16667\times10^{-5} & 0\\ 0 & 6.19048\times10^{-5} & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}-0.5 & -0.5\\ 1 & 0\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4.33333\times10^{-5} & 0\\ 1.23808\times10^{-4} & 0\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}-4.33333\times10^{-5} & 6.19048\times10^{-5}\\ 6.19048\times10^{-5} & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma^{11}\\ \sigma^{21}\\ \sigma^{12}\\ \sigma^{22}\end{bmatrix}=\frac{2.1\times10^{7}}{1-0.09}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.3\\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0\\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0\\ 0.3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4.33333\times10^{-5}\\ 6.19048\times10^{-5}\\ 6.19048\times10^{-5}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1000\\ 1000\\ 1000\\ -300\end{bmatrix}$$

5- حساب الطاقة الكامنة للجملة:

يمكن حساب الطاقة الكامنة للجملة من الصيغة التالية:

$$\pi=\sum_{e=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\cdot u_{i(p)}\cdot k^{i(p)k(q)}\cdot u_{k(q)}-\overline{F}^{i(p)}\cdot u_{i(p)}\right)$$

لكن لدينا وفق جملة المعادلات الخطية لانتقالات العقد :

$$\sum_{e=1}^{n} k^{i(p)k(q)} \cdot u_{i(p)} = \sum_{e=1}^{n} \overline{F}^{i(p)}$$

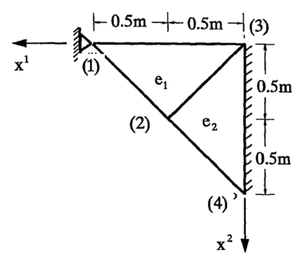
وبالتالي يمكن حساب الطاقة الكامنة للجملة كالتالي :

$$\pi = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{e=1}^{n} u_{i(p)} \cdot \overline{F}^{i(p)} = -\frac{1}{2} \times 1.67143 \times 10^{-4} \times 100 = -8.35715 \times 10^{-3} \quad \textbf{kN.m}$$

مثال 7-2 :

لدينا شريحة مثلثية قائمة أبعادها وخواصها الهندسية وطبيعة استنادها وتقسيمها إلى عناصر منتهية مبينة على الشكل م7-2 . بفرض أن الشريحة خضعت لتأثير تغيرات حرارية موزعة خطيا حيث كان تغير درجة الحرارة في العقدة(1) بمقدار $100°$ درجة مئوية وفي العقدتين (3)و(4) معدوم؛

المطلوب:



$$E = 2.1 \times 10^7 kN/m^2; t = 0.2m; \nu = 0.3; \alpha = 0.000012$$

شكل م7-2: شريحة مثلثية ، المحاورالإحداثية، الأبعاد والخواص الهندسية ، الحمولة الحرارية على العقد

1- إيجاد الحالة الانتقالية في الجملة.

2- إيجاد ردود الأفعال.

3- تحديد حالة التشوهات والحالة الاجهادية في العنصرين e_2, e_1 .

4- حساب الطاقة الكامنة للجملة

الحل:

في البدء يجب حساب الحمولات المركزة على العقد والمكافئة للحمل الحراري والمعطاة وفق العلاقة $\bar{f}^{i(q)} = c^{i(p)(q)}\Delta t_{(q)}$. باعتبار أن الخواص الهندسية للشريحة ثابتة نحسب في البدء الثابت الوارد في المصفوفة $C^{i(p)(q)}$ والمتساوي في كل عناصر الشريحة:

$$\frac{E\cdot\alpha\cdot t}{6(1-\nu)} = \frac{2.1\times10^{7}\times0.000012\times0.2}{6(1-0.3)} = 12$$

العنصر e_1 : باعتبار توزع الحقل الحراري خطي تكون قيم التغيرات الحرارية في عقد العنصر (1),(2),(3) هي على التوالي $\Delta t_{(1)} = 100°, \Delta t_{(2)} = 50°, \Delta t_{(3)} = 0$ وتكون الحمولات المركزة في عقد العنصر والمكافئة للحمولات الحرارية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \bar{f}^{x^1}_{(1)} \\ \bar{f}^{x^2}_{(1)} \\ \bar{f}^{x^1}_{(2)} \\ \bar{f}^{x^2}_{(2)} \\ \bar{f}^{x^1}_{(3)} \\ \bar{f}^{x^2}_{(3)} \end{bmatrix} = 12\times\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -900 \\ -900 \\ 0 \\ 1800 \\ -900 \\ -900 \end{bmatrix}$$

العنصر e_2 : هنا تكون قيم التغيرات الحرارية في عقد العنصر (4),(2),(3) هي على التوالي $\Delta t_{(3)} = 0°, \Delta t_{(2)} = 50°, \Delta t_{(4)} = 0$ وعليه تكون الحمولات المركزة في عقد العنصر والمكافئة للحمولات الحرارية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \bar{f}^{x^1}_{(3)} \\ \bar{f}^{x^2}_{(3)} \\ \bar{f}^{x^1}_{(2)} \\ \bar{f}^{x^2}_{(2)} \\ \bar{f}^{x^1}_{(4)} \\ \bar{f}^{x^2}_{(4)} \end{bmatrix} = 12\times\begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -300 \\ -300 \\ 600 \\ 0 \\ -300 \\ 300 \end{bmatrix}$$

وتصبح جملة المعادلات الخطية النهائية:

$$\begin{bmatrix} 0.3375 & -0.1625 & -0.175 & 0.15 & -0.1625 & 0.0125 & 0 & 0 \\ -0.1625 & 0.3375 & 0.175 & -0.5 & -0.0125 & 0.1625 & 0 & 0 \\ -0.175 & 0.175 & 1.35 & 0 & -0.675 & -0.325 & -0.5 & 0.15 \\ 0.15 & -0.5 & 0 & 1.35 & -0.325 & -0.675 & 0.175 & -0.175 \\ -0.1625 & -0.0125 & -0.675 & -0.325 & 0.75 & 0.325 & 0.1625 & 0.0125 \\ 0.0125 & 0.1625 & -0.325 & -0.675 & 0.325 & 0.75 & -0.0125 & -0.1625 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.175 & 0.1625 & -0.0125 & 0.3375 & -0.1625 \\ 0 & 0 & 0.15 & -0.175 & 0.0125 & -0.1625 & -0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1(1)} \\ u_{2(1)} \\ u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \\ u_{1(3)} \\ u_{2(3)} \\ u_{1(4)} \\ u_{2(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 \\ -900 \\ 600 \\ 1800 \\ -1200 \\ -1200 \\ -300 \\ 300 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{F}^{x^1}{}_{(1)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \overline{F}^{x^1}{}_{(3)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(3)} \\ \overline{F}^{x^1}{}_{(4)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(4)} \end{bmatrix}$$

$C = 4615384.615$

بعد تعويض الشروط الطرفية نحصل على جملة المعادلتين لحساب الانتقالات المجهولة:

$$C = \begin{bmatrix} 1.35 & 0 \\ 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 1800 \end{bmatrix}$$

بالحل ينتج :

$$\begin{bmatrix} u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.629629 \times 10^{-5} \\ 2.888889 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad \text{m}$$

أما بقية الانتقالات فهي معدومة .

المعادلات الستة المتبقية تحدد ردود الأفعال . بعد استبعاد العمليات الصفرية تحسب ردود الأفعال كالتالي :

$$\begin{bmatrix} \overline{F}^{x^1}{}_{(1)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(1)} \\ \overline{F}^{x^1}{}_{(3)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(3)} \\ \overline{F}^{x^1}{}_{(4)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(4)} \end{bmatrix} = \frac{c}{1.35} \cdot \begin{bmatrix} -0.175 & 0.15 \\ 0.175 & -0.5 \\ -0.675 & -0.325 \\ -0.325 & -0.675 \\ -0.5 & 0.175 \\ 0.15 & -0.175 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.3 \times 10^{-4} \\ 3.9 \times 10^{-4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 900 \\ -900 \\ -1200 \\ -1200 \\ -300 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -777.7778 \\ 311.1111 \\ 466.6667 \\ 155.5556 \\ 311.1111 \\ -466.6667 \end{bmatrix}$$

تحديد حالة التشوهات والحالة الإجهادية في العنصرين e_1, e_2 :

العنصر e_1 :

يتم حساب مشتقات الانتقالات بالطريقة العادية:

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 9.629629\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 2.888889\times10^{-4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2\cdot\frac{1\times0.5}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.9259258\times10^{-4} \\ 0 & 5.7777777\times10^{-4} \end{bmatrix}$$

والآن تحسب موترتا التشوهات الداخلية والمسبقة الناتجة عن التأثير الحراري وبعد ذلك تحسب الاجهادات من قانون السلوك المعطى لحالة التشوهات المسبقة

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 9.629629\times10^{-5} \\ 9.629629\times10^{-5} & 5.777777\times10^{-4} \end{bmatrix}; \bar{\varepsilon}_{ij} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 100N^{(1)} + 50N^{(2)} & 0 \\ 0 & 100N^{(1)} + 50N^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\sigma^{kl} = E^{ijkl}(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij})$$

$$E^{ijkl}\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \frac{2.1\times10^7}{1-0.09} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 9.629629\times10^{-5} \\ 9.629629\times10^{-5} \\ 5.777777\times10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 1555.556 \\ 1555.556 \\ 13333.333 \end{bmatrix}$$

العنصر e_2 :

وبشكل مماثل نحصل في العنصر الثاني على حالتي التشوهات والاجهادات التاليتين:

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 9.629629\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 2.888889\times10^{-4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 1 & 0 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.925925\times10^{-4} & 0 \\ 5.7777777\times10^{-4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 1.9259258\times10^{-4} & 2.8888889\times10^{-4} \\ 2.8888889\times10^{-4} & 0 \end{bmatrix}; \bar{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} 50N^{(2)} & 0 \\ 0 & 50N^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\sigma^{kl} = E^{ijkl}(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij})$$

$$E^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} = \frac{2.1\times10^7}{1-0.09} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.9259258\times10^{-4} \\ 2.8888889\times10^{-4} \\ 2.8888889\times10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4444.444 \\ 4666.667 \\ 4666.667 \\ 1333.333 \end{bmatrix}$$

نلاحظ هنا أن موترتا التشوهات والاجهادات ليستا ثابتين وإنما متعلقتان بالإحداثيات المستقلة وتوابع الشكل.

4- حساب الطاقة الكامنة:

تحسب الطاقة الكامنة في حالة وجود التشوه الحراري فقط من العلاقة التالية:

$$\pi = \sum_{e} \frac{1}{2} \cdot u_{i(p)} \cdot k^{i(p)k(q)} \cdot u_{k(q)} - u_{i(p)} \cdot c^{i(p)(q)} \Delta T_{(q)}$$

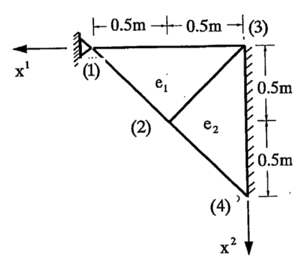
وتطبيق هذه العلاقة بالمعطيات الرقمية للمسألة بعد استبعاد العمليات الصفرية يؤدي إلى:

$$\pi = \frac{1}{2}[9.629629\times10^{-5} \cdot 2.888889\times10^{-4}] \cdot c \cdot \begin{bmatrix} 1.35 & 0 \\ 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9.629629\times10^{-5} \\ 2.888889\times10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$-[9.62929\times10^{-5} \cdot 2.888889\times10^{-4}] \cdot \begin{bmatrix} 600 \\ 1800 \end{bmatrix} = 0.2888888 - 0.5777777 = -0.2888888$$

مثال 7-3 :

لدينا شريحة مثلثية قائمة،أبعادها وخواصها الهندسية وطبيعة استنادها وتقسيمها إلى عناصر منتهية مبينة على الشكل م7-3.إذا هبط المسند(1)باتجاه x^2 بمقدار 0.167143 mm، المطلوب:



$E = 2.1\times10^{7} kN/m^2; t = 0.2m; \nu = 0.3$

شكل م7-3: شريحة مثلثية ، المحاور الإحداثية ، الأبعاد والخواص الهندسية ،هبوط المساند

1- إيجاد الحالة الانتقالية في الجملة.

2- إيجاد ردود الأفعال .

3- تحديد حالة التشوهات والحالة الإجهادية في العنصرين e_2, e_1 .

4- حساب الطاقة الكامنة للجملة.

الحل:

1- إيجاد الحالة الانتقالية في الجملة

وجدنا أن مصفوفة القساوة للعنصر الأول معطاة بالشكل :

$$k_{e^1} = 4615384.65 \times \begin{bmatrix} 0.3375 & -0.1625 & -0.175 & 0.15 & -0.1625 & 0.012 \\ -0.1625 & 0.3375 & 0.175 & -0.5 & -0.0125 & 0.1625 \\ -0.175 & 0.175 & 0.35 & 0 & -0.175 & -0.175 \\ 0.15 & -0.5 & 0 & 1 & -0.15 & -0.5 \\ -0.1625 & -0.0125 & -0.175 & -0.15 & 0.3375 & 0.1625 \\ 0.0125 & 0.1625 & -0.175 & -0.5 & 0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix}$$

وهي للعنصر الثاني كالتالي :

$$k_{e^2} = 4615384.61 \times \begin{bmatrix} 0.3375 & 0.1625 & -0.5 & -0.175 & 0.1625 & 0.012 \\ 0.1625 & 0.3375 & -0.15 & -0.175 & -0.0125 & -0.1625 \\ -0.5 & -0.15 & 1 & 0 & -0.5 & 0.15 \\ -0.175 & -0.175 & 0 & 0.35 & 0.175 & -0.175 \\ 0.1625 & -0.0125 & -0.5 & 0.175 & 0.3375 & -0.1625 \\ 0.0125 & -0.1625 & 0.15 & -0.175 & -0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix}$$

وتكون مصفوفة القساوة الكلية بالشكل :

$$K = 4615384.615 \times \begin{bmatrix} 0.3375 & -0.1625 & -0.175 & 0.15 & -0.1625 & 0.0125 & 0 & 0 \\ -0.1625 & 0.3375 & 0.175 & -0.5 & -0.0125 & 0.1625 & 0 & 0 \\ -0.175 & 0.175 & 1.35 & 0 & -0.675 & -0.325 & -0.5 & 0.15 \\ 0.15 & -0.5 & 0 & 1.35 & -0.325 & -0.675 & 0.175 & -0.175 \\ -0.1625 & -0.0125 & -0.675 & -0.325 & 0.75 & 0.325 & 0.1625 & 0.0125 \\ 0.0125 & 0.1625 & -0.325 & -0.675 & 0.325 & 0.75 & -0.0125 & -0.1625 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.175 & 0.1625 & -0.0125 & 0.3375 & -0.1625 \\ 0 & 0 & 0.15 & -0.175 & 0.0125 & -0.1625 & -0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix}$$

تجمع الانتقالات المسبقة الحاصلة في الجملة الإنشائية في شعاع الانتقالات المسبقة:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1(1)} \\ \bar{u}_{2(1)} \\ \bar{u}_{1(2)} \\ \bar{u}_{2(2)} \\ \bar{u}_{1(3)} \\ \bar{u}_{2(3)} \\ \bar{u}_{1(4)} \\ \bar{u}_{2(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.67143\times10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ويكون الطرف الثاني لجملة المعادلات الخطية مساوياً لحاصل ضرب مصفوفة القساوة الكليـــة في شعاع الانتقالات المسبقة:

$$k\bar{u} = 4615384.615 \times \begin{bmatrix} -2.71607\times10^{-5} \\ 5.64108\times10^{-5} \\ 2.925\times10^{-5} \\ -8.35715\times10^{-5} \\ -2.08929\times10^{-6} \\ 2.716074\times10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وتصبح جملة المعادلات الخطية كمايلي:

$$C\begin{bmatrix} 0.3375 & -0.1625 & -0.175 & 0.15 & -0.1625 & 0.0125 & 0 & 0 \\ -0.1625 & 0.3375 & 0.175 & -0.5 & -0.0125 & 0.1625 & 0 & 0 \\ -0.175 & 0.175 & 1.35 & 0 & -0.675 & -0.325 & -0.5 & 0.15 \\ 0.15 & -0.5 & 0 & 1.35 & -0.325 & 0.675 & 0.175 & -0.175 \\ -0.1625 & -0.0125 & -0.675 & -0.325 & 0.75 & 0.325 & 0.1625 & 0.0125 \\ 0.0125 & 0.1625 & -0.325 & -0.675 & 0.325 & 0.75 & -0.0125 & -0.1625 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.175 & 0.1625 & -0.0125 & 0.3375 & -0.1625 \\ 0 & 0 & 0.15 & -0.175 & 0.0125 & -0.1625 & -0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_{1(1)} \\ u_{2(1)} \\ u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \\ u_{1(3)} \\ u_{2(3)} \\ u_{1(4)} \\ u_{2(4)} \end{bmatrix} =$$

$$-C.\begin{bmatrix} -2.71607\times10^{-5} \\ 5.64108\times10^{-5} \\ 2.925\times10^{-5} \\ -8.35715\times10^{-5} \\ -2.08929\times10^{-6} \\ 2.716074\times10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{F}^{x^1}{}_{(1)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \overline{F}^{x^1}{}_{(3)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(3)} \\ \overline{F}^{x^1}{}_{(4)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(4)} \end{bmatrix}$$

تقلص الشروط الطرفية جملة المعادلات السابقة إلى معادلتين بمجهولين نحصل بحلهما على المجهولين المطلوبين:

$$C.\begin{bmatrix} 1.35 & 0 \\ 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \end{bmatrix} = -C.\begin{bmatrix} 2.925\times10^{-5} \\ -8.35715\times10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.16667\times10^{-5} \\ 6.19048\times10^{-5} \end{bmatrix}$$

2- حساب ردود الأفعال:

بعد اختصار العمليات الصفرية تحسب ردود الأفعال من جملة المعادلات الخطية بعـــد تعويـــض الانتقالات المجهولة فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} \overline{F}^{x^1}{}_{(1)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(2)} \\ \overline{F}^{x^1}{}_{(3)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(3)} \\ \overline{F}^{x^1}{}_{(4)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(4)} \end{bmatrix} = C.\begin{bmatrix} -0.1625 & -0175 & 0.15 \\ 0.3375 & 0.175 & -0.5 \\ -0.0125 & -0.675 & -0.325 \\ 0.1625 & -0.325 & -0.675 \\ 0 & -0.5 & 0.175 \\ 0 & 0.15 & -0.175 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.16667\times10^{-5} \\ 6.19048\times10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$+C.\begin{bmatrix} -2.71607\times10^{-5} \\ 5.64108\times10^{-5} \\ -2.08929\times10^{-6} \\ 2.716074\times10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -65 \\ 100 \\ -35 \\ -35 \\ 100 \\ -65 \end{bmatrix}$$

3- حالة التشوهات والإجهادات:

العنصر e_1 :تعطى حالة تشوهات وإجهادات العنصر الأول بالشكل :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 6.19048\times10^{-5} \\ 6.19048\times10^{-5} & -4.33333\times10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{21} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -300 \\ 1000 \\ 1000 \\ -1000 \end{bmatrix}$$

العنصر e_2 :و حالة تشوهات وإجهادات العنصر الثاني بالشكل

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -4.33333\times10^{-5} & 6.19048\times10^{-5} \\ 6.19048\times10^{-5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{21} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ -300 \end{bmatrix}$$

4- حساب الطاقة الكامنة للجملة:

تحسب الطاقة الكامنة في حالة وجود هبوط المساند فقط من العلاقة التالية:

$$= \pi = \sum_{e=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot u_{i(p)} \cdot k^{i(p)k(q)} \cdot u_{k(q)} + u_{i(p)} \cdot k^{i(p)k(q)} \cdot \bar{u}_{k(q)}$$

وتطبيق هذه العلاقة بالمعطيات الرقمية للمسألة بعد استبعاد العمليات الصفرية يؤدي إلى:

$$\pi = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2.16667\times10^{-5} & 6.19048\times10^{-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3375 & 0.175 & -0.5 \\ 0.175 & 1.35 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2.16667\times10^{-5} \\ 6.19048\times10^{-5} \end{bmatrix}$$

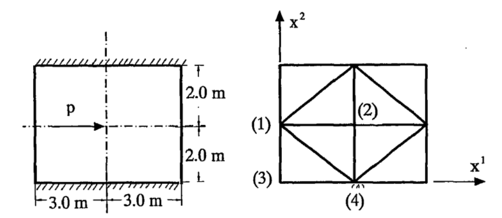
$$+\begin{bmatrix} 0 & -2.1667\times10^{-5} & 6.19048\times10^{-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3375 & 0.175 & -0.5 \\ 0.175 & 1.35 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.67143\times10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 8.35715\times10^{-3}\,\text{KN.m}$$

وفيما يلي ستدرس بعض الأمثلة العددية الممكن حلها يدوياً بالاعتماد على خواص التناظر والتناظر العكسي.

مثال7-4:

لدينا شريحة مستطيلة مستوية موثوقة من الطرفين وحرة في الطرفين الآخرين وأبعادها وخواصها الهندسية كما يبين الشكل م7-4.تخضع الشريحة في مركزها لقوة أفقية والمطلوب:إيجاد انتقـــالات العقد الناتجة عن التقسيم الشبكي المبين عليها.



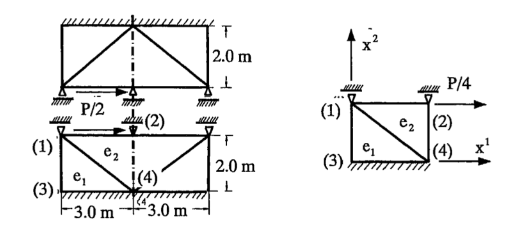
$$E = 2.1\times10^7 \ \ kN/m^2; \nu = 0.3$$
$$t = 0.10\,m \ \ p = 1000\,kN$$

شكل م7-4-1: المنشأ ،والخواص الهندسية والتقسيم إلى عناصر منتهية

الحل:

باعتبار أن القوة الأفقية ستولد في حالتنا هذه انتقالا أفقيا فقط فيمكن دراسة نصـــف الشـــريحة خاضعا لنصف القوة ونعتبر الطرف المقتطع بالتناظر مستندا استنادا بسيطا في الاتجاه الشاقولي لمنـــع حركته في ذلك الاتجاه.

ومن ثم نعمد إلى دراسة ربع الشريحة خاضعة لقوة مقدارها ربع القوة الأساسية والشكل أعـــلاه يبين الخطوات المتخذة لتبسيط دراسة الشريحة الأساسية، بالإضافة إلى نسب العناصر إلى المحـــاور الإحداثية وترقيم العقد.



شكل م7-4-2: التناظروفق خط القوة ، ربع الشريحة المدروس

يمكن الآن البدء بتشكيل مصفوفات القساوة للعناصر.فللعنصر e_1 نحصل باعتبار الخواص الهندسـية السابقة وباعتبار $(i)=(3)$, $(j)=(4)$, $(k)=(1)$ على :

$$k_{(e_1)}^{i(p)k(q)} = 192307.7 \times \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \\ 3.15 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

وللعنصر e_2 باعتبار $(i) \equiv (4), (j) \equiv (2), (k) \equiv (1)$ على:

$$k_{(e_2)} = 192307.7 \times \begin{bmatrix} 7.15 & 3.9 & -4 & -2.1 \\ 3.9 & 10.4 & -1.8 & -1.4 \\ -4 & -1.8 & 4 & 0 \\ -2.1 & -1.4 & 0 & 1.4 \end{bmatrix}$$

وجملة المعادلات الجبرية الخطية النهائية لانتقالات العقد تصبح من الشكل:

$$192307.7 \times \begin{bmatrix} 7.15 & 3.9 & -4 & -2.1 & * & * & * & * \\ 3.9 & 10.4 & -1.8 & -1.4 & & & & \\ -4 & -1.8 & 7.15 & 0 & & & & \\ -2.1 & -1.4 & 0 & 10.4 & & & & \\ * & & & & & & & \\ * & & & & & & & \\ * & & & & & & & \\ * & & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^1(1)} \\ u_{x^2(1)} \\ u_{x^1(2)} \\ u_{x^2(2)} \\ u_{x^1(3)} \\ u_{x^2(3)} \\ u_{x^1(4)} \\ u_{x^2(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \overline{F}^{x^1}{}_{(3)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(3)} \\ \overline{F}^{x^1}{}_{(4)} \\ \overline{F}^{x^2}{}_{(4)} \end{bmatrix}$$

حيث تشير $\overline{F}^{x^1}{}_{(3)}, \overline{F}^{x^2}{}_{(3)}, \overline{F}^{x^1}{}_{(4)}, \overline{F}^{x^2}{}_{(4)}$ إلى ردود الأفعال المتولدة من العقدتـــين (3),(4) على التوالي.بعد تعويض الشروط الطرفية للانتقالات والتي تقتضي أن يكون :

$u_{x^1(3)} = u_{x^2(3)} = u_{x^1(4)} = u_{x^2(4)} = 0$

وذلك بحذف الأسطر والأعمدة الموافقة لتلك الانتقالات (والمشار إليها بنجمة) من جملة المعادلات أو بإضافة أعداد قيمها كبيرة جدا إلى عناصر القطر الرئيسي الموافقة لتلك الانتقالات في مصفوفـــة القساوة العامة،تتقلص جملة المعادلات النهائية إلى التالية:

$$192307.7 \times \begin{bmatrix} 7.15 & 3.9 & -4 & -2.1 \\ 3.9 & 10.4 & -1.8 & -1.4 \\ -4 & -1.8 & 7.15 & 0 \\ -2.1 & -1.4 & 0 & 10.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^1(1)} \\ u_{x^2(1)} \\ u_{x^1(2)} \\ u_{x^2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بالإضافة إلى التبسيطات السابقة يمكن استخدام خاصية التناظر أيضا لتبسيط جملة المعادلات السابقة فتناظر الجملة حول محور أفقي مار بالقوة الخارجية يقتضي بأن يكون :

$$u_{x^2(1)} = u_{x^2(2)} = 0$$

وبحذف الأسطر والأعمدة الموافقة لتلك الانتقالات من جملة المعادلات الأخيرة نحصل على:

$$192307.7 \times \begin{bmatrix} 7.15 & -4 \\ -4 & 7.15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^1(1)} \\ u_{x^1(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \end{bmatrix}$$

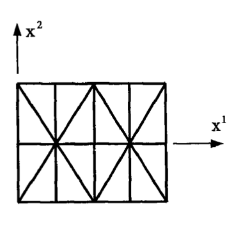
وعليه تكون انتقالات العقدتين (1) , (2):

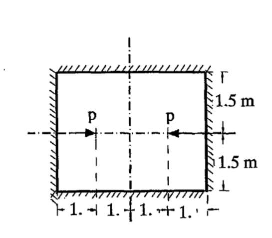
$$u_{x^1(1)} = 2.6464516 \times 10^{-4}\, m$$

$$u_{x^1(2)} = 1.480532 \times 10^{-4}\, m$$

مثال7-5:

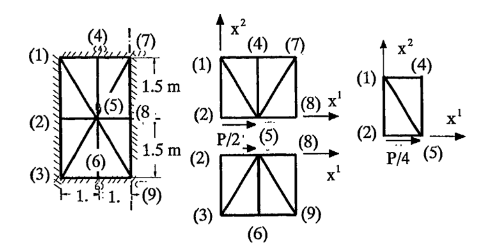
لدينا شريحة مستطيلة موثوقة من جميع أطرافها ومعرضة في مستويها لقوتين مركزتين مبينتين إلى جانب الخواص الهندسية لها في الشكل م 7-5-1 .قسمت الشريحة إلى عناصر منتهية كما يبين الشكل م7-5-2. والمطلوب:إيجاد قوى المقطع في العنصرين (1),(2) من الشريحة.





$$P = 50\,kN ; E = 2.1 \times 10^8\, kN/m^2 ; \nu = 0.3 ; t = 1cm$$

شكل م 7-5-2 :التقسيم إلى عناصر منتهية.　　　شكل م 7-5-1 :المنشأ والخواص الهندسية.



شكل م7-5-4 دراسة ربع الشريحة.   شكل م7-5-3 تقسيم نصف الشريحة إلى جزأين.

الحل:

باعتبار أن الشريحة معرضة لقوى أفقية فقط وبتناظر مزدوج حول المحورين x^1 والمحور 987 الموازي لـ x^2 لشكل الشريحة وحالة التحميل وعليه تكون الانتقالات الشاقولية لكل العقد صفرية.

بالإضافة إلى ذلك وباعتبار العقدة 8 هي مركز التناظر المزدوج يكون الانتقال الأفقي للعقدة 8 معدوما.وبالتالي يمكن الاكتفاء بدراسة نصف الشريحة المبين في الشكل م 7-5-3 تحت تأثير القوة p . ونصف الشريحة هذا يمكن تقسيمه إلى جزأين تحت تأثير قوة مقدارها $P/2$ لتناظره حول المحور x^1 شكل م 7-5-3 .ونصف نصف الشريحة متناظر هندسيا حول محور مار في العقدتين (7)(8,) ولذلك يكتفى بدراسة نصفه أيضا تحت تأثير قوة مقدارها $P/4$ كما يبين الشكل م 7-5-4.

يمكن الآن البدء بحساب مصفوفة القساوة للعناصر وتشكيل جملة المعادلات الخطية الجبرية لانتقالات العقد.

فللعنصر e_1 وباعتبار $(i)=(1),(j)=(2),(k)=(5)$ تكون مصفوفة القساوة كالتالي:

$$k_{(e_1)}^{i(p)k(q)} = 769230.7 \times \begin{bmatrix} 0.35 & 0 & -0.35 & -0.525 & 0 & 0.525 \\ 0 & 1 & -0.45 & -1 & 0.45 & 0 \\ -0.35 & -0.45 & 2.6 & 0.975 & -2.25 & -0.525 \\ -0.525 & -1 & 0.975 & 1.7875 & -0.45 & -0.7875 \\ 0 & 0.45 & -2.25 & -0.45 & 2.25 & 0 \\ 0.525 & 0 & -0.525 & -0.7875 & 0 & 0.7875 \end{bmatrix}$$

وللعنصر e_2 باعتبار $(i)=(4),\ (j)=(1),\ (k)=(5)$ تكون مصفوفة القساوة كالتالي:

$$k_{(e_2)}^{i(p)k(q)} = 769230.77 \times \begin{bmatrix} 2.6 & 0.975 & -2.25 & -0.525 & -0.35 & -0.45 \\ 0.975 & 1.7875 & -0.45 & -0.7875 & -0.525 & -1 \\ -2.25 & -0.45 & 2.25 & 0 & 0 & 0.45 \\ -0.525 & -0.7875 & 0 & 0.7875 & 0.525 & 0 \\ -0.35 & -0.525 & 0 & 0.525 & 0.35 & 0 \\ -0.45 & -1 & 0.45 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبعد حذف المساند وإبدالها بقوى ردود الأفعال وهي في هذه الحالة قوتين في العقد الموثوقة $(1),(2),(4)$ قوة في اتجاه x^1 هي $\overline{F}^{x^1}$ وقوة في اتجاه x^2 وهي $\overline{F}^{x^2}$ نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{matrix} & * & * & * & * & * & * & & \end{matrix}$$

$$769230.77 \times \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2.6 & 0 & -0.35 & -0.525 & -2.25 & -0.45 & 0 & 0.975 \\ 0 & 1.7875 & -0.45 & -1 & -0.525 & -0.7875 & 0.975 & 0 \\ -0.35 & -0.45 & 2.6 & 0.975 & 0 & 0 & -2.25 & -0.525 \\ -0.525 & -1 & 0.975 & 1.7875 & 0 & 0 & -0.45 & -0.7875 \\ -2.25 & -0.525 & 0 & 0 & 2.6 & 0.975 & -0.35 & -0.45 \\ -0.45 & -0.7875 & 0 & 0 & 0.975 & 1.7875 & -0.525 & -1 \\ 0 & 0.975 & -2.25 & -0.45 & -0.35 & -0.525 & 2.6 & 0 \\ 0.975 & 0 & -0.525 & -0.7875 & -0.45 & -1 & 0 & 1.7875 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_{x^1(1)} \\ u_{x^2(1)} \\ u_{x^1(2)} \\ u_{x^2(2)} \\ u_{x^1(4)} \\ u_{x^2(4)} \\ u_{x^1(5)} \\ u_{x^2(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{F}^{x^1}_{(1)} \\ \overline{F}^{x^2}_{(1)} \\ \overline{F}^{x^1}_{(2)} \\ \overline{F}^{x^2}_{(2)} \\ \overline{F}^{x^1}_{(4)} \\ \overline{F}^{x^2}_{(4)} \\ 12.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباعتبار أن $0 = u_{x^2(4)} = u_{x^1(4)} = u_{x^2(2)} = u_{x^1(2)} = u_{x^2(1)} = u_{x^1(1)}$ فيمكن حذف الأسطر والأعمدة الموافقة لهذه الانتقالات من الجملة وقد أشير لها بنجمة ويتبقى لدينا المعادلتين التاليتين:

$$769230.77 \times \begin{bmatrix} 2.6 & 0 \\ 0 & 1.7875 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_{x^1(5)} \\ u_{x^2(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه ينتج أن الانتقالين المجهولين للعقدة (5) هما:

$$u_{x^1(5)} = 6.25\times10^{-6}\,m \qquad ,u_{x^1(5)} = 0$$

تستخدم الأسطر المحذوفة لحساب قيم ردود الأفعال فبتعويض شعاع الانتقالات الكلي الوارد في جملة المعادلات الخطية بقيمه التي أصبحت كلها معلومة نحصل على الترتيب على ردود الأفعال التالية:

$$\overline{F}^{x^1}{}_{(1)} = 0$$

$$\overline{F}^{x^2}{}_{(1)} = 4.6875$$

$$\overline{F}^{x^1}{}_{(2)} = -10.8173077$$

$$\overline{F}^{x^2}{}_{(2)} = -2.163461541$$

$$\overline{F}^{x^1}{}_{(4)} = -1.682692309$$

$$\overline{F}^{x^2}{}_{(4)} = -2.524038464$$

وهذه ناتجة من ضرب العمود الخامس لجملة المعادلات النهائية السابقة بقيمة الانتقال $u_{x^1(5)}$ وذلك لأن بقية الانتقالات الأخرى كلها صفرية.ويلاحظ أن جملة القوى المحسوبة هذه متوازنة.فمجموع قوى ردود الأفعال الشاقولية يساوي الصفر،ومجموع قوى ردود الأفعال الأفقية والقوة الخارجية $P/4$ مساو للصفر أيضاً .

لحساب قوى المقطع نبدأ بحساب التشوهات على مستوى العنصر

ونستخدم لذلك العلاقة :

$$u_{i,j} = N^{(p)}{}_{,j} \cdot u_{i(p)}$$

فللعنصر الأول حيث أخذ ترتيب العقد بالشكل (1)=(i), (2)=(j), (5)=(k) يكون:

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} u_{x^1(1)} & u_{x^1(2)} & u_{x^1(5)} \\ u_{x^2(1)} & u_{x^2(2)} & u_{x^2(5)} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A} \cdot \begin{bmatrix} x^2{}_{(j)(k)} & x^1{}_{(k)(j)} \\ x^2{}_{(k)(i)} & x^1{}_{(i)(k)} \\ x^2{}_{(i)(j)} & x^1{}_{(j)(k)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 6.25\times10^{-6}\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{1.5}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\-1.5 & -1\\1.5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.25\times10^{-6} & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}6.25\times10^{-6} & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

وبعدها يمكن حساب الإجهادات بالعلاقة :

$$\sigma^{ij}=c^{ijkl}\cdot\varepsilon_{kl}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma^{x^1x^1}\\\sigma^{x^2x^1}\\\sigma^{x^1x^2}\\\sigma^{x^2x^2}\end{bmatrix}=230769230.8\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.3\\0 & 0.35 & 0.35 & 0\\0 & 0.35 & 0.35 & 0\\0.3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6.25\times10^{-6}\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1442.31\\0\\0\\432.7\end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون قوى المقطع على الشكل:

$$n^{ij}=t\cdot\sigma^{ij}\equiv\begin{bmatrix}n^{x^1x^1}\\n^{x^2x^1}\\n^{x^1x^2}\\n^{x^2x^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14.42\\0\\0\\4.33\end{bmatrix}kn/m$$

أما في العنصر الثاني حيث (4)=(i), (1)=(j), (5)=(k) فتكون موترة التشوهات كالتالي:

$$u_{i,j}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 6.25\times10^{-6}\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{1.5}\begin{bmatrix}1.5 & 1\\-1.5 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4.167\times10^{-6}\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}0 & 2.083\times10^{-6}\\2.083\times10^{-6} & \end{bmatrix}$$

وعليه تكون الإجهادات في العنصر الثاني على الشكل:

$$\begin{bmatrix}\sigma^{x^1x^1}\\\sigma^{x^2x^1}\\\sigma^{x^1x^2}\\\sigma^{x^2x^2}\end{bmatrix}=23076230.8\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.3\\0 & 0.35 & 0.35 & 0\\0 & 0.35 & 0.35 & 0\\0.3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\2.083\times10^{-6}\\2.083\times10^{-6}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\336.54\\336.54\\0\end{bmatrix}$$

وقوى المقطع كالتالي:

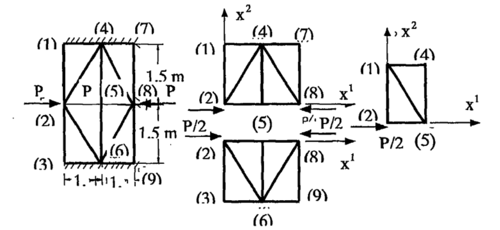
$$\begin{bmatrix} n^{x^1x^1} \\ n^{x^2x^1} \\ n^{x^1x^2} \\ n^{x^2x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.3654 \\ 3.3654 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال7–6:

لدينا الشريحة ذات الخواص الهندسية المبينة على

الشكل م–7–6–1،تتعرض لحمولة مقدارها p

في كل من عقدتيها (2),(8) والمطلوب:



$$E = 2.1\times10^7 \ kN/m^2; \nu = 0.3; t = 0.10\,m \quad p = 50\,kN$$

شكل م7–6–2: استخدام التناظر   شكل م7–6–1: المنشأ ،والخواص الهندسية

1– حساب الانتقالات في العقدتين (2),(5) من الشريحة.

2– حساب ردود الأفعال في العقدتين (1),(4) .

3– حساب التشوهات وقوى المقطع في العنصر e_1 .

الحل:

كالعادة نبدأ بحساب مصفوفات القساوة للعناصر.

مصفوفة القساوة للعنصر e_1 :

$$c=\frac{E.t}{1-\vartheta^2}\cdot\frac{1}{4A}=\frac{2.1\times10^7\times0.1}{1-0.09}\cdot\frac{1}{4\cdot\frac{1.5\times1}{2}}=769230.77$$

$$k_{e_1}^{i(p)k(q)}=769230.77\times\begin{bmatrix}2.6 & -0.975 & -0.35 & 0.45 & -2.25 & 0.525\\ -0.975 & 1.7875 & 0.525 & -1 & 0.45 & -0.7875\\ -0.35 & 0.525 & 0.35 & 0 & 0 & -0.525\\ 0.45 & -1 & 0 & 1 & -0.45 & 0\\ -2.25 & 0.45 & 0 & -0.45 & 2.25 & 0\\ 0.525 & -0.7875 & -0.525 & 0 & 0 & 0.7875\end{bmatrix}$$

مصفوفة القساوة للعنصر e_2 :

$$k_{e_2}^{i(p)k(q)}=769230.77\times\begin{bmatrix}2.25 & 0 & -2.25 & 0.45 & 0 & -0.45\\ 0 & 0.7875 & 0.525 & -0.7875 & -0525 & 0\\ -2.25 & 0.525 & 2.6 & -0.975 & -0.35 & 0.45\\ 0.45 & -0.7875 & -0.975 & 1.7875 & 0.525 & -1\\ 0 & -0.525 & -0.35 & 0.525 & 0.35 & 0\\ -0.45 & 0 & 0.45 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

جملة المعادلات الخطية الكلية لانتقالات العقد:

$$769230.77\times\begin{bmatrix}2.6 & -0.975 & -0.35 & 0.45 & -2.25 & 0.52 & 0 & 0\\ -0.975 & 1.7875 & 0.525 & -1 & 0.45 & -0.7875 & 0 & 0\\ -0.35 & 0.525 & 2.6 & 0 & 0 & -0.975 & -2.25 & 0.45\\ 0.45 & -1 & 0 & 1.7875 & -0.975 & 0 & 0.525 & -0.7875\\ -2.25 & 0.45 & 0 & -0.975 & 2.6 & 0 & -0.35 & 0.525\\ 0.525 & -0.7875 & -0.975 & 0 & 0 & 1.7875 & 0.45 & -1\\ 0 & 0 & -2.25 & 0.525 & -0.35 & 0.45 & 2.6 & -0.975\\ 0 & 0 & 0.45 & -0.7875 & 0.525 & -1 & -0.975 & 1.7875\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{x^1(1)}\\ u_{x^2(1)}\\ u_{x^1(2)}\\ u_{x^2(2)}\\ u_{x^1(4)}\\ u_{x^2(4)}\\ u_{x^1(5)}\\ u_{x^2(5)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{F}_{(1)}^{x^1}\\ \bar{F}_{(1)}^{x^2}\\ P/2\\ 0\\ \bar{F}_{(4)}^{x^1}\\ \bar{F}_{(4)}^{x^2}\\ \bar{F}_{(5)}^{x^1}\\ \bar{F}_{(5)}^{x^2}\end{bmatrix}.$$

جملة المعادلات الخطية لانتقالات العقد بعد تعويض الشروط الطرفية:

$$769230.77\times\begin{bmatrix}2.6 & 0\\ 0 & 1.7875\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{x^1(2)}\\ u_{x^2(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\ 0\end{bmatrix}$$

وتكون الانتقالات المجهولة للعقد:

$$u_{x^1(2)}=1.25\times10^{-5}\,m$$

$$u_{x^2(2)}=0$$

أما ردود الأفعال فتحسب بالشكل:

$$769230.77\times\begin{bmatrix}-0.35\\ 0.525\\ 0\\ -0.975\\ -2.25\\ 0.45\end{bmatrix}\times1.25\times10^{-5}=\begin{bmatrix}-3.365\\ 5.048\\ 0\\ -9.375\\ -21.635\\ 4.327\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{F}_{(1)}{}^{x^1}\\ \overline{F}_{(1)}{}^{x^2}\\ \overline{F}_{(4)}{}^{x^1}\\ \overline{F}_{(4)}{}^{x^2}\\ \overline{F}_{(5)}{}^{x^1}\\ \overline{F}_{(5)}{}^{x^2}\end{bmatrix}$$

حساب قوى المقطع:

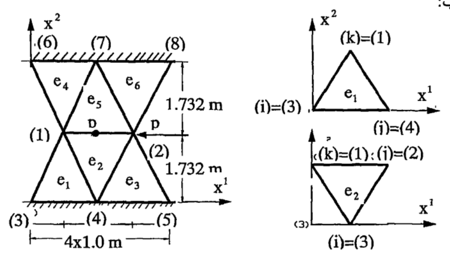
$$u_{i,j}=\begin{bmatrix}0 & 1.25\times10^{-5} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1.5 & 1\\ 0 & -1\\ 1.5 & 0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{1.5\times1}=\begin{bmatrix}0 & -8.33\times10^{-6}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma^{x^1x^1}\\ \sigma^{x^2x^1}\\ \sigma^{x^1x^2}\\ \sigma^{x^2x^2}\end{bmatrix}=230769230.8\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.3\\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0\\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0\\ 0.3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ -0.4166\times10^{-6}\\ -0.4166\times10^{-6}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -67.31\\ -67.31\\ 0\end{bmatrix}$$

$$n^{ij}=t\cdot\sigma^{ij}=\begin{bmatrix}n^{x^1x^1}\\ n^{x^2x1}\\ n^{x^1x^2}\\ n^{x^2x^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -6.731\\ -6.731\\ 0\end{bmatrix}KN/m$$

مثال7-7:

شريحة مستوية أبعادها وخواصها الهندسية وتقسيمها إلى عناصر منتهية مبينة على الشـكل م7-7. تخضع الشريحة لقوة مركزة F مقدارها 100 KN . فإذا نسبت الشريحة إلى جملة محاور إحداثيـة المطلوب:



$$E = 2.1\times10^6 \ kN/m^2; \nu = 0.3333 \ ; \ t = 0.010 m \quad p = 100 \ kN$$

شكل م7-7: المنشأ ،والخواص الهندسية

1- حساب انتقالات العقدتين(1) ,(2) .

2- حساب الانتقال في النقطة $p(2,\sqrt{3})$

المبينة على الشكل.

3- تحديد حالة التشوهات والحالة الإجهادية

في العنصر e_2 .

الحل:

- حساب مصفوفات القساوة :

العنصر e_1:

$$c=\frac{2.0\times10^{6}\times0.01}{1-0.1111}\cdot\frac{1}{4\cdot\sqrt{3}}=3247.6$$

$x^1_{(i)(j)}=-2$ $\quad$ $x^2_{(i)(j)}=0$

$x^1_{(j)(k)}=+1$ $\quad$ $x^2_{(j)(k)}=-\sqrt{3}$

$x^1_{(k)(i)}=+1$ $\quad$ $x^2_{(k)(i)}=\sqrt{3}$

$$k_{e_1}=3247.6\times\begin{bmatrix}3.333 & 1.1547 & -2.666 & 0 & -0.66 & -1.1547\\ 1.1547 & 2 & 0 & 0 & -1.1547 & -2\\ -2.666 & 0 & 3.333 & -1.1547 & -0.666 & 0.666\\ 0 & 0 & -1.1547 & 2 & 1.1547 & -2\\ -0.666 & -1.1547 & -0.666 & 1.1547 & 1.333 & 0\\ -1.1547 & -2 & 0.666 & -2 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

العنصر e_2:

(i)=(4) $\quad$ (j)=(2) $\quad$ (k)=(1)

$x^1_{(i)(j)}=-1$ $\quad$ $x^2_{(i)(j)}=-\sqrt{3}$

$x^1_{(j)(k)}=2$ $\quad$ $x^2_{(j)(k)}=0$

$x^1_{(k)(i)}=-1$ $\quad$ $x^2_{(k)(i)}=\sqrt{3}$

$$k_{e_2}=3247.6\times\begin{bmatrix}1.3333 & 0 & -0.6666 & -1.1547 & -0.666 & 1.1547\\ 0 & 4 & -1.1547 & -2 & 1.1547 & -2\\ -0.666 & -1.1547 & 3.333 & 1.1547 & -2.66 & 0\\ -1.1547 & -2 & 1.1547 & 2 & 0 & 0\\ -0.666 & 1.1547 & -2.666 & 0 & 3.333 & -1.1547\\ 1.1547 & -2 & 0 & 0 & -1.1547 & 2\end{bmatrix}$$

مصفوفة القساوة للعنصرين e_3 و e_5 كتلك التي للعنصر e_1 . ومصفوفة القساوة للعنصريــن e_4 و e_6 كتلك التي للعنصر e_2 :

$$k^{11}_{e_5} \equiv k^{33}_{e_1} \qquad k^{22}_{e_3} \equiv k^{11}_{e_1}$$
$$k^{11}_{e_4} \equiv k^{44}_{e_2} \quad ; \quad k^{22}_{e_6} \equiv k^{44}_{e_2}$$
$$k^{12}_{e_5} \equiv k^{34}_{e_1} \qquad k^{22}_{e_5} \equiv k^{44}_{e_1}$$

وتكون جملة المعادلات بعد تعويض الشروط الطرفية :

$$c\cdot\begin{bmatrix} k^{11}_{e_1}+k^{11}_{e_2}+k^{11}_{e_5}+k^{11}_{e_4} & k^{12}_{e_2}+k^{12}_{e_5} \\ k^{21}_{e_2}+k^{21}_{e_5} & k^{22}_{e_2}+k^{22}_{e_3}+k^{22}_{e_6}+k^{22}_{e_5} \end{bmatrix} =$$

$$c.\begin{bmatrix} 9.333 & 0 & -5.333 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ -5.333 & 0 & 9.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^1(1)} \\ u_{x^2(1)} \\ u_{x^1(2)} \\ u_{x^2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_{x^2(1)} = 0$$
$$u_{x^2(2)} = 0$$

$$u_{x^1(1)} = -\frac{100}{11.c} = -\frac{100}{11\times 3247.6} = -2.79927\times 10^{-3}\,m$$
$$u_{x^1(2)} = -\frac{175}{11\cdot c} = -\frac{175}{11\times 3247.6} = -4.89872\times 10^{-3}\,m$$

حساب انتقالات النقطة p : $(i)=(4)$,$(j)=(2)$,$(k)=(1)$

تحسب انتقالات النقطة p من علاقة الانتقالات ضمن العنصر المنتهي بتعويض إحداثيات النقطــة p في العلاقة المذكورة.

$$2A_{(i)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} \\ 1 & 3 & \sqrt{3} \\ 1 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$$

$$2A_{(j)}=\begin{vmatrix}1 & 2 & \sqrt{3}\\ 1 & 1 & \sqrt{3}\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=\sqrt{3}$$

$$2A_{(k)}=\begin{vmatrix}1 & 2 & \sqrt{3}\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & \sqrt{3}\end{vmatrix}=\sqrt{3} \quad ; \quad 2A=2\sqrt{3}$$

$$u_i = N^{(p)}\cdot u_{i(p)}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ -2.79927\times10^{-3}\\ -4.89872\times10^{-3}\end{bmatrix}=-3.849\times10^{-3}$$

حساب التشوهات والإجهادات في العنصر e_2 : (i)=(4) ,(j)=(2), (k)=(1)

$$u_{i,j}=u_{i(p)}\cdot N^{(p)}{}_{,j}$$

$$=\begin{bmatrix}u_{x^1(i)} & u_{x^1(j)} & u_{x^1(k)}\\ u_{x^2(i)} & u_{x^2(j)} & u_{x^2(k)}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2A}\cdot\begin{bmatrix}x^2{}_{(j)(k)} & x^1{}_{(k)(j)}\\ x^2{}_{(k)(i)} & x^1{}_{(i)(k)}\\ x^2{}_{(i)(j)} & x^1{}_{(j)(i)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -4.89872\times10^{-3} & -2.79927\times10^{-3}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -2\\ \sqrt{3} & 1\\ -\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

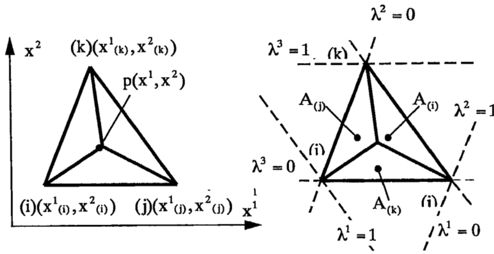
$$\begin{bmatrix}-1.049725\times10^{-3} & -2.22222\times10^{-3}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{x^1x^1} & \varepsilon_{x^1x^2}\\ \varepsilon_{x^2x^1} & \varepsilon_{x^2x^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.049725\times10^{-3} & -1.11111\times10^{-3}\\ -1.11111\times10^{-3} & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma^{x^1x^1}\\ \sigma^{x^2x^1}\\ \sigma^{x^1x^2}\\ \sigma^{x^2x^2}\end{bmatrix}=\frac{2\times10^6}{1-0.11111}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.333\\ 0 & 0.333 & 0.333 & 0\\ 0 & 0.333 & 0.333 & 0\\ 0.333 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1.049725\times10^{-3}\\ -1.11111\times10^{-3}\\ -1.11111\times10^{-3}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-23.6188\\ -16.6666\\ -16.6666\\ -7.87294\end{bmatrix}$$

حيث: $\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=A$ مساحة العنصر المنتهي .

7-3-عنصر شريحة مثلثي في الإحداثيات الطبيعية:



شكل(7-11):الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الطبيعية.

عند استنتاج توابع الشكل في الإحداثيات الديكارتية وجدنا أن نقطة ما $p(x^1, x^2)$ من المثلث تحدد ثلاث مساحات أسميناها $A_{(k)}, A_{(j)}, A_{(i)}$ على التوالي ويمكن تعيين قيمها وفق العلاقة(7-54) بعد معرفة إحداثيات رؤوس المثلث وقيم إحداثيات النقطة p .والمساحة $A_{(i)}$ هي مساحة المثلث الذي تشكله النقطة p مع العقدتين (k),(j) وهكذا ..

وبالتالي يمكن توقيع أي نقطة من المثلث بمعرفة هذه المساحات.فلو عرفنا الإحداثيات الطبيعية المثلثية كنسب هذه المساحات إلى المساحة الأصلية كما هو وارد في العلاقة(7-55) لوجدنا أن الثلاثية $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ تحدد النقطة p تحديدا تاما. لنحدد الآن تحول الخط الإحداثي λ^1. λ^1 هو نسبة المساحة المثلثية التي تحددها النقطة p مع العقدتين (k),(j) .وبالتالي إذا وقعت النقطة p على المستقيم الواصل بين (k),(j) لأخذت λ^1 القيمة صفر.وفي حال انطباق p على (i) لأخذت القيمة واحد.وهكذا الأمر بالنسبة للإحداثيين الآخرين λ^3, λ^2 .أي أن قيم الإحداثيات الطبيعية المثلثية تتحول بين الصفر والواحد.وبالتالي يمكن أن نكتب :

$$0 \le \lambda^\alpha \le 1 \qquad (7\text{-}104)$$

والشكل(7-11) يبين تحول خطوط الإحداثيات هذه.

وباعتبار أنه في المستوي يكفي خطي إحداثيات لتعيين نقطة ما تعيينا تامـــا فـــإن اثنتـــين مـــن الإحداثيات السابقة مستقلة خطيا والثالث متعلق بهما.وهذا واضح فالإحداثيات الثلاثـــة تحقـــق العلاقة التالية:

$$\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 = 1 \qquad (7\text{-}105)$$

وذلك لأن:

$$A_{(i)} + A_{(j)} + A_{(k)} = A \qquad (7\text{-}106)$$

وفي استخدام الإحداثيات المثلثية ليس هناك من أفضلية في استخدام أي من الإحداثيـــات علـــى الآخر. وإنما يتم اختيار الإحداثيين المستقلين وفقا لوضوح العناصر الهندسية التفاضليـــة. ولتعيـــين الخواص الهندسية التفاضلية للعنصر،لابد في البدء من تحديد العلاقة التي تربط بـــين الإحداثيـــات الديكارتية والإحداثيات الطبيعية. تستخدم صيغة التوابع التقريبية لتحديد هذه العلاقة. بافتراض أن النقطة $p(x^1, x^2)$ تملك أيضا الإحداثيـــات الطبيعيـــة $p(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ فبمقدورنـــا تقريـــب الإحداثيات الديكارتية بالصيغتين التاليتين:

$$x^1 = \begin{bmatrix}\lambda^1 & \lambda^2 & \lambda^3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13}\end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix}\lambda^1 & \lambda^2 & \lambda^3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23}\end{bmatrix} \quad ; \; x^i = \lambda^\eta \cdot \alpha^i{}_\eta \qquad (7\text{-}107)$$

حيث $\alpha^i{}_\eta$ ثوابت اختيارية يجب تعيينها.هاتين العلاقتين يجب أن تعطيا إحداثيات العقد الديكارتية عند تعويض الأخيرة فيهما وذلك لأنهما تصفان الإحداثيات الديكارتية لأي نقطة من المثلث .

بإجراء التعويض نحصل على:

$$\begin{bmatrix}x^1{}_{(i)} \\ x^1{}_{(j)} \\ x^1{}_{(k)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^2{}_{(i)} \\ x^2{}_{(j)} \\ x^2{}_{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix} \qquad x^i{}_{(p)} = \delta^{\eta}{}_{(p)} \cdot \alpha^i{}_{\eta} \qquad (7\text{-}108)$$

بعكس العلاقتين السابقتين نحصل على الثوابت الاختيارية بدلالة إحداثيات رؤوس المثلث:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1{}_{(i)} \\ x^1{}_{(j)} \\ x^1{}_{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^2{}_{(i)} \\ x^2{}_{(j)} \\ x^2{}_{(k)} \end{bmatrix} \qquad \alpha^i{}_{\eta} = \delta^{(p)}{}_{\eta} \cdot x^i{}_{(p)} \qquad (7\text{-}109)$$

وبالعودة إلى العلاقة(7–107) نحصل على علاقة تربط بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الطبيعية مقترنة بالإحداثيات الديكارتية لرؤوس المثلث:

$$x^1 = \begin{bmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1{}_{(i)} \\ x^1{}_{(j)} \\ x^1{}_{(k)} \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^2{}_{(i)} \\ x^2{}_{(j)} \\ x^2{}_{(k)} \end{bmatrix} \qquad x^i = \lambda^{\eta} \cdot \delta^{(p)}{}_{\eta} \cdot x^i{}_{(p)} \qquad (7\text{-}110)$$

وباستخدام صيغة توابع الشكل نحصل على:

$$x^i = N^{(p)} \cdot x^i{}_{(p)} \qquad ; N^{(p)} \equiv \lambda^{\eta} \cdot \delta^{(p)}{}_{\eta} \qquad (7\text{-}111)$$

$$N^{(i)} = \lambda^1, N^{(j)} = \lambda^2, N^{(k)} = \lambda^3$$

يعبر عن شعاع المكان لنقطة ما من المثلث $p(x^1, x^2)$ في الإحداثيات الديكارتية بالشكل:

$$\mathbf{r} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 = x^i\mathbf{e}_i \qquad (7\text{-}112)$$

ولربط هذه العلاقة بالإحداثيات الطبيعية نعوض العلاقة(7–80) فيها:

$$\mathbf{r} = N^{(p)} \cdot x^i{}_{(p)}\mathbf{e}_i = N^{(p)}\mathbf{r}_{(p)} \qquad (7\text{-}113)$$

$\mathbf{r}(p)$ هي أشعة المكان لرؤوس المثلث والمعينة تماما بإحداثياتها الديكارتية.

تتعين أشعة القاعدة الأساسية بمشتقات شعاع المكان وتختلف أشعة القاعدة في شدتها واتجاهها من نقطة إلى أخرى في المثلث. لنحسب الآن أشعة القاعدة الأساسية في رؤوس المثلث. في العقدة (i)لنعتبر أن الإحداثيين المستقلين هما λ^3,λ^2.فيكون شعاع القاعدة الأساسي الأول:

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{r}_{,2} = N^{(p)}{}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{(p)} = N^{(i)}{}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{(i)} + N^{(j)}{}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{(j)} + N^{(k)}{}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{(k)} = -\mathbf{r}_{(i)} + \mathbf{r}_{(j)} \quad (7.114)$$

وذلك لأن :

$$N^{(i)} = \lambda^1 = 1-(\lambda^2+\lambda^3), N^{(j)} = \lambda^2, N^{(k)} = \lambda^3$$
$$\frac{\partial N^{(i)}}{\partial \lambda^2} = -1, \frac{\partial N^{(j)}}{\partial \lambda^2} = 1, \frac{\partial N^{(k)}}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (7\text{-}115)$$

وشعاع القاعدة الثاني:

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{r}_{,3} = N^{(p)}{}_{,3} \cdot \mathbf{r}_{(p)} = N^{(i)}{}_{,3} \cdot \mathbf{r}_{(i)} + N^{(j)}{}_{,3} \cdot \mathbf{r}_{(j)} + N^{(k)}{}_{,3} \cdot \mathbf{r}_{(k)} = -\mathbf{r}_{(i)} + \mathbf{r}_{(k)} \quad (7.116)$$

وبالتالي فمركبات أشعة القاعدة الأساسية السابقة والواردة في العلاقة التالية:

$$\mathbf{g}_\alpha = g^i{}_\alpha \cdot \mathbf{e}_i \quad (7\text{-}117)$$

هي:

$$g^i{}_\alpha = \begin{bmatrix} x^1{}_{(j)} - x^1{}_{(i)} & x^1{}_{(k)} - x^1{}_{(i)} \\ x^2{}_{(j)} - x^2{}_{(i)} & x^2{}_{(k)} - x^2{}_{(i)} \end{bmatrix} \quad (7\text{-}118)$$

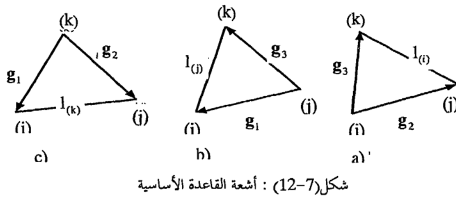
وفي العقدة (j) نعتبر أن الإحداثيات المستقلة هي λ^1,λ^3.ونحصل على أشعة القاعدة الأساسية فيها $\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_3$ بتبديل القرينة (i) بالقرينة (j) ,والقرينة (j) بالقرينة (k) ,والقرينة(k) بالقرينة(i) في العلاقة(7-118) :

$$g^i{}_\alpha = \begin{bmatrix} x^1{}_{(k)} - x^1{}_{(j)} & x^1{}_{(i)} - x^1{}_{(j)} \\ x^2{}_{(k)} - x^2{}_{(j)} & x^2{}_{(i)} - x^2{}_{(j)} \end{bmatrix} \quad (7\text{-}119)$$

وفي العقدة (k) نعتبر أن الإحداثيات المستقلة هي λ^2,λ^1 ونحصل على أشعة القاعدة الأساسية فيها $\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_1$ بتبديل القرينة (i) بالقرينة(k) ,والقرينة(j) بالقرينة(i) ,والقرينة(k) بالقرينة(j) في العلاقة (7-118) :

$$g^i{}_\alpha = \begin{bmatrix} x^1{}_{(i)} - x^1{}_{(k)} & x^1{}_{(j)} - x^1{}_{(k)} \\ x^2{}_{(i)} - x^2{}_{(k)} & x^2{}_{(j)} - x^2{}_{(k)} \end{bmatrix} \quad (7\text{-}120)$$

وفي الشكل (7–12) a),b),c) مثلت الأشعة السابقة من أجل الإيضاح.



شكل(7–12) : أشعة القاعدة الأساسية

a) في العقدة(i) , b) في العقدة(j) , c) في العقدة(k) .

تحسب المعاملات المترية الأساسية في نقطة ما من المثلث كجداءات سلمية لأشعة القاعدة الأساسية ببعضها البعض وهي في العقدة (i) مثلا:

$$g_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2(l_{(k)})^2 & (l_{(j)})^2 + (l_{(k)})^2 - (l_{(i)})^2 \\ (l_{(j)})^2 + (l_{(k)})^2 - (l_{(i)})^2 & 2(l_{(j)})^2 \end{pmatrix}$$

(7-121)

حيث كتب الجداء $\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_2$ بالشكل:

$$\begin{aligned} g_{23} = g_{32} &= (\mathbf{r}_{(k)} - \mathbf{r}_{(i)})(\mathbf{r}_{(j)} - \mathbf{r}_{(i)}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{(j)} - \mathbf{r}_{(i)})(\mathbf{r}_{(j)} - \mathbf{r}_{(i)}) + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{(k)} - \mathbf{r}_{(i)})(\mathbf{r}_{(k)} - \mathbf{r}_{(i)}) - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{(k)} - \mathbf{r}_{(j)})(\mathbf{r}_{(k)} - \mathbf{r}_{(j)}) \\ &= \frac{1}{2}[(l_{(j)})^2 + (l_{(k)})^2 - (l_{(i)})^2] \end{aligned}$$

(7-122)

g هو مفكوك معين مصفوفة المعاملات المترية(7–121).

$$g = \frac{1}{4}[-(l_{(i)})^4 - (l_{(j)})^4 - (l_{(k)})^4 + 2(l_{(i)})^2(l_{(j)})^2 + 2(l_{(i)})^2(l_{(k)})^2 + 2(l_{(j)})^2(l_{(k)})^2] = 4A^2 \quad (7\text{-}123)$$

والعنصر السطحي إذا:

$$\sqrt{g} = 2A \qquad (7\text{-}124)$$

يلاحظ أن العنصر السطحي هو مساحة متوازي الأضلاع المرسوم على شعاعي القاعدة وله القيمة نفسها في كل عقد المثلث وهي ضعف مساحة المثلث.

نحصل على المعاملات المترية الضدية بعكس مصفوفة المعاملات المترية الأساسية فالعلاقة بينهما ممثلة بالمعادلة التالية:

$$g_{\alpha\beta} \cdot g^{\beta\gamma} = \delta^{\gamma}{}_{\alpha} \qquad (7\text{-}125)$$

وبالعودة إلى العلاقة (7–121) نجد:

$$g^{\beta\gamma} = \frac{1}{8A^2}\begin{pmatrix} 2(l_{(j)})^2 & (l_{(i)})^2 - (l_{(j)})^2 - (l_{(k)})^2 \\ (l_{(i)})^2 - (l_{(j)})^2 - (l_{(k)})^2 & 2(l_{(k)})^2 \end{pmatrix} \qquad (7\text{-}126)$$

يمكن حساب أشعة القاعدة الضدية من المعاملات المترية الضدية وأشعة القاعدة الأساسية وفق العلاقة:

$$\mathbf{g}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{g}_{\beta} \qquad (7\text{-}127)$$

ويمكن أيضا إجراء هذا الحساب من التعريف مباشرة:

$$\mathbf{g}^{\alpha} . \mathbf{g}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} \quad ; \quad g_i{}^{\alpha} \cdot g^j{}_{\beta} \cdot \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = g_i{}^{\alpha} . g^j{}_{\beta} . \delta_j{}^i = g_i{}^{\alpha} g_{\beta}{}^i = \delta^{\alpha}{}_{\beta} \qquad (7\text{-}128)$$

أي بأخذ المعكوس المباشر لمصفوفة مركبات أشعة القاعدة الأساسية وذلك عندما تكون الأخيرة مربعة. فمثلا في العقدة (i) يمكن كتابة العلاقة (7–128) بالشكل التفصيلي:

$$\begin{bmatrix} x^1{}_{(j)} - x^1{}_{(i)} & x^2{}_{(j)} - x^2{}_{(i)} \\ x^1{}_{(k)} - x^1{}_{(i)} & x^2{}_{(k)} - x^2{}_{(i)} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} g_{x^1}{}^2 & g_{x^1}{}^3 \\ g_{x^2}{}^2 & g_{x^2}{}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}129)$$

في هذه العلاقة أخذ مبادل المصفوفة (7–118) وذلك باعتبار أن الجداء المصفوفي غير تبديلي وأن الجداء المعرف في العلاقة (7–129) تبديلي. من العلاقة (7–128) تنتج مركبات أشعة القاعدة الضدية التالية:

$$g_i{}^{\alpha} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} x^2{}_{(k)} - x^2{}_{(i)} & x^2{}_{(i)} - x^2{}_{(j)} \\ x^1{}_{(i)} - x^1{}_{(k)} & x^1{}_{(j)} - x^1{}_{(i)} \end{bmatrix}, \alpha = 2,3 \qquad (7\text{-}130)$$

ونحصل على مركبات أشعة القاعدة الضدية في العقدتين الأخرين (k),(j) بالتبديل الدوري للقرائن ، ففي العقدة (j) نحصل على :

$$g_i^{\alpha} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} x^2{}_{(i)} - x^2{}_{(j)} & x^2{}_{(j)} - x^2{}_{(k)} \\ x^1{}_{(j)} - x^1{}_{(i)} & x^1{}_{(k)} - x^1{}_{(j)} \end{bmatrix}, \alpha = 3,1 \qquad (7\text{-}131)$$

وفي العقدة (k) على:

$$g_i^{\alpha} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} x^2{}_{(j)} - x^2{}_{(k)} & x^2{}_{(k)} - x^2{}_{(i)} \\ x^1{}_{(k)} - x^1{}_{(j)} & x^1{}_{(i)} - x^1{}_{(k)} \end{bmatrix}, \alpha = 1,2 \qquad (7\text{-}132)$$

يلاحظ أن عناصر مصفوفات العلاقات (7-130),(7-131),(7-132) مكررة.

وبالتالي يمكن تجميع هذه المصفوفات في مصفوفة واحدة مع اعتبار أن α تأخذ القيم3,2,1 .

$$g_i^{\alpha} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} x^2{}_{(j)} - x^2{}_{(k)} & x^2{}_{(k)} - x^2{}_{(i)} & x^2{}_{(i)} - x^2{}_{(j)} \\ x^1{}_{(k)} - x^1{}_{(j)} & x^1{}_{(i)} - x^1{}_{(k)} & x^1{}_{(j)} - x^1{}_{(i)} \end{bmatrix}, \alpha = 1,2,3 \qquad (7\text{-}133)$$

بعد حساب الخواص الهندسية التفاضلية للعنصر ننتقل الآن إلى تقريب تابع الانتقالات واشتقاق مصفوفة القساوة.يمكن اختيار تابع الانتقالات u_i في الإحداثيات الديكارتية بنفس الشكل (7-107) الذي استخدم لتقريب الإحداثيات الديكارتية لنقطة من المثلث.وبتحديد الثوابت الاختيارية بإتباع خطوات مشابهة للخطوات من (7-107) إلى (7-111) نحصل على التابع التقريبي:

$$u_i = N^{(p)} u_{i(p)} \qquad (7\text{-}134)$$

حيث $u_{i(p)}$ هي انتقالات العقد وهي بالتفصيل:

$$u_{i(p)} = \begin{bmatrix} u_{x^1(i)} & u_{x^1(j)} & u_{x^1(k)} \\ u_{x^2(i)} & u_{x^2(j)} & u_{x^2(k)} \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}135)$$

و $N^{(p)}$ توابع الشكل وهي معطاة في العلاقة (7-111).

يحقق تابع الانتقالات هذا شروط التقارب الواجب تحقيقها في طريقة العناصر المنتهية – نموذج الانتقالات،ومنها التوافق أو التطابق بين الانتقالات عند الانتقال من عنصر منتهي إلى عنصر منتهي مجاور.إذ أن تابع الانتقالات على طول ضلع المثلث يتعلق فقط بالإحداثي على هذا الضلع وبانتقال العقدتين الطرفيتين لهذا الضلع.

نحتاج عند اشتقاق موترة التشوهات من الانتقالات الـــواردة في العلاقـــة (7-134) والتابعـــة للإحداثيات الطبيعية إلى إجراء الاشتقاق وفق الإحداثيات الديكارتية،لهذا الغرض نستخدم قـــاعدة اشتقاق تابع التابع:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial u_i}{\partial \lambda^\alpha} \cdot \frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial x^k} \qquad (7\text{-}136)$$

$$u_{i,k} = u_{i,\alpha} \cdot \lambda^\alpha{}_{,k} = u_{i,\alpha} \cdot g_k{}^\alpha$$

وهذا المشتق يمكن إجراؤه في إحداثيات أي من العقد (i),(j),(k) . فمثلا في إحداثيات العقـــدة (i) حيث المتحولات المستقلة المعتبرة λ^2, λ^3 يساوي هذا المشتق:

$$u_{i,k} = u_{i,2} \cdot g_k{}^2 + u_{i,3} \cdot g_k{}^3 \qquad (7\text{-}137)$$

ويمكن صياغة كل العلاقات منسوبة إلى هذه الإحداثيات.وهناك صياغة أكثر أناقة وهي صياغـــة العلاقات دون تفضيل إحداثيات أي عقدة على الأخرى.ويتم ذلك بالتظاهر بمعاملة الإحداثيـــات الطبيعية الثلاثة $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ وكأنها مستقلة عن بعضها البعض.فلو اعتبرنا أن هناك ثلاثة إحداثيات طبيعية $\lambda^{\bar{1}}, \lambda^{\bar{2}}, \lambda^{\bar{3}}$ مرتبطة مع الأخيرة بالعلاقات الخطية التالية:

$$\lambda^{\bar{1}} = \lambda^1; \lambda^{\bar{2}} = \lambda^2; \lambda^{\bar{3}} = 1 - \lambda^2 - \lambda^3 \qquad (7\text{-}138)$$

لكان بإمكاننا أن نشكل مشتق الانتقالات وفق ما يلي:

$$\begin{aligned} u_{i,\alpha} &= u_{i,\bar{1}} \cdot \lambda^{\bar{1}}{}_{,\alpha} + u_{i,\bar{2}} \cdot \lambda^{\bar{2}}{}_{,\alpha} + u_{i,\bar{3}} \cdot \lambda^{\bar{3}}{}_{,\alpha} \\ u_{i,\alpha} &= u_{i,\bar{\rho}} \cdot \lambda^{\bar{\rho}}{}_{,\alpha}; \bar{\rho} = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}; \alpha = 2,3 \end{aligned} \qquad (7\text{-}139)$$

والمصفوفة $\lambda^{\bar{\rho}}{}_{,\alpha}$ تحتوي بالنظر إلى العلاقات (7-138) على العناصر التالية:

$$\lambda^{\bar{\rho}}{}_{,\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}140)$$

بتعويض المعادلة الثانية من العلاقة (7-139) في المعادلة الثانية من العلاقة (7-136) نحصل على:

$$u_{i,k} = u_{i,\bar{\rho}} \cdot \lambda^{\bar{\rho}}{}_{,\alpha} \cdot g_k{}^\alpha \qquad (7\text{-}141)$$

ومفكوك هذه العلاقة بالنسبة لـــ $\alpha, \bar{\rho}$ هو:

$$u_{i,k} = u_{i,\bar{1}}(-g_k{}^2 - g_k{}^3) + u_{i,\bar{2}} \cdot g_k{}^2 + u_{i,\bar{3}} \cdot g_k{}^3 \qquad (7\text{-}142)$$

وبالعودة إلى العلاقات (7–130),(7–132) نلاحظ أن:

$$g_k^{\,1} = -g_k^{\,2} - g_k^{\,3} \tag{7-143}$$

وبالتالي تصبح العلاقة (7–142) بالشكل:

$$u_{i,k} = u_{i,\bar{1}} \cdot g_k^{\,1} + u_{i,\bar{2}} \cdot g_k^{\,2} + u_{i,\bar{3}} \cdot g_k^{\,3} \tag{7-144}$$

وهي ما يمكن كتابتها بالصيغة الموترية التالية:

$$u_{i,k} = u_{i,\bar{\alpha}} \cdot g_k^{\,\alpha}, \bar{\alpha} = \alpha = 1,2,3 \tag{7-145}$$

والتي تكون فيها القرائن 1,2,3 واردة دون تفضيل الواحدة عن الأخرى.وبرغم تمييز القرينة $\bar{\alpha}$عن α بالإشارة – فوقها يفهم ضمنا أن الجمع يتم على هذه القرينة.وإذا أردنا الدقة أكثر في التعبير عن الجداء (7–144) يمكن إدخال موترة كرونيكر $\delta^{\bar{\alpha}}{}_{\alpha}$ ضمن الجداء في الطرف الثاني للعلاقة(7–145) ويفهم في ما يلي من علاقات عند ورود α , $\bar{\alpha}$ إحداهما في الأعلى والأخرى في الأسفل في جداء مضاريب أن الجمع يتم على هذه القرينة.

بعد اعتماد الصيغة (7–145) لاشتقاق توابع الانتقالات في الإحداثيات الديكارتية يمكن البدء أولا بحساب المشتق $u_{i,\bar{\alpha}}$ للتوابع التقريبية (7–134).

$$u_{i,\bar{\alpha}} = N^{(p)}{}_{,\bar{\alpha}} \cdot u_{i(p)} \tag{7-146}$$

حيث:

$$N^{(p)}{}_{,\bar{\alpha}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \delta^{(p)}{}_{\alpha} \tag{7-147}$$

والواضح من العلاقة السابقة أن تقريب حالة التشوهات على مستوى العنصر يتم بتابع ثابت لا علاقة له بالإحداثيات ضمن العنصر المنتهي وإنما فقط بانتقالات عقد العنصر المنتهي.

يتم الحصول على مصفوفة القساوة بتقييم تعبير طاقة التشوه الداخلية.

$$\pi_i = \frac{1}{2}\int_A \varepsilon_{ij} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot dA = \frac{1}{2}\int_A u_{i,j} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot u_{k,l} \cdot dA \tag{7-148}$$

بتعويض العلاقة (7–146) في (7–145) وتعويض الناتج في العلاقة (7–148) نحصل على:

$$\pi_i = \frac{1}{2} u_{i,p} (\int_A N^{(p)}{}_{,\bar{\alpha}} \cdot g_j{}^{\alpha} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot N^{(q)}{}_{,\bar{\beta}} \cdot g_l{}^{\beta} \cdot dA) u_{k(q)}$$

$$= \frac{1}{2} u_{i,p} \cdot k^{i(p)k(q)} \cdot u_{k(q)} \qquad (7\text{-}149)$$

حيث:

$$k^{i(p)k(q)} = \int_A N^{(p)}{}_{,\bar{\alpha}} \cdot g_j{}^{\alpha} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot g_l{}^{\beta} \cdot N^{(q)}{}_{,\bar{\beta}} \cdot dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-\lambda^2} N^{(p)}{}_{,\bar{\alpha}} \cdot t \cdot c^{i\alpha k\beta} \cdot N^{(q)}{}_{,\bar{\beta}} \cdot \sqrt{g} \cdot d\lambda^3 \cdot d\lambda^2 \qquad (7\text{-}150)$$

مصفوفة القساوة للعنصر.

تظهر في العلاقة السابقة المعاملات :

$$t \cdot c^{i\alpha k\beta} = g_j{}^{\alpha} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot g_l{}^{\beta} \qquad (7\text{-}151)$$

وهي تمثل معاملات القساوة المحولة إلى الإحداثيات الطبيعية. وباعتبار هذه المعاملات غير متعلقة بالإحداثيات المستقلة وكذلك المصفوفة $N^{(p)}{}_{,\alpha}$ ، فيمكن إخراجها خارج إشارة التكامل ويتم الحصول على مصفوفة القساوة في العلاقة (7-150) بإجراء الجداء المصفوفي:

$$k^{i(p)k(q)} = \delta^{(p)}{}_{,\alpha} \cdot t \cdot c^{i\alpha k\beta} \cdot \delta^{(q)}{}_{,\beta} \iint_A dA = t \cdot A \cdot c^{i(p)k(q)} \qquad (7\text{-}152)$$

لحساب القوى المركزة على العقد والمكافئة لحمولة موزعة ضمن العنصر ولها الشدات $\bar{f}^i{}_{(k)}, \bar{f}^i{}_{(j)}, \bar{f}^i{}_{(i)}$ في العقد (k),(j),(i) على الترتيب،نفترض توزعا خطيا لهذه الحمولة ونستخدم نفس تابع الانتقالات (7-111) لاستنباط شدة الحمولة في نقطة ما لاعلى التعيين ضمن العنصر:

$$\bar{f}^i = N^{(q)} \cdot \bar{f}^i{}_{(q)} \qquad (7\text{-}153)$$

ويصبح كمون القوى الخارجية بالشكل:

$$\pi_a = -\int_A \bar{f}^i \cdot u_i \cdot dA = -\bar{f}^i{}_{(q)} \int_A N^{(q)} N^{(p)} dA \cdot u_{i(p)}$$

$$= -\bar{f}^i{}_{(q)} \cdot c^{(q)(p)} \cdot u_{i(p)} = -\bar{f}^{i(p)} \cdot u_{i(p)} \qquad (7\text{-}154)$$

والقوى المركزة على العقد والمكافئة للحمولة الموزعة هي:

$$\bar{f}^{i(p)} = \bar{f}^{i}_{(q)} \cdot c^{(q)(p)} \qquad (7.155)$$

ويجرى التكامل لحساب المصفوفة $c^{(q)(p)}$ في الإحداثيات الطبيعية:

$$c^{(q)(p)} = \int_0^1 \int_0^{1-\lambda^2} N^{(q)} \cdot N^{(p)} \cdot \sqrt{g} \cdot d\lambda^2 \cdot d\lambda^3 \qquad (7\text{-}156)$$

والجداء $N^{(q)} \cdot N^{(p)}$ هو بالتفصيل:

$$N^{(q)(p)} = \begin{bmatrix} (\lambda^1)^2 & \lambda^1\lambda^2 & \lambda^1\lambda^3 \\ \lambda^2\lambda^1 & (\lambda^2)^2 & \lambda^2\lambda^3 \\ \lambda^3\lambda^1 & \lambda^3\lambda^2 & (\lambda^3)^2 \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}157)$$

ولإجراء هذه التكاملات هناك صيغة عملية سريعة يكتفى بذكرها دون التعرض لبرهانها وهي:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\lambda^2} (\lambda^1)^m (\lambda^2)^n (\lambda^3)^l d\lambda^3 d\lambda^2 = \frac{m!n!l!}{(m+n+l+2)!} \qquad (7\text{-}158)$$

وكأمثلة على استخدام هذه الصيغة ،يعطى المثالين التاليين:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\lambda^2} (\lambda^1)^2 d\lambda^3 d\lambda^2 = \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} = \frac{2}{24} \qquad (7\text{-}159)$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\lambda^2} \lambda^1 \cdot \lambda^2 \cdot d\lambda^3 d\lambda^2 = \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)} = \frac{1}{24} \qquad (7\text{-}160)$$

وعليه تعطى المصفوفة $c^{(q)(p)}$ بالشكل:

$$c^{(q)(p)} = \frac{2A}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}161)$$

في حالة وجود حمولة موزعة بانتظام في اتجاه i شدتها على كل عقدة من عقد المثلث متساوية ومقدارها $\bar{f}^i$ تعطى $\bar{f}^i_{(q)}$ بالشكل:

$$\bar{f}^i_{(q)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \bar{f}^i \qquad (7\text{-}162)$$

عندها تكون مقادير القوى المركزة على العقد والمكافئة للحمولة الموزعة كما يلي:

$$\bar{f}^{i(p)} = \frac{A}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \bar{f}^i \qquad (7\text{-}163)$$

أي أن القوة الموزعة تتوزع بالتساوي على العقد الثلاث.

بعد تجميع الطاقة الكامنة على كامل المنشأ وتعويض الشروط الطرفية نحصل على جملة المعـــادلات الخطية النهائية لانتقالات العقد والتي يمكن بحلها حساب الأخيرة كمجاهيل لمسألتنا هذه.

وبعد حساب هذه الأخيرة يبدأ الطريق العكسي لحساب الانتقالات ضمن أي نقطة من أي عنصر منتهي وحساب التشوهات وكذلك الإجهادات وقوى المقطع.فمثلاً في عنصر ما حسبت انتقالات عقده $u_{i(p)}$ ، يمكن حساب مشتق الانتقالات (7-145) بمساعدة (7-146) بالشكل:

$$u_{k,l} = N^{(p)}{}_{,\bar{\alpha}} \cdot g_l{}^{\alpha} \cdot u_{k(p)} \qquad (7\text{-}164)$$

ومن ثم تعويض الأخيرة في العلاقة التالية:

$$n^{ij} = t \cdot \sigma^{ij} = t \cdot c^{ijkl} \cdot u_{k,l} \qquad (7\text{-}165)$$

لحساب قوى المقطع، وهي بالنتيجة:

$$n^{ij} = t \cdot N^{(p)}{}_{,\bar{\alpha}} \cdot g_l{}^{\alpha} \cdot u_{k(p)} \qquad (7\text{-}166)$$

وختاماً يمكن ملاحظة الفائدة العملية من استخدام الإحداثيات الطبيعية بملاحظة التبسيط الكبير الذي حصلنا عليه أثناء إجراء التكاملات على العنصر المنتهي.

7-4-عنصر شريحة منته مستطيل من النموذج الهجين للإجهادات

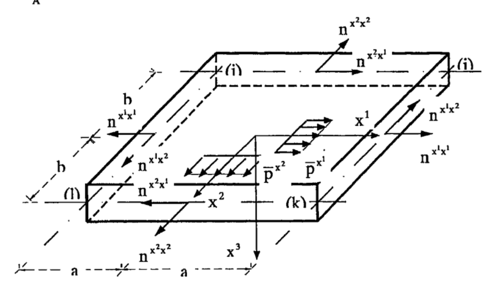
يبسط مبدأ الطاقة المتممة المعدل والذي يشكل الأساس النظري لهذه الطريقة من الحالة الفراغيـــة للوسط المستمر (العلاقات (3-78)-(3-79)) إلى الحالة المستوية لوسط الشـــريحة المقســـم إلى عناصر منتهية بشكل مشابه لما ورد في الفقرة 5-5 مع مراعاة الحالة الخاصة الإجهادية ووضعيـــة التشوهات لحالة الشريحة.والعلاقة الناتجة مماثلة لتلك المعطاة في العلاقة (5-63) وهي كالتالي:

$$\delta\pi_{ch} = \delta\{\sum_e [\frac{1}{2}\int_u \sigma^{ij} \cdot s_{ijkl} \cdot \sigma^{kl} \cdot dV - \int_s p^i{}_{b,e} \cdot u_i{}^{b,e} \cdot ds + \int_{s_\sigma{}^{b,e}} \bar{p}^i{}_{b,e} \cdot u_i{}^{b,e} \cdot ds]\} = 0$$

(7.167)

لتقييم تعبير الطاقة الداخلية المتممة تستخدم كالسابق توابع قوى مقطع تقريبية بدلا من اســتخدام توابع الإجهادات ولذلك تصاغ الطاقة الداخلية المتممـــــة بدلالـــة قـــوى المقطـــع باســتخدام العلاقة(7.11) كما يلي:

$$\pi_i^* = \frac{1}{2}\int_u \sigma^{ij} \cdot s_{ijkl} \cdot \sigma^{kl} \cdot du = \frac{1}{2}\left(\int_A \frac{1}{t} \cdot n^{ij} \cdot s_{ijkl} \cdot \frac{1}{t} \cdot n^{kl} \cdot dA\right) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx^3$$
$$= \frac{1}{2}\int_A n^{ij} \cdot \frac{1}{t} \cdot s_{ijkl} \cdot n^{kl} \cdot dA \qquad (7.168)$$



شكل 7-13 : عنصر منتهي مستطيل لشريحة.

لاختيار توابع قوى المقطع يمكن أن نبدأ مثلاً بافتراض تابع الإجهادات ضمن العنصر المنتهي. لنفترض أن هذا التابع تام ويمثل بكافة حدود المرتبة الرابعة من مثلث باسكال أي أنه يحوي خمسة عشر حداً وهي التالية :

$$F(x^1, x^2) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 (x^1)^2 + c_4 (x^1 x^2) + c_5 (x^2)^2 + c_6 (x^1)^3$$
$$+ c_7 (x^1)^2 x^2 + c_8 x^1 (x^2)^2 + c_9 (x^2)^3 + c_{10} (x^1)^4 + c_{11} (x^1)^3 x^2$$
$$+ c_{12} (x^1)^2 (x^2)^2 + c_{13} x^1 (x^2)^3 + c_{14} (x^2)^4 \qquad (7.169)$$

يلاحظ أن هذا التابع لا يحقق المعادلة التفاضلية ($F=0$) واستخدام مبدأ الطاقة المتممة المعدل لا يحوي مثل هذه المتطلبات وإنما يجب فقط أن تحقق توابع قوى المقطع المشتقة علاقات التوازن

على المستوي التفاضلي للعنصر. ولهذا الغرض يجري اشتقاق توابع قوى المقطع وفق العلاقات (7.31) لحالة عنصر غير محمل أو وفق المعادلتين الأولى والثانية من العلاقات (7.31) مع العلاقات (7.32) لحالة عنصر منته محمل بحمولة موزعة بانتظام. وللحالة الأخيرة تكون توابع قوى المقطع كالتالي:

$$
\begin{aligned}
n^{x^1x^1} &= 2c_5 + 2c_8x^1 + 6c_9x^2 + 2c_{12}(x^1)^2 + 6c_{14}x^1x^2 + 12c_{14}(x^1)^2 \\
n^{x^2x^1} &= -c_4 - 2c_7x^1 - 2c_8x^2 - 3c_{11}(x^1)^2 - 4c_{12}x^1x^2 - 3c_{13}(x^2)^2 - x^2\overline{p}^{x^1} - x^1\overline{p}^{x^2} \\
n^{x^1x^2} &= -c_4 - 2c_7x^1 - 2c_8x^2 - 3c_{11}(x^1)^2 - 4c_{12}x^1x^2 - 3c_{13}(x^2)^2 - x^2\overline{p}^{x^1} - x^1\overline{p}^{x^2} \\
n^{x^2x^2} &= 2c_3 + 6c_6x^1 + 2c_7x^2 + 12c_{10}(x^1)^2 + 6c_{11}x^1x^2 + 2c_{12}(x^2)^2
\end{aligned}
\tag{7.170}
$$

وبالانتقال من الثوابت c إلى الثوابت بالتركيب الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
&\beta_1 = 2c_3; \beta_2 = c_4; \beta_3 = c_5; \beta_4 = 6c_5 \\
&\beta_5 = 2c_7; \beta_6 = 2c_8; \beta_7 = 6c_9; \beta_8 = 12c_{10} \\
&\beta_9 = 6c_{11}; \beta_{10} = 2c_{12}; \beta_{11} = 6c_{13}; \beta_{12} = 12c_{14}
\end{aligned}
\tag{7.171}
$$

نحصل بعد كتابة العلاقات (7.170) بالطريقة المصفوفية على التابع الافتراضي التالي:

$$
\begin{bmatrix} n^{x^1x^1} \\ n^{x^2x^1} \\ n^{x^1x^2} \\ n^{x^2x^2} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
 & & 1 & & & x^1 & x^2 & & & (x^1)^2 & x^1x^2 & (x^2)^2 \\
 & -1 & & & -x^1 & -x^2 & & & -\frac{1}{2}(x^1)^2 & -2x^1x^2 & -\frac{1}{2}(x^2)^2 & \\
 & -1 & & & -x^1 & -x^2 & & & -\frac{1}{2}(x^1)^2 & -2x^1x^2 & -\frac{1}{2}(x^2)^2 & \\
1 & & & x^1 & x^2 & & & (x^1)^2 & x^1x^2 & (x^2)^2 & &
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \\ \beta_{10} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} -x^2 & -x^1 \\ -x^2 & -x^1 \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{p}^{x^1} \\ \overline{p}^{x^2} \end{bmatrix}
$$

$$n^{ij} = p^{ijkl} \cdot \beta_{kl} + \overline{p}^{ij} \cdot \overline{\beta} \quad ; i, j = x^1, x^2 ; k = 1,2; l = 1,2, \ldots\ldots, 6 \qquad (7.172)$$

والتابع المفترض هذا يحقق المتطلبات التي ورد ذكرها في الفقرة 5-5-2.

ويتم بهذا التابع تقييم الطاقة الداخلية المتممة بشكل مطابق لما ورد في العلاقات (6-208) وحتى (6-211).

$$\pi_i^* = \frac{1}{2}\beta_{kl} \cdot H^{klop} \cdot \beta_{op} + \frac{1}{2}\beta_{kl} \cdot \overline{H}^{kl} \cdot \overline{\beta} + c_1 \qquad (7.173)$$

حيث:

$$H^{klop} = \int_A p^{ijkl} \cdot s'_{ijmn} \cdot p^{mnop} \cdot dA \qquad (7.174)$$

$$\overline{H}^{kl} = \int_A p^{ijkl} \cdot s'_{ijmn} \cdot \overline{p}^{mn} \cdot dA \qquad (7.175)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\overline{\beta}\left(\int_A \overline{p}^{ij} \cdot s'_{ijmn} \cdot \overline{p}^{mn} \cdot dA\right)\overline{\beta} \qquad (7.176)$$

والقرائن الجديدة المستخدمة تتحول بالشكل6 $p=1,2$; $m,n= x^1 ,x^2$; $o=1,2$ أما s'_{ijmn} فهي مساوية لـ $\frac{1}{t}s_{ijmn}$.

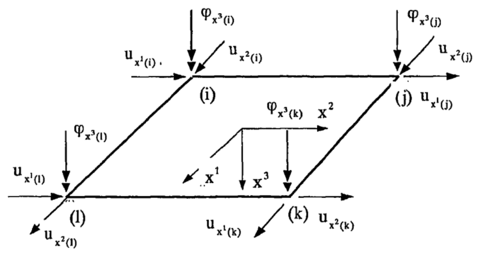
يمثل الحد الثاني من العلاقة (7.167) عمل القوى السطحية الطرفية،وتنتج هذه القوى من التابع التقريبي لقوى المقطع بتعويض معادلات الأطراف الأربعة للعنصر المنتهي في العلاقات (7.172).

$$
\begin{bmatrix} -n^{x^1x^1}{}_{(i)(j)} \\ -n^{x^2x^1}{}_{(i)(j)} \\ n^{x^1x^1}{}_{(j)(k)} \\ n^{x^1x^2}{}_{(j)(k)} \\ n^{x^2x^2}{}_{(k)(l)} \\ n^{x^2x^1}{}_{(k)(l)} \\ -n^{x^1x^1}{}_{(l)(i)} \\ -n^{x^1x^2}{}_{(l)(i)} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-1 & & & -x^1 & b & & & -(x^1)^2 & x^1b & -b^2 & & \\
 & 1 & & & x^1 & -b & & & \frac{1}{2}(x^1)^2 & -2x^1b & \frac{1}{2}b^2 & \\
 & & 1 & & & a & x^2 & & & a^2 & ax^2 & (x^2)^2 \\
 & -1 & & & -a & -x^2 & & & -\frac{1}{2}a^2 & -2ax^2 & -\frac{1}{2}(x^2)^2 & \\
1 & & & x^1 & b & & & (x^1)^2 & x^1b & b^2 & & \\
 & -1 & & & -x^1 & -b & & & -\frac{1}{2}(x^1)^2 & -2x^1b & -\frac{1}{2}b^2 & \\
 & & -1 & & & a & -x^2 & & & -a^2 & ax^2 & -(x^2)^2 \\
 & 1 & & & -a & x^2 & & & \frac{1}{2}a^2 & -2ax^2 & \frac{1}{2}(x^2)^2 &
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \\ \beta_{10} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} -b & x^1 \\ -x^2 & -a \\ -b & -x^1 \\ x^2 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{p}^{x^1} \\ \overline{p}^{x^2} \end{bmatrix}
$$

$$
p^i{}_{b,e} = R^{ikl}{}_{b,e} \cdot \beta_{kl} + \overline{R}^i{}_{b,e} \cdot \overline{\beta} \qquad ; b,e=(i)(j)\ ;(j)(k)\ ;(k)(l)\ ;(l)(i) \qquad (7.177)
$$

يلاحظ الآن أن b,e استخدمت كقرائن تتحول على أطراف العنصر المنتهي.



شكل7-14: درجات الحرية لعنصر الشريحة.

كما رأينا في تطبيق الطريقة الهجينة-نموذج الإجهادات يمكن افتراض توابع الانتقالات على أطراف العنصر المنتهي باستقلالية تامة.يفترض شعاع انتقالات الأطراف الموافق لشـــعاع قـــوى المقطـــع الطرفية على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} u_{x^2}^{(i)(j)} \\ u_{x^1}^{(i)(j)} \\ u_{x^1}^{(j)(k)} \\ u_{x^2}^{(j)(k)} \\ u_{x^2}^{(k)(l)} \\ u_{x^1}^{(k)(l)} \\ u_{x^1}^{(l)(i)} \\ u_{x^2}^{(l)(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & h_1^1 & ah_2^1 & & h_3^1 & ah_4^1 & & & & & & \\ \frac{1}{2}(1-\theta^1) & & & \frac{1}{2}(1+\theta^1) & & & & & & & & \\ & & & h_1^2 & & bh_2^2 & h_3^2 & & bh_4^2 & & & \\ & & & & \frac{1}{2}(1-\theta^2) & & & \frac{1}{2}(1+\theta^2) & & & & \\ & & & & & & & h_3^1 & -ah_4^1 & & h_1^1 & -ah_2^1 \\ & & & & & & \frac{1}{2}(1+\theta^1) & & & \frac{1}{2}(1-\theta^1) & & \\ h_1^2 & & -bh_2^2 & & & & & & & h_3^2 & & -bh_4^2 \\ & \frac{1}{2}(1-\theta^2) & & & & & & & & & \frac{1}{2}(1+\theta^2) & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^1(i)} \\ u_{x^2(i)} \\ \varphi_{x^3(i)} \\ u_{x^1(j)} \\ u_{x^2(j)} \\ \varphi_{x^3(j)} \\ u_{x^1(k)} \\ u_{x^2(k)} \\ \varphi_{x^3(k)} \\ u_{x^1(l)} \\ u_{x^2(l)} \\ \varphi_{x^3(l)} \end{bmatrix}$$

$$u_i^{b,e} = L_i^{b,em(n)} \cdot u_{m(n)} \;;\; m=1,2,3 \;;\; (n)=(i),(j),(k),(l) \qquad (7.178)$$

والتوابع المذكورة في العلاقة السابقة مطابقة لمثيلاتها المعطاة في العلاقة(6.215).وشعاع انتقـــالات العقد $u_{m(n)}$ مبين على الشكل 7-14 .

بالتابع التقريبي للانتقالات (7.178) وتوابع القوى السطحية الطرفية (7.177) يقيم الحد الثـــاني من الطاقة المتممة المعدلة (7.167) كالتالي:

$$T = \int_s p^i{}_{b,e} \cdot u_i^{b,e} \cdot ds = \beta_{kl} \cdot T^{klm(n)} \cdot u_{m(n)} + \overline{\beta} \cdot \overline{T}^{m(n)} \cdot u_{m(n)} \qquad (7.179)$$

(n),m قرائن سابقة انتفت الحاجة لها وقد استخدمت من جديد بقيم مختلفة.

حيث:

$$T^{klm(n)} = \int_s R_{b,e}{}^{ikl} \cdot L_i^{b,em(n)} \cdot ds \qquad (7.180)$$

$$\overline{T}^{m(n)} = \int_s \overline{R}^i{}_{b,e} \cdot L_i^{b,em(n)} \cdot ds \qquad (7.181)$$

ولتقييم عمل القوى الخارجية المؤثرة على أطراف العنصر المنتهي ترتب هذه الأخيرة في شعاع.

$$\overline{p}^{i}_{b,e}=\left\{\overline{p}^{x^2}_{(i)(j)}\quad \overline{p}^{x^2x^1}_{(i)(j)}\quad \overline{p}^{x^1}_{(j)(k)}\quad \overline{p}^{x^1x^2}_{(j)(k)}\quad \overline{p}^{x^2}_{(k)(l)}\quad \overline{p}^{x^2x^1}_{(k)(l)}\quad \overline{p}^{x^1}_{(l)(i)}\quad \overline{p}^{x^1x^2}_{(l)(i)}\right\}$$

(7.182)

وحمولة كل طرف من الأطراف يمكن تقريبها بتابع من الدرجة الثانية،فمثلاً حمولة الطـرف (i)(j) يمكن كتابته بشكل مماثل للعلاقة (6.186) وتوابعه التقريبية A_0 مماثلة لتلك الواردة في العلاقـة :(6.224)

$$\overline{p}_{(i)(j)}=\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & A_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\overline{p}^{1}_{(i)(j)}\\ \overline{p}^{2}_{(i)(j)}\\ \overline{p}^{3}_{(i)(j)}\end{bmatrix} \tag{7.183}$$

وشعاع القوى الخارجية المؤثرة على الأطراف يأخذ الشكل المصفوفي:

$$\overline{p}^{i}_{b,e}=A^{i}{}_{k}\cdot\overline{p}^{k}_{b,e} \tag{7.184}$$

$\overline{p}_{b,e}{}^{k}$ تشير إلى قيم الحمولات الخارجية المعطاة لوصف توابع الحمولة مرتبة وفق التسلسل الـوارد للشعاع $\overline{p}^{i}_{b,e}$ العلاقة(7.182). $A^{i}{}_{k}$ تمثل توابع الشكل مكـررة بعـدد تكـرار توابـع الحمولات (ثمان مرات كما تشير العلاقة (7.182)).

يمكن الآن تقييم الحد الأخير من العلاقة (7.167) بالشكل:

$$\begin{aligned}\overline{T}&=\int_{s_\sigma^{b,e}}\overline{p}^{i}_{b,e}\cdot u_i{}^{b,e}\cdot ds=\overline{p}^{k}_{b,e}\Big(\int_{s_\sigma^{b,e}}A^{i}{}_{k}\cdot L_i{}^{b,em(n)}\cdot ds\Big)u_{m(n)}\\&=\overline{s}^{m(n)}\cdot u_{m(n)}\end{aligned} \tag{7.185}$$

حيث:

$$\overline{s}^{m(n)}=\overline{p}^{k}_{b,e}\int_{s_\sigma^{b,e}}A^{i}{}_{k}\cdot L_i{}^{b,em(n)}\cdot ds \tag{7.186}$$

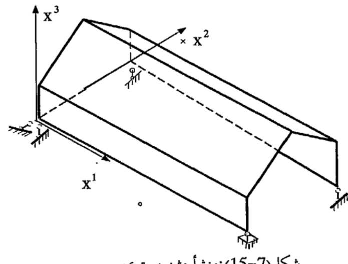
هنا يجب ملاحظة أن b,e قرينة تعبر عن تتالي أطراف العنصر المنتهي وتأخذ القيم:

(i)(j), (j)(k), (k)(l), (l)(i) على التوالي.

يتم تجميع الطاقة المتممة المعدلة بالشكل المألوف على مستوى العنصر وتحسب المجاهيل بدلالـة انتقالات العقد بعد أخذ المتغير الأول للطاقة المتممة المعدلة على مسـتوى العنصـر. وخطـوات الاشتقاق واردة في العلاقات (5.86) وحتى (5.98) ولاداعي لتكرارها والاختلاف الوحيد هنـا

هو في تحويل مصفوفات العنصر للشريحة من المحاور الإحداثية الخاصة إلى المحاور الإحداثية العامـــة. وعلى القارئ استنتاجها بنفسه على غرار ما فعلناه لحالة البلاطة الرقيقة ولحالات أخرى.

7-5-عنصر منتهي مستطيل هجين لحل مسائل المنشآت المثنية المستوية:



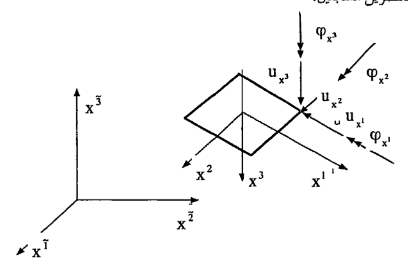
شكل(7-15):منشأ مثني مستوي.

المنشآت المثنية المستوية هي هندسيا عبارة عن منشآت مركبة من سطوح متعددة تلتقي ســطوحها في حروف أو زوايا (شكل7-15).وقد تكون أحيانا سطوحها منحنية.وتصنف هــذه المنشـــآت عادة حسب شكلها فنجد فيها المنشآت الموشورية والهرمية والنصف هرميـــة ومنشـــآت مثنيـــة منحنية. تتميز هذه المنشآت عادة بطبولوجيتها الهندسية غير المستمرة نظرا لوجود حروف أو زوايا فيها وبالتالي تكون التوابع التي تصف هذه السطوح غير مستمرة حيث يكون مشتقها الأول عنـــد نقاط الانكسار مختلفا ويقال عندها أنها لاتحقق شرط الاستمرارية c^1.

تستخدم عادة الطريقة الهجينة لحل مثل هذه المنشآت وذلك بغية التخلص من شروط الاســتمرارية الواجب تحقيقها عند استخدام الطرق الأخرى.

وبتوافر المعطيات الأساسية للعنصر المنتهي -النموذج الهجين لدراسة البلاطات وللعنصر المنتـــهي- النموذج الهجين لدراسة الشرائح والمعروضين في الفصل السادس والسابع من هذا الكتاب. تتوفـــر

المعطيات الأساسية للعنصر المنتهي في حل المنشآت المثنية المستوية.إذ أن العنصر هـــذا ليـس إلا تركيب للعنصرين السابقين.



شكل 7-16:عنصر منتهي مثني مستوي مستطيل.

لنتأمل الشكل7-16 ،فدرجات الحرية لعقدة ما في الفراغ هي ستة وهي الانتقـــالات في اتجـاه المحاور الإحداثية الثلاثة والدورانات حولهـا.ثلاثـة منـها تميز درجـات الحريـة للشـريحة وهي: $u_{x^1}, u_{x^2}, \varphi_{x^3}$ والأخرى تميز درجات الحرية للبلاطـة وهـي: $\varphi_{x^1}, \varphi_{x^2}, u_{x^3}$. وتتميز طبيعة عمل العنصر المثني المستوي باحتوائها على طبيعة عمل الشريحة.وطبيعة عمل عنصـر البلاطة في نفس الوقت. وعليه يتركب شعاع انتقالات عقدة ما من عنصر مثني مسـتوي مـن درجات الحرية الستة هذه:

$$u_f = \{u_s \quad u_p\}$$
$$u_s = \{u^\circ_{x^1} \quad u^\circ_{x^2} \quad \varphi^\circ_{x^3}\}; u_p = \{u^\circ_{x^3} \quad \varphi_{x^1} \quad \varphi_{x^2}\} \qquad (7.187)$$

وتستخدم الأحرف p, s, f للدلالة على قيم التأثير المميزة للعنصر المثني المستوي وعنصر الشـريحة وعنصر البلاطة على التوالي.

ويتركب تابع القوى المفترض لعنصر مثني مستوي من تابعين أولهما عائد لعنصر الشريحة ويحـوي قوى المقطع: $n_s = \{n^{x^1x^1} \quad n^{x^2x^1} \quad n^{x^1x^2} \quad n^{x^2x^2}\}$ الممثلة توابعها بالتابع المفترض (7.172)

وثانيهما عائد للبلاطة ويحوي قوى المقطع $m_p = \{m^{x^1x^1} \quad m^{x^2x^1} \quad m^{x^1x^2} \quad m^{x^2x^2}\}$ الممثلة توابعها بالتابع المفترض (6.207) .

$$s_f = \{n_s \quad m_p\} \tag{7.188}$$

كما يتركب تابع الانتقالات الطرفية $u_i^{fb,e}$ من جزأين أولهما خـــاص بالشـــريحة $u_i^{sb,e}$ وممثـــل بالعلاقة (7.178) وثانيهما خاص بالبلاطة $u_i^{pb,e}$ وممثل بالعلاقة(6.213).

$$u_i^{fb,e} = \{u_i^{sb,e} \quad u_i^{pb,e}\} \tag{7.189}$$

وكذلك الأمر بالنسبة لتوابع قوى المقطع الطرفية $p_{pb,e}^{\ i}$ والممثلة بالجزأين $p_{sb,e}^{\ i}$ المعطى بالعلاقة (7.177) و $p_{pb,e}^{\ i}$ المعطى بالعلاقة (6.212).

$$p_{fb,e}^{\ i} = \{p_{sb,e}^{\ i} \quad p_{pb,e}^{\ i}\} \tag{7.190}$$

وتجمع أيضا القوى الخارجية المؤثرة على أطراف العنصر المثني المستوي $\bar{p}^i_{fb,e}$ من الجزء الخـــاص بالشريحة $\bar{p}^i_{sb,e}$ وهو معطى بالعلاقة (7.184) ومن الجزء الخاص بالبلاطة $\bar{p}^i_{pb,e}$ وهو معطـــى بالعلاقة (6.187).

$$\bar{p}^i_{fb,e} = \{\bar{p}^i_{sb,e} \quad \bar{p}^i_{pb,e}\} \tag{7.191}$$

وعلى هذا الأساس تكون مصفوفات العنصر (على سبيل المثال $\bar{S}, K, \bar{T}, T, \bar{H}, H$) للعنصر المثني المستوي ما هي إلا تجميع لمماثلاتها لحالة الشريحة والمستنتجة في الفقرة 7-4 وتلك لحالة البلاطـــة والمستنتجة في الفقرة 6-5 . والعلاقة التالية تمثل هذا التجميع:

$$K_f = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_p \end{bmatrix} \tag{7.192}$$

K_F : مصفوفة القساوة للعنصر المثني المستوي. K_S : مصفوفة القساوة للشريحة.

K_P : مصفوفة القساوة للبلاطة.

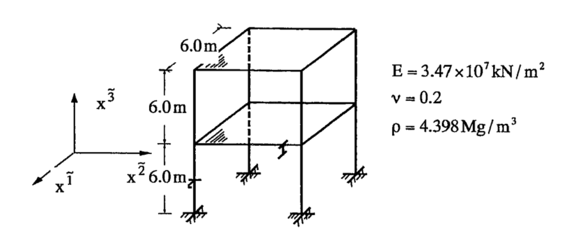
وكأحد الأمثلة العملية لاستخدام العناصر المنتهية المثنية المستوية المشروحة في الفقرة 7-5 يـــدرس إطار طابقي فراغي (شكل 7-17-أ) مقوى ببلاطات تغطية بيتونية. تتواجـــد علـــى ســـطوح البلاطات كتلة إضافية موزعة بانتظام اعتبرت ككثافة إضافية لمادة البلاطات وهذا ما يفسر الكثافة الذاتية المرتفعة لهذه البلاطات. صنعت بلاطات التغطية من صنف البيتون BK35 وفق المواصفات

المعيارية الألمانية. وأعمدة الإطار الطابقي وجوائزه المتوضعة تحت الأطراف الأربعة لكـــل بلاطـــة تمتلك المقطع I400 وفق المواصفات المعيارية الألمانية.

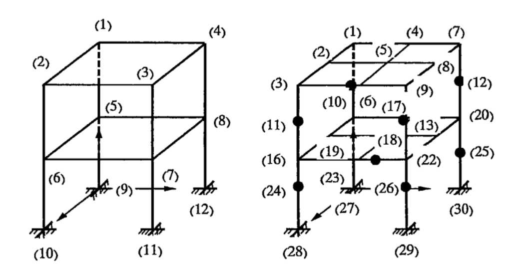
يدرس المنشأ تحت تأثير حالات تحميل مختلفة وبتقسيمين شبكيين. التقسيم الشبكي الأول يمثلـــه الشكل 7-17-ب، ويتألف من عنصرين مثنيين مستويين حيث اعتبرت كل بلاطة تغطية بأكملها كعنصر منتهي،ومن ستة عشر عنصرا منتهيا إطاريا فراغيا حيث أخذ القضيب بأكمله كعنصـــر منتهي. والتقسيم الشبكي الثاني يتألف من ثمانية عناصر منتهية مثنية مستوية واثنان وثلاثون عنصرا منتهيا إطاريا فراغيا (شكل 7-17-ج).وقد نسب المنشأ إلى جملة محاور إحداثية عامة ونسب كل عنصر منتهي إلى جملة محاور إحداثية خاصة.

تتمثل حالات التحميل التي درس المنشأ تحت تأثيرها بأربعة حالات تحميل وهي حـــالتين لكـــل تقسيم شبكي.حالتي التحميل للتقسيم الشبكي المبين في الشكل (7-17-ب) مثلت في الشكلين (7-18-أ)و(7-18-ب).والحمولات متساوية على أركان البلاطات الأربعة وهـــي متســـاوية أيضا في منتصف أطراف البلاطات بالنسبة للتقسيم الشبكي الثاني.ومثلت العزوم $M_{\bar{1}}$ المنسوبة إلى جملة المحاور الإحداثية العامة والناشئة عن حالتي التحميل السابقتين في الشـــكلين(7-18-ج)و(7-18-د).وحالتي التحميل للتقسيم الشبكي المبين في الشكل (7-17-ح) مثلت في الشـــكلين(7-19-ا)و(7-19-ب) والعزوم $M_{\bar{1}}$ الناشئة عنها في الشـــكلين (7-19-ج)و(7-19-د).وقـــد استغني عن تمثيل العزوم الناشئة في بلاطات التغطية لضآلتها بالنسبة للعزوم المتصـــة مـــن قبـــل القضبان الإطارية. واستغني أيضا عن كتابة مقادير العزوم المتماثلة علـــى الأشـــكال الســـابقة،إذ بإمكان القارىء استنتاجها من دراسته لحالة تناظر الحمولات. ولكي نوضح للقارىء طبيعة هـــذه الحمولات ولماذا اختيرت بهذا الشكل نود أن نذكر هنا أن الحمولات السابقة ناشئة عن دراســـة المنشأ الإطاري الفراغي تحت تأثير الزلازل بطريقة طيوف التجاوب الخطيـــة وهـــي الحمـــولات الستاتيكية المكافئة لتأثير تسارع أرضي في قاعدة المنشأ مقداره $1.08\ m/sec^2$. وقد شـــكلت مصفوفات القساوة العامة من مصفوفات العناصر للبلاطة والشريحة وقضيب الإطار الفراغـــي.و المثال يهدف قبل أي شيء إلى إعطاء القارىء لمحة بسيطة عن إمكانية استخدام العناصر السابقة في

التطبيقات العملية وربما حسابات مقارنة في حال أراد القارىء تطوير العناصر السابقة بنفســـه في برنامج حساب بطريقة العناصر المنتهية.

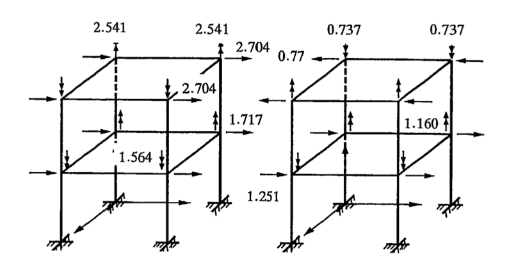


شكل 7-17-أ) منشأ إطاري فراغي ببلاطات تغطية بيتونية أفقية

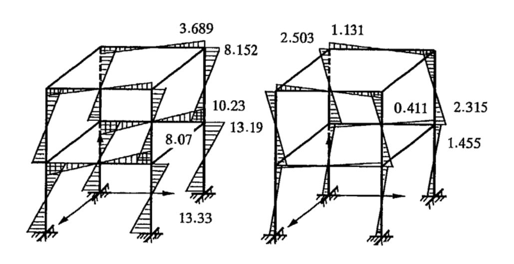


شكل 7-17-ج: التقسيم إلى عناصر منتهية   شكل 7-17-ب: التقسيم إلى عناصر منتهية

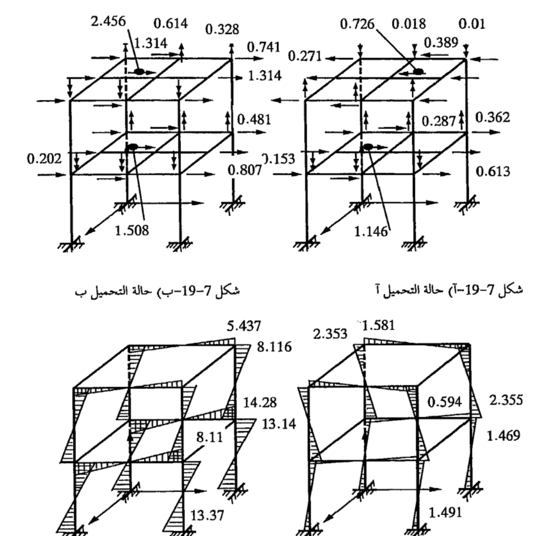
8 عناصر مثنية مستوية ، 32 عنصر إطاري فراغي،ترقيم العناصر .   عنصران مثنيان مستويان ، 16 عنصر إطاري فراغي ، ترقيم العناصر .



شكل 7–18–آ) حالة التحميل آ   شكل 7–18–آ) حالة التحميل ب



شكل 7–18–ج)العزم $M_{آ}$ لحالة التحميل آ   شكل 7–18–د) $M_{آ}$ لحالة التحميل ب



شكل 7–19–ب) حالة التحميل ب

شكل 7–19–آ) حالة التحميل آ

شكل 7–19–د) $M_{\bar{I}}$ لحالة التحميل ب

شكل 7–19–ج)العزم $M_{\bar{I}}$ لحالة التحميل آ

المصادر العلمية:

استخدمت بالإضافة إلى مصادر الفصلين الخامس والسادس المصادر التالية:

1-Mueller,H.
Arbeitsblaetter fuer den Weiterbildungslehrgang
Rechner orientierte Kontinuumsmechanik-Einfuehrung in die Methode der finiten Elemente. TU Dresden 1984

2- Mueller,H.;Moeller,B.
Lineare und physikalisch nichtlineare statik von Falt-werken Baustein 1 und 2 des programm systems FALT-FEM Grundlage und Beispiele; Bauforschung-Baupraxis Bauinformation der DDR,Berlin 1985 ; Heft 155.

3- Mattheiss
Platten und Scheiben
Werner Verlag,Duesseldorf,1982.

4- Mueller,H.;Moeller,B.;Hoffman,A.;Abo Diab,S.
Faltwerksmechanik mit FALT-FEM-Kinetik und Stabilitaet sowie neuere Anwendungsfaelle
Bauplanung-Bautechnik,4(1987) 1,s.30-30

5- Moeller,B.
Nichtlineare Statik von Stahlbeton-Faltwerken
TU Dresden,Forschungsbericht 1983.

6- Mueller,H.;Moeller,B.
Ein hybrides mehrschichtiges Faltwerkelement
Wissenschaftlische Zeitschrift der TU Dresden,Heft 5,1979.

7- Baumgaertel,W.
Erweiterungen zur Statik von Faltwerken im Rahmen von FALT-FEM 1 und 2 und Aufbau einer PL-Version
TU Dresdeu,Diss.,1989.

8- Poerschmann.H.(Hrsgr)
Bautechnische Berechnungstafeln fuer Ingenieure
BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft,Leipzig 1984.

الملحق الأول :

مثلث باسكال ، كثيرات حدود لاغرنج كثيرات حدود من نموذج Serendipity

تسمّى عملية إيجاد تابع تقريبي ما $\hat{g}(x^1)$ من مجموعة معينة من التوابع G (مجموعة كثيرات الحدود ، مجموعة التوابع المثلثية ، التوابع القطعية ، التوابع الأسية ، ...) و الذي تختلف قيمته عن قيمة تابع ما $f(x^1)$ غير منتمي للمجموعة G أقل اختلاف ممكن بعملية التقريب أو ما يطلق عليها (Approximation) . و كمقياس لاختلاف قيم التابع التقريبي عن التابع المقرّب يوجد ما يسمّى بالمعيار النصفي وهو العدد $\|\ell(x^1)\|$ الذي يخص التابع $\varphi(x^1)$ المنتمي إلى مجموعة تابعية V و يحقق الخواص التالية :

$$\|\varphi\| \geq 0; \text{ for all } \varphi \in V$$
$$\|a.\varphi\| \geq |a|\|\varphi\|; \text{ for all } a \in R, \varphi \in V \quad (1)$$
$$\|\varphi + \phi\| \leq \|\varphi\| + \|\phi\|; \text{ for all } \varphi, \phi \in V$$

R مجموعة الأعداد الحقيقية ، a قيمة من ϕ, R تابع كـ φ من المجموعة V . و المسألة المطروحة في عملية التقريب يمكن التعبير عنها رياضياً بمايلي :

لأجل تابع معطى $f \in V$ يجب إيجاد التابع $\hat{g} \in G$ المحقق للشرط :

$$\|f - \hat{g}\| = \inf\|f - g\| \text{ or } \|f - \hat{g}\| \leq \|f - g\| \quad (2)$$

من أجل أي تابع آخر g من المجموعة G . يسمى المقدار :

$$D_G(f) = \inf_{g \in G}\|f - g\| \quad (3)$$

بالانحراف الأصغري عن f بما يتعلق بالمجموعة G . في حال وجود التابع $\hat{g}$ المحقق للشرط (2) يسمى هذا التابع بأفضل تقريب لـ f في المجموعة G . و تختلف مسائل التقريب عن بعضها البعض بالمعيار النصفي المتخذ φ أو المجموعة التي يتم فيها التقريب G. في حالة استخدام ما يسمى التقريب الخطي تكون المجموعة G فراغا خطيا . و في مسائل الحساب العددي يكون عادة الفراغ $G = G_n$ فراغا محدود الأبعاد حيث يمكن لأي تابع $g(x^1)$ من G_n أن يكون تركيبا خطيا من توابع مستقلة خطيا منتمية إلى G_n (توابع القاعدة) بالشكل :

$$g(x^1) = a_1 g^1(x^1) + a_2 g^2(x^1) + \cdots + a_n g^n(x^1) \quad (4)$$

و التوابع المستقلة الشائعة الاستعمال في التقريب هي كثيرات الحدود بالأمثال الحقيقية و تكـــون توابع قاعدها الواردة في (4) كمايلي :

$$g^1(x^1) = 1; g^2(x^1) = x^1; g^3(x^1) = (x^1)^2, \cdots, g^n(x^1) = (x^1)^{n-1} \quad (5)$$

و هناك أيضاً التوابع المثلثية ، التي يتركب فيها التابع من كثير حدود مثلثي :

$$\hat{g}(x^1) = c/2 + \sum_{i=1}^{n} c_i \cos ix^1 + \sum_{j=1}^{n} dj \sin jx^1 \quad (6)$$

و بما يتعلق بالمعيار النصفي المتخذ هناك أنواع من التقريب يكتفـــى بذكرهـــا و هـــي تقريـــب Tschebyschow و التقريب المربع .

الآن في فراغ ثنائي الأبعاد متحولاته المستقلة x^1, x^2 تشكل بانتظام التراكيب :

$$g(x^1, x^2) = (x^1 + x^2)^n ; n = 0,1,2,3, \cdots, n-1 \quad (7)$$

وحتى المرتبة السادسة تكون هذه التراكيب كالتالي:

درجة أولى $(x^1 + x^2)^0 \rightarrow$

درجة ثانية $(x^1 + x^2)^1 \rightarrow$

درجة ثالثة $(x^1 + x^2)^2 \rightarrow$

درجة رابعة $(x^1 + x^2)^3 \rightarrow$

درجة خامسة $(x^1 + x^2)^4 \rightarrow$

درجة سادسة $(x^1 + x^2)^5 \rightarrow$

فإذا رتبت مناشير هذه التراكيب بعد حذف أمثال المتحولات حصلنا على التركيب الهرمي :

$$1$$

$$x^1 \qquad x^2$$

$$(x^1)^2 \qquad x^1x^2 \qquad (x^2)^2$$

$$(x^1)^3 \qquad (x^1)^2x^2 \qquad x^1(x^2)^2 \qquad (x^2)^3$$

$$(x^1)^4 \qquad (x^1)^3x^2 \qquad (x^1)^2(x^2)^2 \qquad x^1(x^2)^3 \qquad (x^2)^4$$

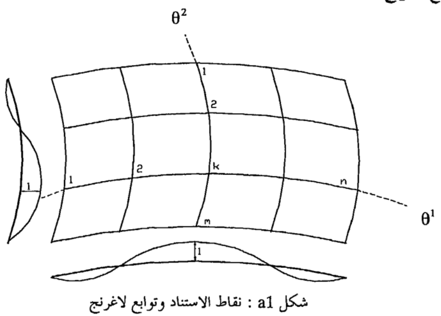
$$(x^1)^5 \qquad (x^1)^4x^2 \qquad (x^1)^3(x^2)^2 \qquad (x^1)^2(x^2)^3 \qquad x^1(x^2)^4 \qquad (x^2)^5$$

حيث يوجد في كل سطر كافة المتحولات المستقلة الموجودة في منشور الدرجة الموافقة لرقم السطر . يطلق على التركيب الهرمي السابق اسم مثلث باسكال . فلو كتبنا أمثال مفكـــوك الـــتراكيب السابقة لتشكل أيضاً المثلث التالي المسمى أمثال مثلث باسكال:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

يلاحظ في مثلث باسكال الرتابة في استنباط الحدود ، إذ أن كل درجة من توابع باسكال تحتـــوي كافة التباديل الممكنة للمتحولين المستقلين بحيث يكون المجموع الأسي لهما مساو لدرجـــة كثـــير الحدود نفسها . كما أن أي حد من حدود درجة معينة في مثلث المتحولات المستقلة ينتج مـــــن ضرب الحدين الواقعين فوقه للدرجة الأدنى ببعضهما البعض و أمثال الحـــد المقصـــود في مثلـــث الأمثال تنتج بجمع الحدين المذكورين . و يلاحظ أن مشتق كثير حدود من درجة ما سواء بالنسبة لـــ x^1 أو لـــ x^2 يحوي كافة حدود الدرجة الأدنى . هذا يعني أن هذه التوابع يمكن أن تحقـــق شروط الاستمرارية من المرتبة الأولى . (الاستمرارية c^1) عند اســـــتخدامها لوصـــف حالـــة الانتقالات لسطح إنشائي ما . و باعتبار أن استنباط حدود الدرجات العليا يتـــم بنظاميـــة مـــن الدرجات الأدنى يقال عن هذه التوابع بأنها تامة . و توابع باسكال هذه تحقق كل شروط التقارب إلى الحل الدقيق المفترض أن تحققها التوابع التقريبية للعناصر المنتهية . و لكن من المؤســـف عـــدم تطابق عدد حدود توابع باسكال مع عدد درجات الحرية مضروبا بعدد عقـــد العنصـــر لغالبيـــة العناصر المنتهية . و في قليل من العناصر يتطابق هذان العددان كالعنصر المنتهي المثلث الخطـــي و العنصر المنتهي المربع الخطي . يذكر بأن الدراسة السابقة سارية المفعول أيضا للإحداثيات الطبيعيـة

توابع لاغرنج :



شكل a1 : نقاط الاستناد وتوابع لاغرنج

لنفرض أنه لدينا عنصر منتهي نود فرض التوابع التقريبية للانتقالات فيه بحيث تكون قيمة هذا التابع واحد في عقدة ما (k) فيه ،و لتكن المحاطة بدائرة و في بقية العقد الأخرى مساوية للصفر . لنرسم شبكة من الخطوط الإحداثية و لتكن الموافقة للإحداثيات الطبيعية (θ^1,θ^2) والتي تتقاطع فيما بينها في العقد . على الخط الإحداثي θ^1 حيث يكون θ^2 ثابتاً لنفرض أنه تشكلت لدينا n عقدة . على هذا الخط يمكن فرض تابع تقريبي متعلق بالإحداثي θ^1 فقط و يملك في العقدة (k) القيمة 1 و في بقية العقد الأخرى القيمة صفر . و التابع التقريبي التالي يملك مثل هذه الخاصيّة :

$$L^n{}_{(k)} = \frac{(\theta^1 - \theta^1_{(1)})(\theta^1 - \theta^1_{(2)})...(\theta^1 - \theta^1_{(k-1)})(\theta^1 - \theta^1_{(k+1)})...(\theta^1 - \theta^1_{(n)})}{(\theta^1_{(k)} - \theta^1_{(1)})(\theta^1_{(k)} - \theta^1_{(2)})...(\theta^1_{(k)} - \theta^1_{(k-1)})(\theta^1_{(k)} - \theta^1_{(k+1)})...(\theta^1_{(k)} - \theta^1_{(n)})} \quad (7)$$

بالفعل إذا عوضنا الإحداثي θ^1 بقيمته عند العقدة (k) و هي $\theta^1_{(k)}$ في العلاقة السابقة تكون قيمة $L^n{}_{(k)}$ مساوية للواحد ، و عند تعويض قيمة الإحداثي θ^1 لأي عقدة أخرى يأخذ التابع

التقريبي السابق القيمة صفر . و بالمثل على الخط الإحداثي θ^2 حيث يكون θ^1 ثابتا و تتشكل عليه m عقدة يفرض التابع التقريبي متعلق بالإحداثي θ^2 فقط على نفس الشاكلة :

$$L^m{}_{(k)} = \frac{(\theta^2 - \theta^2_{(1)})(\theta^2 - \theta^2_{(2)})...(\theta^2 - \theta^2_{(k+1)})(\theta^2 - \theta^2_{(k+1)})...(\theta^2 - \theta^2_{(m)})}{(\theta^2_{(k)} - \theta^2_{(1)})(\theta^2_{(k)} - \theta^2_{(2)})...(\theta^2_{(k)} - \theta^2_{(k-1)})(\theta^2_{(k)} - \theta^2_{(k+1)})...(\theta^2_{(k)} - \theta^2_{(m)})} \quad (8)$$

يفترض الآن تابع الشكل على مساحة العنصر والموافق للعقدة (k) كجداء للتابعين $L^m{}_{(k)}, L^n{}_{(k)}$

$$N^{mn}_{(k)} = L^m{}_{(k)} L^n{}_{(k)} \quad (9)$$

وهذا التابع يحقق خاصية مساواته للواحد في العقدة (k) والصفر في بقية العقد الأخرى . وهكذا تشكل توابع الشكل الخاصة بكل عقدة. والتابع التقريبي المفترض لكامل العنصر يصبح مجموع جداءات تابع الشكل الخاص بكل عقدة في درجة الحرية المفترضة للعقدة نفسها . يتضح من طريقة التشكيل لتوابع الشكل أنه باستطاعتنا نظريا الحصول على توابع تقريبية ككثيرات حدود من أي درجة نريدها و ذلك بزيادة عدد عقد العنصر المستخدمة للاستنباط . عمليا يؤدي زيادة عدد العقد إلى ظهور عدد كبير من العقد الداخلية ضمن العنصر والمنفصلة تماما عن عقد العناصر المنتهية الأخرى المجاورة ويجب اعتبارها في جملة المعادلات النهائية لانتقالات العقد ، ومعاملتها كمجاهيل حيث يجب حسابها مع أنها لا تؤثر رياضيا على العناصر المنتهية الأخرى. وعلاقتها الرياضية أو الإنشائية خاصة بالعنصر المفترض وجودها فيه . كما أن كثيرات الحدود من الدرجات العليا تبدي سلوكا سيئا في تقريبها للإنحناءات . ويلاحظ في كثيرات الحدود الناتجة من طريقة لاغرنج هذه وجود المتحولات المستقلة بدرجات عليا بينما يفتقد أحيانا وجود هذه المتحولات بدرجات دنيا . و هذا يؤدي في كثير من الأحيان إلى خواص عددية سيئة لمصفوفة القساوة للعناصر المنتهية وتظهر هذه الخواص السيئة جلية أثناء حلول المعادلات النهائية لكامل المنشأ أو أثناء حساب القيم الذاتية لمصفوفة القساوة . ويلاحظ أن، هذه التوابع تنتج أيضا من مثلث باسكال (في الحالة $m = n$) من أخذ الحدود الواقعة في مساحة معين مقتطع من المثلث .

$$1$$
$$\theta^1 \qquad \theta^2$$
$$(\theta^1)^2 \qquad \theta^1\theta^2 \qquad (\theta^2)^2$$
$$(\theta^1)^3 \qquad (\theta^1)^2\theta^2 \qquad \theta^1(\theta^2)^2 \qquad (\theta^2)^3$$
$$(\theta^1)^3\theta^2 \qquad (\theta^1)^2(\theta^2)^2 \qquad \theta^1(\theta^2)^3$$
$$(\theta^1)^3(\theta^2)^2 \qquad (\theta^1)^2(\theta^2)^3$$
$$(\theta^1)^3(\theta^2)^3$$

$$1$$
$$(\theta^1)^n \qquad (\theta^2)^n$$
$$(\theta^1)^n(\theta^2)^n$$

التوابع التقريبية من نموذج Serendipity :

تتصف توابع هذا النموذج بعدم قابلية استنباطها برتابة و نظامية كتوابع لاغرنج الآنفة الذكر . كما أن العقد اللازمة لاستنباط التوابع التقريبية تنحصر عادة في عقد زوايا العنصر و عقد واقعة على أطراف العنصر و من النادر احتياجنا لعقد واقعة ضمن العنصر المنتهي كما هو في الحال في توابع لاغرنج ولكن احتمال مثل هذا الاحتياج وارد و خاصة في كثيرات الحدود من المراتب العليا . وافتراض توابع تقريبية من درجات عليا لهذا النموذج يتطلب عادة خبرة . و هناك إمكانية لافتراض هذه التوابع من المراتب الدنيا بنظامية باقتطاع حدود من مثلث باسكال . و يتم هذا الاقتطاع كما يبيّن الشكل التالي :

$$1$$
$$\theta^1 \qquad \theta^2$$
$$(\theta^1)^2 \qquad \theta^1\theta^2 \qquad (\theta^2)^2$$
$$(\theta^1)^3 \qquad (\theta^1)^2\theta^2 \qquad \theta^1(\theta^2)^2 \qquad (\theta^2)^3$$
$$(\theta^1)^3\theta^2 \qquad \theta^1(\theta^2)^3$$

$$1$$
$$\theta^1 \qquad \theta^2$$
$$(\theta^1)^m \qquad (\theta^2)^m$$
$$(\theta^1)^m\theta^2 \qquad \theta^1(\theta^2)^m$$

والتابع التقريبي الذي افترض ممثلا لانتقالات سطح العنصر المنتهي للبلاطة الرقيقة و المسمى بـــــ $A\bar{C}M$ هو من نموذجنا هذا . يجب الانتباه أثناء افتراض التوابع التقريبية إلى المحافظة على تناظرها بالنسبة لمنصف مثلث باسكال و ذلك من أجل ضمان خاصية ثبات خواص العنصر المنتهي أثنـــاء تبديل تسمية المحاور الإحداثية . تختلف مسودة افتراض التوابع التقريبية وفق اختـــلاف الشـــكل الهندسي للعنصر المنتهي و بالتالي عدد درجات الحرية المتخذة لكل عقدة. وبالتالي هذه المســـودة مختلفة بالنسبة للعناصر المنتهية المثلثية الشكل وعلى القارىء تلبية احتياجاتـــه في مجـــال معالجـــة الأشكال الهندسية المختلفة للعناصر المنتهية من المراجع المذكورة في هذا الكتاب أو مـــن مراجـــع أخرى .

الملحق الثاني :

التكامل العددي :

التكامل العددي هو عملية إيجاد قيم التكاملات المحددة الأحادية أو المتعددة الإبعاد عدديا . ففـــي كثير من الأحيان و خاصة للتكاملات المحدودة المتعددة الأبعاد من الصعوبة بمكان إيجـــاد التـــابع الأصلي للتابع المكامل . يحسب التكامل المحدد الأحادي الأبعاد بالصيغة التربيعية العامة :

$$\int_a^b f(x^1)dx^1 = [f] + R_a^b[f] \qquad (1)$$

$I_a^b[f]$ قيمة التكامل التقريبية ، $R_a^b[f]$ الخطأ المتبقي . و يحسب التكامل المحدود المتعدد الأبعـــاد بالصيغة التكعيبية التالية :

$$\int \cdots \int_m f(x^1, x^2, ..., x^m) dx^1 dx^2 ... dx^m = I_B[f] + R_B[f] \qquad (2)$$

$I_B[f]$ قيمة التكامل التقريبية ، $R_B[f]$ الخطأ المتبقي . في كثير من صيغ التكامل العددي يمكن تخمين الأخطاء المتبقية . و فيما يلي ستعرض الصيغ التربيعية للتكامل العددي بإيجاز بينما سيستغنى عن عرضها للصيغ التكعيبية .

صيغ القيمة المتوسطة للتكامل العددي :

فكرة هذه الصيغة بسيطة و تتلخص بما يلي : إذا علمت قيم التابع المراد مكاملتــه $y = f(x)$ في النقاط x_i و لتكن هذه القيم $y_i = f(x_i)$ حيث x_i قيم تقع ضمن مجال التكـامل $[a,b]$ أي $a \leq x_o \leq x_1 \langle ... \langle x_n \leq b$ ، عندها يمكن تقريب التابع المراد مكاملته بكثير حدود من الدرجـة $n+1$ (إذ أن عدد النقاط x_i المعتبرة $n+1$) والأخير يملك تابعاً أصليـــاً معروفـــاً و يمكـــن حساب تكامله بدقة . والشكل العام لصيغ القيم المتوسطة للتكامل العددي هو :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{p}\sum_{i=1}^{n} p^i y_i + R_a^b[f] \qquad (3)$$

حيث $p^i \rangle 0$ و $p^1 + p^2 + \cdots + p^n = p$ و يطلق عليها أوزان القيم y_i للتـــابع $y(x)$. و تنتج الصيغ المختلفة المعروفة للتكامل العددي وفق الفرضيات حول عدد و موقع نقاط الاســتنباط y_i أو حو ل الأوزان p^i . هناك صيغ متعددة للتكامل العددي تنتج من استخدام توابع لاغرنج المذكورة في الملحق الأول لتقريب التابع المكامل ، حيث تصبح الصيغة (3) كما يلي :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{nh}{p^n}\sum_{j=0}^{n} f(a+jh)p^{jn} + R_n[f] \qquad (4)$$

حيث :

$$p^n = \sum_{j=0}^{n} p^{jn};\ h = \frac{b-a}{n};\ x_o = a;\ x_n = b \qquad (5)$$

هذه الصيغة العامة تحوي صيغ معروفة في التكامل العددي . فمن أجل $n=1$ تمثـــل الصيغـــة (4) صيغة شبه المنحرف في التكامل العددي ، و من $n = 2$ صيغة سمبسون أو كبلر و من أجل $n = 3$ تمثل صيغة ($\frac{3}{8}$ – نيوتن) و الجدول التالي يعطي المعاملات p^{jn}, p^n, n للصيغ المعروفة هذه :

n	p^n	p^{0n}	p^{1n}	p^{2n}	p^{3n}	p^{4n}	p^{5n}	p^{6n}
1	2	1	1					
2	6	1	4	1				
3	8	1	3	3	1			
4	90	7	32	12	32	7		
5	288	19	75	20	20	75	19	
6	840	41	216	27	272	27	216	41

عند تحويل التكامل العددي إلى تكامل ضمن المجال $[-1,+1]$ بالشكل :

$$I=\int_{-1}^{+1} f(x)dx=\sum_{i=1}^{n} H_i f(x_i) \qquad (6)$$

سوف نجد أن صيغة شبه المنحرف و صيغة سمبسون و صيغة نيوتن تتمثل على التوالي بالعلاقات :

$$I=f(-1)+f(+1)$$

$$I=\frac{1}{3}\left[f(-1)+4f(0)+f(+1)\right] \qquad (7)$$

$$I=\frac{1}{4}\left[f(-1)+3f(-\tfrac{1}{3})+3f(\tfrac{1}{3})+f(+1)\right]$$

و هذه العلاقات تفسر طريقة استخدام معاملات الجدول السابق .

صيغة غاوس التربيعية :

هذه الطريقة في إنجاز التكاملات العددية تعتمد في البدء على تحديد عدد نقاط الاستنباط x_i و ليس على تحديد مواقعها . بعد تحديد عدد نقاط الاستنباط أو نقاط غاوس الوزنية يحاول المرء حساب الأوزان و تحديد إحداثيات نقاط الاستنباط بحيث يكون خطأ التكامل أصغر ما يمكن .

فإذا أردنا تحديد التابع التقريبي الممثل لتابع التكامل :

$$I=\int_{-1}^{+1} f(\theta)d\theta=\sum_{i=1}^{n} H_i f(\theta^i) \qquad (8)$$

حيث θ^i إحداثيات نقاط الاستنباط ، H_i أوزان غاوس ، فلعدد n من هذه النقاط لدينا 2n مجهول ممثلة بقيم التابع $f(\theta^i)$ و الأوزان H_i . و كثير الحدود الذي يجب افتراضه للتقريب من الدرجة 2n-1 و خطأ التكامل من الدرجة $o(\Delta^{2n})$. يبرهن أن للمعادلات الآنية الناتجة عن افتراض التابع التقريبي حلولا بصيغة ما يعرف بكثيرات حدود Legendre . و في الجدول a2 نجد قيم الإحداثيات θ لنقاط الاستنباط و الأوزان H لأعداد مختلفة من نقاط غاوس.

أثبتت صيغة غاوس التربيعية جدارتها للاستخدام في تطوير مصفوفات العنصر للعناصر المنتهية ذات الطبولوجية الهندسية المعقدة . و سوف تبرمج هذه الطريقة لتطوير مصفوفة القساوة لعنصر البلاطة ACM في الملحق الثالث من هذا الكتاب .

n		± θ			H	
1	0.00000	00000	00000	2.00000	00000	00000
2	0.57735	02691	89626	1.00000	00000	00000
3	0.77459	66692	41483	0.55555	55555	55556
	0.00000	00000	00000	0.88888	88888	88889
4	0.86113	63115	94053	0.34785	48451	37454
	0.33998	10435	84856	0.65214	51548	62546
5	0.90617	98459	38664	0.23692	68850	56189
	0.53846	93101	05683	0.47862	86704	99366
	0.00000	00000	00000	0.56888	88888	88889
6	0.93246	95142	03152	0.17132	44923	79170
	0.66120	93864	66265	0.36076	15730	48139
	0.23861	91860	83197	0.46791	39345	72691
7	0.94910	79123	42759	0.12948	49661	68870
	0.74153	11855	99394	0.27970	53914	89277
	0.40584	51513	77397	0.38183	00505	05119
	0.00000	00000	00000	0.41795	91836	73469

الجدول a2 : قيم الإحداثيات θ لنقاط الاستنباط و الأوزان H لأعداد مختلفة من نقاط غاوس.

أثناء تطوير مصفوفة القساوة للعنصر المذكور نجد أنفسنا أمام تكامل ثنائي على مساحة سطح العنصر من الشكل :

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\theta^1,\theta^2)d\theta^1 d\theta^2 \qquad (9)$$

يحسب في البدء التكامل بالنسبة لـ θ^1 باعتبار θ^2 ثابت و ذلك كما يلي :

$$\int_{-1}^{+1} f(\theta^1,\theta^2)d\theta^1 = \sum_{j=1}^{n} H_j f(\theta^1_{(j)},\theta^2)d\theta^1 = \psi(\theta^2) \qquad (10)$$

و من ثم يحسب التكامل بالنسبة لـ θ^2 :

$$I = \int_{-1}^{+1} \psi(\theta^2)d\theta^2 = \sum_{i=1}^{n} H_i \psi(\theta^2_{(i)}) = \sum_{i=1}^{n} H_i \sum_{j=1}^{n} H_j f(\theta^1_{(i)},\theta^2_{(j)})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} H_i H_j f(\theta^1_{(i)},\theta^2_{(j)}) \qquad (11)$$

و هكذا تحسب قيمة التكامل (9) ببساطة بحساب قيم التابع $f(\theta^1,\theta^2)$ في نقاط الاستنباط أو نقاط غاوس الوزينة المعطاة إحداثياتها θ^1,θ^2 و أوزانها H_i في الجدول السابق ومن ثم تجمع القيم الناتجة بعد ضربها بالأوزان H_i على كامل النقاط المعتبرة . و عند الإنتقال إلى دراسة العناصر المنتهية الحجمية نواجه مسألة حساب التكامل الحجمي :

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\theta^1,\theta^2,\theta^3)d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \qquad (12)$$

يحسب هذا التكامل بشكل مشابه للعلاقة (11) ، و العلاقة التالية تمثل طريقة هذا الحساب :

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\theta^1,\theta^2,\theta^3)d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} H_i H_j H_k f(\theta^1_{(i)},\theta^2_{(j)},\theta^3_{(k)}) \qquad (13)$$

و نتيجة التكامل هي بجموع جداء قيم التابع $f(\theta^1,\theta^2,\theta^3)$ في نقاط الاستنباط أو نقاط غلوس الوزينة في أوزان هذه النقاط .

الملحق الثالث :

في هذا الملحق ستم إيراد نصوص برامج جزئية مكتوبة بلغة الـ C لإنشاء مصفوفة القساوة لعنصر البلاطة المسمى ب (ACM) و المشروح في الفصل السادس الفقرة 6 – 4 و لحل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوس Gauss للمصفوفات غير المتناظرة و بطريقة غاوس المترابطة للمصفوفات المتناظرة . يستدعى البرنامج الجزئي الذي ينشىء مصفوفة القساوة لعنصر البلاطة بالشكل :

```
Stiff(mat,koor,prop);
```

mat : حقل ثنائي الأبعاد يتألف من 12×12 عنصراً يتم إنشاؤه من خلال البرنامج .

koor : حقل ثنائي يتألف من 3×4 عنصراً و يجب أن يحتوي أثناء استدعاء البرنامج Stiff على الإحداثيات الديكارتية لعقد العنصر المنتهي مرتبة باتجاه دوران واحد مثلاً $(i),(j),(k),(\ell)$

prop : حقل أحادي البعد يتألف من ثلاثة عناصر ، عنصره الأول prop[o] يحتوي على معامل المرونة E ، و عنصره الثاني prop[1] على معامل بواسون ν و عنصره الثالث prop[2] سماكة عنصر البلاطة . يستخدم البرنامج التكامل العددي على نقاط غاوس لإنشاء مصفوفة القسلوة . و عدد النقاط المستخدمة أربع نقاط تحدد إحداثياتها الطبيعية في البرنامج الجزئي (header,file) . gauss.h

يجري تطوير مصفوفة القساوة في البدء في الإحداثيات الطبيعية و من ثم تحول إلى الإحداثيات الديكارتية . يستدعى برنامج حل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوس للمصفوفات غير المتناظرة بالتعليمة :

```
gauss(a,n,x,b);
```

a : مؤشر على مصفوفة الأمثال المختزنة سطراً بعد الأخر . ويبين الشكل التالي تقابل عناصر المصفوفة و المؤشر :

a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
..	..	a_{ij}	...
a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

مصفوفةالأمثال

a	$a+1$	..	$a+n-1$
$a+n$	$a+n+1$	..	$a+2n-1$
..	..	$a+i.n+j$	..
$a+n(n-1)$	...	...	$a+n.n-1$

مصفوفة المؤشر على مصفوفة الأمثال

n : عدد أسطر مصفوفة الأمثال و هو مساو لعدد أعمدتها .

x : مؤشر على مجاهيل جملة المعادلات الخطية .

b : مؤشر على الطرف الثاني لجملة المعادلات .

يستدعى برنامج حل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوس المترابطة للمصفوفات المتناظرة بالتعليمة التالية:

vk - gauss (a,az,x,b);

a : مؤشر على مصفوفة الأمثال المختزن نصفها كما يلي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & .. & a_{2n} & \\ \vdots & .. & & \\ a_{nn} & & & \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & \dots & .. & \vdots \\ .. & .. & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

اختزان نصف مصفوفة الأمثال   مصفوفة الأمثال المتناظرة

و قد اختير هذا الشكل من الاختزان لأنه يلائم طريقة العناصر المنتهية و يمكننا من استبعاد العمليات الصفرية أثناء حل جملة المعادلات الخطية لكامل المنشأ . فمصفوفة القساوة العامة تمتلك كما رأينا الشكل الشريطي و اختزان مصفوفة الأمثال بهذا الشكل يماثل اختزان مصفوفة القساوة العامة في أغلبية برامج طريقة العناصر المنتهية .

az : عدد أسطر مصفوفة الأمثال .

as : عدد أعمدة مصفوفة الأمثال و هو مساو لـ az .

x : مؤشر على مجاهيل جملة المعادلات الخطية .

b : مؤشر على الطرف الثاني لها .

في نصوص البرامج المعطاة الكثير من الشروحات واردة كتعليق للدلالة على العملية المراد إنجازها . كما أن أسماء المتحولات قد اختيرت بحيث تشير إلى القيم التي تمثلها . فمثلاً etens تمثل موتّرة المرونة في الإحداثيات الديكارتية و enat تمثل موتّرة المرونة في الإحداثيات الطبيعية .

جدير بالملاحظة أن البرامج الجزئية التي لم يشر إلى اسم مؤلفها في سياق النص قد كتبت بالتعاون مع الدبلوم المهندس .Olden,J أثناء عمل المؤلف في المعهد العالي للطرق العددية والمعلوماتية في الهندسة المدنية والتابع لجامعة دارمشتات. وفيما يلي نصوص البرامج المذكورة :

```
/* ==================== stz.c ========================= */
/* F E M                                                 */
/* Abo Diab   24/4/92                                    */
/* ================================================ */
/* stiffness matrix Rectangular element                 */
/* P L A T T E   B E N D I N G   E L E M E N T (ACM)   */
/* void ete() Transforming E- Tensor in nat. coord.     */
/* void    ()     calculating stiffness matrix          */
/* ================================================ */

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "gauss.h"
#include"sunc.h"
#include "fkt.h"
#define DOF 3
#define NODES 4
#define DIM 3
#define PR 3
#define LENHIFEL   20
 main()
{
 static double   coor[NODES][DIM] = {
     0. , 0. ,  0.,
     2. , 0. ,  0. ,
     2. , 2. ,  0.,
     0. , 2. ,  0.
  };
    static double  props[] = {
       18200000.0000    ,  .3000   , 0.1
 };

    double  mat[NODES*DOF*NODES*DOF];/* stiffness matrix */
/* Initializing the stiffness matrix */
    mv1000(mat,NODES*DOF*NODES*DOF );
    mv2000("element coordinates", coor, NODES, DOF, 8);
    mv2000("element properties", props, 3, 1, 0);
/* Calculating the stiffness matrix */
    zenkie(mat, coor, props);
/* Printing  the stiffness matrix */
/*   mv2000("the stiffness matrix is:", mat,NODES*DOF ,
NODES*DOF, 0);   */
}
/* ===================== F E M ===================== */

void            zenkie(mat, coor, props)
```

```
  double          mat[3 * 4][3 * 4];      /* Stiffness
matrix */
  double          coor[4][3]; /* Coordinates */
  double props[PR];     /* Material properties */
{
#define two_gauss_points
#include "gauss.h"

  double          emo, mue, di;  /* Material properties */
  double          etens[16], enat[16], omab[4 * 12], rootg,
conbas[3][2],
                  gab[3], dum[4];

  int             iz, is, kdr = 1;
  emo = props[0];
  mue = props[1];
  di = props[2];
  etensor(etens, emo, mue, di);
  mv1000(mat, 12 * 12);
  for (is = 0; is < stu; is++)
    for (iz = 0; iz < stu; iz++) {
      met(1, coor, gat[iz], gat[is], conbas, gab, &rootg);
      etnat(4, etens, conbas, enat);
      zktok(omab, gat[iz], gat[is]);
      mv2230b(enat, omab, mat, 4, 12, rootg * gaw[iz] *
gaw[is]);
    }
  if (kdr)
    mv2000("k in zenkie.c before transformation", mat, 12,
12, 0);
  for (iz = 1; iz <= 4; iz++) {
    met(2, coor, t1(iz), t2(iz), conbas, gab, &rootg);
    if (kdr)
      mv2000("covbas", conbas, 3, 2, 0);
    dum[0] = conbas[1][1];
    dum[1] = -conbas[1][0];
    dum[2] = -conbas[0][1];
    dum[3] = conbas[0][0];
    mv2240(mat, dum, 4, iz, 0);
  }
  if (kdr)
    mv2000("Stiffness matrix  in stiff.c after
transformation", mat, 12, 12, 0);
}
void             zktok(omab, x, y)
  double          omab[4][12], x, y;
```

```
{
  int             i, j;
  double          x2, xy, y2;
  x2 = x * x;
  xy = x * y;
  y2 = y * y;

  omab[0][0] = 6. * x - 6. * xy;
  omab[0][1] = 0.;
  omab[0][2] = 2. - 6. * x - 2. * y + 6. * xy;
  omab[0][3] = -6. * x + 6. * xy;
  omab[0][4] = 0.;
  omab[0][5] = -2. - 6. * x + 2. * y + 6. * xy;
  omab[0][6] = -6. * x - 6. * xy;
  omab[0][7] = 0.;
  omab[0][8] = -2. - 6. * x - 2. * y - 6. * xy;
  omab[0][9] = 6. * x + 6. * xy;
  omab[0][10] = 0.;
  omab[0][11] = 2. - 6. * x + 2. * y - 6. * xy;


  omab[1][0] = 4. - 3. * x2 - 3. * y2;
  omab[1][1] = 1. + 2. * y - 3. * y2;
  omab[1][2] = -1. - 2. * x + 3. * x2;
  omab[1][3] = -4. + 3. * x2 + 3. * y2;
  omab[1][4] = -1. - 2. * y + 3. * y2;
  omab[1][5] = -1. + 2. * x + 3. * x2;
  omab[1][6] = 4. - 3. * x2 - 3. * y2;
  omab[1][7] = -1. + 2. * y + 3 * y2;
  omab[1][8] = 1. - 2. * x - 3. * x2;
  omab[1][9] = -4. + 3. * x2 + 3. * y2;
  omab[1][10] = 1. - 2. * y - 3. * y2;
  omab[1][11] = 1. + 2. * x - 3. * x2;

  omab[2][0] = 4. - 3. * x2 - 3. * y2;
  omab[2][1] = 1. + 2. * y - 3. * y2;
  omab[2][2] = -1. - 2. * x + 3. * x2;
  omab[2][3] = -4. + 3. * x2 + 3. * y2;
  omab[2][4] = -1. - 2. * y + 3. * y2;
  omab[2][5] = -1. + 2. * x + 3. * x2;
  omab[2][6] = 4. - 3. * x2 - 3. * y2;
  omab[2][7] = -1. + 2. * y + 3 * y2;
  omab[2][8] = 1. - 2. * x - 3. * x2;
  omab[2][9] = -4. + 3. * x2 + 3. * y2;
  omab[2][10] = 1. - 2. * y - 3. * y2;
  omab[2][11] = 1. + 2. * x - 3. * x2;
```

```
  omab[3][0] = 6. * y - 6. * xy;
  omab[3][1] = -2. + 2. * x + 6. * y - 6. * xy;
  omab[3][2] = 0.;
  omab[3][3] = 6. * y + 6. * xy;
  omab[3][4] = -2. - 2. * x + 6. * y + 6. * xy;
  omab[3][5] = 0.;
  omab[3][6] = -6. * y - 6. * xy;
  omab[3][7] = 2. + 2. * x + 6. * y + 6. * xy;
  omab[3][8] = 0.;
  omab[3][9] = -6. * y + 6. * xy;
  omab[3][10] = 2. - 2. * x + 6. * y - 6. * xy;
  omab[3][11] = 0.;
  for (i = 0; i < 4; i++)
    for (j = 0; j < 12; j++)
      omab[i][j] = omab[i][j] / 8.;

}

/*A=================================================== */

void              etensor(etens, emo, mue, di)
  double            etens[4][4], emo, mue, di;

/* Calculating Elasticity tensor */
/*  */

/*E=================================================== */

{
  double            f;
  f = emo * di * di * di / 12. / (1. - mue * mue);
  etens[0][0] = etens[3][3] = f;
  etens[0][3] = etens[3][0] = mue * f;
  etens[0][1]= etens[0][2]= etens[3][1] = etens[3][2] = 0.;
  etens[1][0]= etens[1][3]= etens[2][0] = etens[2][3] = 0.;
  etens[1][1]= etens[1][2]=
    etens[2][1] = etens[2][2] = .5 * (1. - mue) * f;
}

/*A=================================================== */

void          met(art, coor, t1, t2, bas, gab, rootg)
  int       art;       /* 1 - contravariant Base vectors */
                       /*    2 - covariante Base vectors */
                       /* 3   calculating until rootg */
```

```
  double coor[4][3];    /* Element cartesien Coordinates */
  double t1, t2;/* points natural Coordinates */
  double bas[3][2];/* Base vectors: contra-/covariant */
  double gab[3];/* Derivatives of covariant Base vectors */
  double *rootg;/* root of Determinant of covarianten */
/* Metric */
/* Metric, contravariante Base vectors usw. */
/*  */

/*E================================================ */

{
  int    i, k, alf, bet, kdr = 0;
  double formab[4][2], covmet[2][2], konmet[2][2],
conbas[3][2], detg,fak;
/* derivatives of Form functions for geometry of linear
quadrangle */
  formab[0][0] = .25 * (t2 - 1.);
  formab[0][1] = .25 * (t1 - 1.);
  formab[1][0] = .25 * (1. - t2);
  formab[1][1] = -.25 * (1. + t1);
  formab[2][0] = .25 * (1. + t2);
  formab[2][1] = .25 * (1. + t1);
  formab[3][0] = -.25 * (1. + t2);
  formab[3][1] = .25 * (1. - t1);
  if (kdr)
    mv2000("Formab", formab, 4, 2, 0);
/* calculating covariant Base vectors */
/* bas(i,alf)=coor(i,k)*formab(k,alf) */
  for (alf = 0; alf <= 1; alf++)
    for (i = 0; i <= 2; i++) {
      bas[i][alf] = 0.;
      for (k = 0; k <= 3; k++)
      bas[i][alf] += coor[k][i] * formab[k][alf];
    }
  if (kdr)
    mv2000("bas in str.c", bas, 3, 2, 0);
  if (art != 2) {
/* calculating covariant metric */
/* covmet(alf,bet) = bas(i,alf)*bas(i,bet) */
    for (bet = 0; bet <= 1; bet++)
      for (alf = 0; alf <= 1; alf++) {
      covmet[alf][bet] = 0.;
      for (i = 0; i <= 2; i++)
        covmet[alf][bet] += bas[i][alf] * bas[i][bet];
      }
```

```
    if (kdr)
      mv2000("covmet", covmet, 2, 2, 0);
/* root of determinant of covariant metric */
    detg = covmet[0][0] * covmet[1][1] - covmet[1][0] *
covmet[0][1];
    *rootg = sqrt(detg);
    if (art != 3) {
/* derivative of covariant Base vectors */
      for (i = 0; i <= 2; i++)
      gab[i] = .25 * (coor[0][i] - coor[1][i] + coor[2][i]
- coor[3][i]);
/* calculating contravariant metric konmet=1/covmet */
      fak = 1. / detg;
      konmet[0][0] = fak * covmet[1][1];
      konmet[0][1] = -fak * covmet[0][1];
      konmet[1][0] = -fak * covmet[1][0];
      konmet[1][1] = fak * covmet[0][0];
/* Calculating of contravariant Base vectors */
/* bas(i,alf)=bas(i,bet)*konmet(bet,alf) */
      for (alf = 0; alf <= 1; alf++)
      for (i = 0; i <= 2; i++) {
        conbas[i][alf] = 0.;
        for (bet = 0; bet <= 1; bet++)
          conbas[i][alf] += bas[i][bet] * konmet[bet][alf];
      }
      for (alf = 0; alf <= 1; alf++)
      for (i = 0; i <= 2; i++)
        bas[i][alf] = conbas[i][alf];
    }
  }
}

/*A================================================== */

void        etnat(art, etens, conbas, enat)
  int       art;                 /* 2 - enat(i,k,gam,del) */
                               /* 4 - enat(alf,bet,gam,del) */
  double    etens[2][2][2][2];  /* E - Tensor, kart. Base */
  double    conbas[3][2];       /* contravar. Base vectors */
  double    enat[2][2][2][2];  /* E - Tensor, nat. Base */

/* Transformation of E- Tensors in nat. Coord. */


/*E================================================== */
```

```
{
  int             i, k, l, m, alf, bet, gam, del, kdr;
  double          c[2][2][2][2];
  kdr = 0;
  if (kdr)
    mv2000("conbas in etnat", conbas, 3, 2, 0);

  for (i = 0; i < 2; i++)
    for (k = 0; k < 2; k++)
      for (l = 0; l < 2; l++)
      for (del = 0; del < 2; del++) {
        c[i][k][l][del] = 0.0;
        for (m = 0; m < 2; m++)
          c[i][k][l][del] += etens[i][k][l][m] *
conbas[m][del];
      }
  for (i = 0; i < 2; i++)
    for (k = 0; k < 2; k++)
      for (gam = 0; gam < 2; gam++)
      for (del = 0; del < 2; del++) {
        enat[i][k][gam][del] = 0.0;
        for (l = 0; l < 2; l++)
          enat[i][k][gam][del] += c[i][k][l][del] *
conbas[l][gam];
      }
  if (art == 4 || art == 3) {
    for (i = 0; i < 2; i++)
      for (bet = 0; bet < 2; bet++)
      for (gam = 0; gam < 2; gam++)
        for (del = 0; del < 2; del++) {
          c[i][bet][gam][del] = 0.0;
          for (k = 0; k < 2; k++)
            c[i][bet][gam][del] += enat[i][k][gam][del] *
conbas[k][bet];
        }
    if (art != 3) {
      for (alf = 0; alf < 2; alf++)
      for (bet = 0; bet < 2; bet++)
        for (gam = 0; gam < 2; gam++)
          for (del = 0; del < 2; del++) {
            enat[alf][bet][gam][del] = 0.0;
            for (i = 0; i < 2; i++)
            enat[alf][bet][gam][del] += c[i][bet][gam][del]
 * conbas[i][alf];
          }
    }
```

```
  }
  if (art == 3)
    for (i = 0; i < 2; i++)
      for (k = 0; k < 2; k++)
      for (l = 0; l < 2; l++)
        for (m = 0; m < 2; m++)
          enat[i][k][l][m] = c[i][k][l][m];
  if (kdr) {
    for (i = 0; i < 2; i++)
      for (k = 0; k < 2; k++)
      for (l = 0; l < 2; l++)
        for (m = 0; m < 2; m++)
          printf("\n (%d ,%d ,%d ,%d  )= %f\n", i, k, l, m,
enat[i][k][l][m]);
  }
}
/*A================================================== */

void         mv2230b(a, b, c, abz, bs, f)
  double     *a, *b, *c;   /* erstes Element von A ,B, C */
  int        abz, bs;   /* Dimensionen der Matrizen A, B */
  double     f;                      /* Skalierungsfaktor */

/* Matrix C = Matrix C + Matrix B T * Matrix A * Matrix B *
Faktor f */
/*  */

/*E================================================== */

{
double hifel[ LENHIFEL*LENHIFEL];
  if ((abz * bs) > (LENHIFEL * LENHIFEL))
    fprintf(stderr, "FEHLER:mv2230b:internes Feld zu klein:
%d < %d\n",
          LENHIFEL * LENHIFEL, abz * bs);
  else {
    mv2221(b, a, hifel, abz, bs, abz);
    mv2220b(hifel, b, c, abz, bs, bs, f);
  }
}

/*A================================================== */

void           mv2221(a, b, c, azbz, as, bs)
  double        *a, *b, *c;  /* first Element der Matrices
A, B, C */
```

```
  int            azbz, as, bs; /* Dimension of A, B und C */

/* Matrix C = Matrix A T * Matrix B, nicht ueberschreibend
*/
/*  */

/*E================================================= */

{
  register        lauf = 0, iz, is;
  double          t, *la, *lb;

  for (iz = 0; iz < as; iz++) {
    for (is = 0; is < bs; is++) {
      la = a;
      lb = b;
      t = 0.;
      for (lauf = 0; lauf < azbz; lauf++) {
      t += (*la) * (*lb);
      lb += bs;
      la += as;
      }
      (*c++) = t;
      b++;
    }
    a++;
    b -= bs;
  }
}

 /*A================================================= */

void     mv2220b(a, b, c, asbz, az, bs, fak)
  double *a, *b, *c;/* first Element of Matrices A, B, C */
  int     az, bs, asbz;    /* Dimensionen von A, B und C */
  double          fak;              /* Skalierungsfaktor */

/* Matrix C += Matrix A * Matrix B * Faktor f */
/*  */

/*E================================================= */

{
  register        lauf = 0, iz, is;
  double          t, *la, *lb;
```

```
  for (iz = 0; iz < az; iz++) {
    for (is = 0; is < bs; is++) {
      la = a;
      lb = b;
      t = 0.;
      for (lauf = 0; lauf < asbz; lauf++) {
      t += (*la++) * (*lb);
      lb += bs;
      }
      (*c++) += t * fak;
      b++;
    }
    a += asbz;
    b -= bs;
  }
}

 /*A================================================= */

void              mv1000(a, dim)
  double           *a;          /* nullzusetzender Vector */
  int               dim;            /* Groesze des Vectors */

/* Nullsetzen */
/*  */

/*E================================================== */

{
  register          lauf = 0;
  while (lauf++ < dim)
    *a++ = 0.;
}

 /*A================================================= */

void              mv2000(text, mat, zei, spa, art)
  char             *text;       /* row head with printing */
  double            mat[];              /* printed Matrix */
  int               zei, spa;               /* Matrix size*/
  int               art;               /* output control: */
 /* 1  - without row head */
 /* 2  - without column numbering */
 /* 4  - without row numbering */
 /* 8  - without new line after 3 rows */
 /* 16 - without page proof after 6 columns */
```

```
 /* 32 - without Stop after output */
 /* 64   separating elements with commas */

/* control print with e- or. f- Format */
/*  */

/*E================================================== */

{
  int               iz, is, isa = -6, ise, next;
  double            out;
  char              tren[2];
/* unknown Bit placed */
  if ((art > 127) || (art < 0))
    art = 0;
/* row head */
  if (!(art & 1))
    printf("%s: %d row %d column\n", text, zei, spa);
  do {
/* separating in row blocks */
    isa += 6;
    if (((spa - isa) < 7) || (art & 16)) {
      ise = spa;
      next = 0;
    } else {
      ise = isa + 6;
      next = 1;
    }
/* columns numbering */
    if (!(art & 2)) {
      if (!(art & 4))
      printf("     ");
      for (is = isa; is < ise; is++)
      printf("   %3d    ", is + 1);
      printf("\n");
    }
/* separating symbols */
    tren[0] = ((art & 64) ? ',' : ' ');
    tren[1] = '\0';
/* Table */
    for (iz = 0; iz < zei; iz++) {
/* row numbering */
      if (!(art & 4))
      printf("%3d: ", iz + 1);
      for (is = isa; is < ise; is++) {
      out = mat[iz * spa + is];
```

```
/* Format control */
      if (out >= 100000. || out <= -10000. ||
          (out < .1 && out > -.1))
        printf("%11.4e%s", out, tren);
      else
        printf("%12.5f%s", out, tren);
      }
      printf("\n");
/* new line */
      if (!(art & 8) && ((iz + 1) % 3 == 0) && iz && (zei -
iz - 1))
      printf("\n");
    }
/* Stop after output of one Block */
    if (!(art & 32)) {
      printf("<Enter>\n");
      getchar();
    } else if (next)
      printf("\n");
  } while (next);
}

 /*A=================================================== */

void        mv2240(a, t, ba, bt, art)
  double    *a;                         /* first Element of A */
  double    *t;             /* first of 4 main Elements of T */
  int       ba;     /* A has the size  (ba * 3) * (ba * 3) */
  int       bt;    /* only the bt-te 3- Block of T is != E */
  int              art;          /* Art of Transformation: */
/* art = 0 : Matrix T T * Matrix A * Matrix T  */
/* art = 1 : only T T * A */
/* art = 2 : only A * T */
/* art = 3 : A is Vector (ba * 3) * 1, nur A * T   == T T *
A */
/* art = 4 : A ist Vector (ba * 3) * 1, nur A * T T == T
* A */

/*        1   0   0  */
/*  T  =  0  t0  t1  */
/*        0  t2  t3  */
/*  */

/*E=================================================== */

{
```

```
  int             iz, is, ib, spa;
  double         *lp, r1, r2;

  spa = 3 * ba;

  if (art == 0 || art == 1) {
/* T T * A */
    lp = a + (bt * 3 - 2) * spa;
    for (ib = 0; ib < 3 * ba; ib++) {
      r1 = *lp;
      r2 = *(lp + spa);
      *lp = r1 * *t + r2 * *(t + 2);
      *(lp + spa) = r1 * *(t + 1) + r2 * *(t + 3);
      lp++;
    }
  }
  if (art == 0 || art == 2 || art == 3) {
/* A * T or Vector A * T */
    lp = a + bt * 3 - 2;
    for (ib = 0; ib < 3 * ba; ib++) {
      r1 = *lp;
      r2 = *(lp + 1);
      *lp = r1 * *t + r2 * *(t + 2);
      *(lp + 1) = r1 * *(t + 1) + r2 * *(t + 3);
      if (art == 3)
      break;
      lp += spa;
    }
  }
  if (art == 4) {
/* Vector A * T T */
    lp = a + bt * 3 - 2;
      r1 = *lp;
      r2 = *(lp + 1);
      *lp = r1 * *t + r2 * *(t + 1);
      *(lp + 1) = r1 * *(t + 2) + r2 * *(t + 3);
  }
}

/*A============================================== */

double          t1(lnr)
  int             lnr;

/* coordinates of nodes in depending on lfd. Nr. */
```

```
/*E=================================================== */

{
  if (lnr == 1)
    return -1.;
  else if (lnr == 2)
    return 1.;
  else if (lnr == 3)
    return 1.;
  else
    return -1.;
}

/*A=================================================== */

double          t2(lnr)
  int             lnr;

/* coordinates of nodes depending on lfd. Nr. */


/*E=================================================== */

{
  if (lnr == 1)
    return -1.;
  else if (lnr == 2)
    return -1.;
  else if (lnr == 3)
    return 1.;
  else
    return 1.;
}

/* ==================== EOF ======================== */

/* ================================================== */
/* Standard library IiB : Include-File with all subprograms
/Functions */
/*====== =========================================== */
/*
*/
/* ================================================== */


#ifndef      _libsunc_h
```

```
#define     _libsunc_h

#define mv2212(a,b,c,azbs,as) mv2211(a,b,c,azbs,as)
#define mv2213(a,b,c,asbs,az) mv2210(a,b,c,asbs,az)

extern int              mi2021( /* mat, zei, spa */ );
extern int              mi2300( /* a, len */ );
extern int              mi2310( /* a, ub */ );
extern int              mi2320( /* a, b, ub, rs */ );
extern int              mi2341( /* a, b, c, az */ );
extern int              mi2342( /* a, b, c, az */ );
extern void             mv1000( /* a, dim */ );
extern void             mv1001( /* a, b, dim */ );
extern void             mv1100( /* a, b, c, dim */ );
extern void             mv1101( /* a, b, c, dim */ );
extern void             mv1201( /* a, b, dim, f */ );
extern void             mv1202( /* a, b, c, dim, f */ );
extern void             mv2000( /* text, mat, zei, spa, art
*/ );
extern void             mv2010( /* mat, zei, spa, min, max,
art */ );
extern void             mv2011( /* mat, zei, spa */ );
extern void             mv2030( /* a, b, az, as */ );
extern void             mv2210( /* a, b, c, asbz, az */ );
extern void             mv2210a( /* a, b, c, asbz, az */ );
extern void             mv2210b( /* a, b, c, asbz, az */ );
extern void             mv2211( /* a, b, c, azbz, as */ );
extern void             mv2211a( /* a, b, c, azbz, as */ );
extern void             mv2220( /* a, b, c, asbz, az, bs */
);
extern void             mv2220a( /* a, b, c, asbz, az, bs */
);
extern void             mv2220b( /* a, b, c, asbz, az, bs,
fak */ );
extern void             mv2221( /* a, b, c, azbz, as, bs */
);
extern void             mv2221a( /* a, b, c, azbz, as, bs */
);
extern void             mv2222( /* a, b, c, asbs, az, bz */
);
extern void             mv2222b( /* a, b, c, asbs, az, bz, f
*/ );
extern void             mv2223( /* a, b, c, azbs, as, bz */
);
extern void             mv2230( /* a, b, c, abz, bs */ );
```

```
extern void             mv2230b( /* a, b, c, abz, bs, f */
);
extern void             mv2231( /* a, b, c, abs, bz */ );
extern void             mv2231b( /* a, b, c, abs, bz, f */
);
extern void             mv2232( /* a, b, c, abz, bs */ );
extern void             mv2233( /* a, b, c, abs, bz */ );
extern void             mv2240( /* a, t, ba, bt, art */ );
extern void             mv2240a( /* a, t, ba, bt, art */ );
extern void             mv2315( /* a, b, x, ub, rs */ );
extern void             mv2321( /* a, b, x, n */ );
extern void             mv2322( /* a, b, x, n */ );
extern void             mv2330( /* a, b, x, ub, rs */ );
extern double           md1200( /* a, b, dim */ );
extern double           md2200( /* a, b, c, az, as */ );
extern double           md2201( /* a, b, dim */ );
extern double           sd0010( /*  */ );
extern double          *mp2020( /* zei, spa, art */ );

#endif                          /* !_libsunc_h */
/*=====================gauss.h======================== */
/* FEM : Include-File Gauss-Integration: coordinates of
Gauss pointss and weights         */
/*================================================== */
/*                                                  */
/*================================================== */

#ifndef _gauss_h
#define _gauss_h
#endif                          /* !_gauss_h */

#ifdef one_gauss_point
static int      stu = 1;
static double   gat[1] = {0.};
static double   gaw[1] = {2.};
#endif
#ifdef two_gauss_points
static int      stu = 2;
static double   gat[2] = {-.577350269189626,
.577350269189626};
static double   gaw[2] = {1., 1.};
#endif
#ifdef three_gauss_points
static int      stu = 3;
static double   gat[3] = {.774596669241483, 0., -
.774596669241483};
```

```
static double   gaw[3] = {.555555555555556,
.888888888888889,
.555555555555556};
#endif
#ifdef four_gauss_points
static int      stu = 4;
static double   gat[4] = {.861136311594053,
.339981043584856,
-.339981043584856, -.861136311594053};
static double   gaw[4] = {.347854845137454,
.652145154862546,
.652145154862546, .347854845137454};
#endif
#ifdef five_gauss_points
static int      stu = 5;
static double   gat[5] = {.906179845938664,
.538469310105683,
0., -.538469310105683, -.906179845938664};
static double   gaw[5] = {.236926885056189,
.478628670499366,
.568888888888889, .478628670499366, .236926885056189};
#endif
#ifdef sechs_gauss_points
static int      stu = 6;
static double   gat[6] = {.932469514203152,
.661209386466265,
  .238619186083197, -.238619186083197, -.661209386466265
-.932469514203152};
static double   gaw[6] = {.171324492379170,
.360761573048139,
  .467913934572691, .467913934572691, .360761573048139,
.171324492379170};
#endif
#ifdef seven_gauss_points
static int      stu = 7;
static double   gat[7] = {.949107912342759,
.741531185599394,
  .405845151377397, 0., -.405845151377397, -
.741531185599394,
-.949107912342759};
static double   gaw[7] = {.129484966168870,
.279705391489277,
  .381830050505119, .417959183673469, .381830050505119,
.279705391489277, .129484966168870};
#endif
#ifdef eight_gauss_points
```

```
static int      stu = 8;
static double   gat[8] = {.960289856497536,
.796666477413627,
  .525532409916329, .183434642495650, -.183434642495650,
-.525532409916329, -.796666477413627, -.960289856497536};
static double   gaw[8] = {.101228536290376,
.222381034453374,
  .313706645877887, .362683783378362, .362683783378362,
.313706645877887, .222381034453374, .101228536290376};
#endif
#ifdef nine_gauss_points
static int      stu = 9;
static double   gat[9] = {.968160239507626,
.836031107326636,
  .613371432700590, .324253423403809, 0., -
.324253423403809,
-.613371432700590, -.836031107326636, -.968160239507626};
static double   gaw[9] = {.081274388361574,
.180648160694857,
  .260610696402935, .312347077040003, .330239355001260,
  .312347077040003, .260610696402935, .180648160694857,
.081274388361574};
#endif
#ifdef ten_stst
static int      stu = 10;
static double   gat[10] = {.973906528517172,
.865063366688985,
  .679409568299024, .433395394129247, .148874338981631,
  -.148874338981631, -.433395394129247, -.679409568299024,
-.865063366688985, -.973906528517172};
static double   gaw[10] = {.066671344308688,
.149451349150581,
  .219086362515982, .269266719309996, .295524224714753,
  .295524224714753, .269266719309996, .219086362515982,
.149451349150581, .066671344308688};
#endif

/* ==================== EOF ========================== */
/*A================================================= */
/*                                                   */
/* mv2321(a,b,x,n) : system of equaion  a * x = b    */
/* GAUSS Algorithm                                   */
/* a : pointer to a-Matrix ,n number of rows or columns */
/* b : pointer to b matrix                           */
/* x : pointer to unknowns                           */
/* ============ Abo Diab ,den 20.04.91  ===============*/
```

```
void              gauss(a, b, x, n)
  double           *a, *b, *x;
  int               n;

/*E================================================= */

{
  int               i, j, k, l, in, ln, kn;
  double            s, t;
/*--------------forward elimination----------------------*/
  for (i = 0; i < n - 1; i++) {
/*-------------- greatest Pivot element -----------------*/
    s = 0;
    in = i * n;
    for (k = i; k < n; k++) {
      t = fabs(*(a + k * n + i));
      if (t > s) {
      s = t;
      l = k;
      ln = l * n;
      }
    }
/*--------------- rows exchange--------------------------*/
    for (j = 0; j < n; j++) {
      s = *(a + in + j);
      *(a + in + j) = *(a + ln + j);
      *(a + ln + j) = s;
    }
    s = *(b + i);
    *(b + i) = *(b + l);
    *(b + l) = s;
/*-------------- a singular   --------------------------*/
    if (fabs(*(a + in + i) / *(a + ln + l)) < 0.000000001)
      printf("\n coefficient  matrix a is singular");
/*------------ Elimination stage k  --------------------*/
    for (k = i + 1; k < n; k++) {
      kn = k * n;
      s = *(a + kn + i) / *(a + in + i);
      *(a + kn + i) = 0;
      for (j = i + 1; j < n; j++) {
      *(a + kn + j) -= s * (*(a + in + j));
      }
      *(b + k) -= s * (*(b + i));
    }
  }
/*--------------- backward elimination -----------------*/
```

```
  *(x + n - 1) = (*(b + n - 1)) / (*(a + n * n - 1));
  for (i = (n - 2); i >= 0; i--) {
    in = i * n + i;
    *(x + i) = *(b + i);
    for (k = 1; k < n - i; k++) {
      *(x + i) -= (*(a + in + k)) * (*(x + i + k));
    }
    *(x + i) = (*(x + i)) / (*(a + in));
  }
}

/*A====================vk_gauss.c====================== */
/*                                                      */
/* mv2322(a,b,x,n) : system of equations  a * x = b     */
/* interlinked GAUSS Algorithmu                         */
/* a : pointer to a-Matrix , n number of rows or columns */
/* b : pointer to right side b                          */
/* x : pointer to the  vector of Unknowns x             */
/* matrix a is symmetric and  Over diagonal elements    */
/* are arranged as one row .                            */
/*                                                      */
/* =========== Abo Diab ,den 09.04.91  ================*/
void            vk_gauss(a, b, x, n)
  double         *a, *b, *x;
  int             n;

/*E==================================================== */

{
  int             i, j, k, zde, zd, zdi, zdk, zdj, zdjr;
  zd = n;
/*------------- forward elimination ---------------------*/

  for (i = 1; i < n; i++) {

    for (k = 0; k < (n - i); k++) {
      zdj = 0;
      zdi = i;
      zdk = i + k;
      for (j = 0; j < i; j++) {


      *(a + zd + k) -= ((*(a + zdi)) * (*(a + zdk))) / (*(a
+ zdj));

      zdj += n - j;
```

```
      zdi += n - j - 1;
      zdk += n - j - 1;
      }
    }
    zdjr = 0;
    zdi = i;
    for (j = 0; j < i; j++) {

      *(b + i) -= ((*(a + zdi)) * (*(b + j))) / (*(a +
zdjr));

      zdjr += n - j;
      zdi += n - j - 1;
    }
    zd += (n - i);

  }

/*-------------- backward elimination -------------------*/
  zde = n * (n - 1) / 2 + n - 1;
  *(x + n - 1) = (*(b + n - 1)) / (*(a + zde));
  zd = 1;
  for (i = (n - 2); i >= 0; i--) {
    zd++;
    zde -= zd;
    zdi = n - zd;
    *(x + zdi) = *(b + zdi);
    for (k = 1; k < (n - i); k++) {
      *(x + zdi) -= (*(a + zde + k)) * (*(x + zdi + k));
    }
    *(x + zdi) = (*(x + zdi)) / (*(a + zde));

  }
}
```

وفيما يلي حسابات مصفوفة القساوة لعنصر بلاطة مستطيل إحداثيات رؤوسه الأربعة معطاة بالشكل التالي:

$x^1(1) = 0.0$ $\qquad x^2(1) = 0.0$ $\qquad x^3(1) = 0$

$x^1(2) = 2.0$ $\qquad x^2(2) = 0.0$ $\qquad x^3(2) = 0$

$x^1(3) = 2.0$ $\qquad x^2(3) = 2.0$ $\qquad x^3(3) = 0$

$x^1(4) = 0.0$ $\qquad x^2(4) = 2.0$ $\qquad x^3(4) = 0$

Covariant basis vectors: 3 rows 2 columns

	1	2
1:	1.000	0.000e+000
2:	0.000e+000	1.000

Stiffness matrix in stiff.c after transformation: 12 rows 12 columns

	1	2	3	4	5	6
1:	4166.667	1916.667	-1916.667	-1666.667	583.333	-1666.667
2:	1916.667	2416.667	-500.000	583.333	916.667	-1.563e-013
3:	-1916.667	-500.000	2416.667	1666.667	1.847e-013	916.667
4:	-1666.667	583.333	1666.667	4166.667	1916.667	1916.667
5:	583.333	916.667	1.563e-013	1916.667	2416.667	500.000
6:	-1666.667	-1.847e-013	916.667	1916.667	500.000	2416.667
7:	-833.333	-833.333	833.333	-1666.667	-1666.667	583.333
8:	833.333	750.000	-1.421e-014	1666.667	916.667	1.563e-013
9:	-833.333	0.000e+000	750.000	583.333	-1.563e-013	916.667
10:	-1666.667	-1666.667	-583.333	-833.333	-833.333	-833.333
11:	1666.667	916.667	-1.563e-013	833.333	750.000	1.421e-014
12:	-583.333	1.563e-013	916.667	833.333	0.000e+000	750.000

<Enter>

	7	8	9	10	11	12
1:	-833.333	833.333	-833.333	-1666.667	1666.667	-583.333
2:	-833.333	750.000	-1.421e-014	-1666.667	916.667	1.421e-013
3:	833.333	0.000e+000	750.000	-583.333	-1.492e-013	916.667
4:	-1666.667	1666.667	583.333	-833.333	833.333	833.333
5:	-1666.667	916.667	-1.421e-013	-833.333	750.000	1.421e-014
6:	583.333	1.563e-013	916.667	-833.333	0.000e+000	750.000
7:	4166.667	-1916.667	1916.667	-1666.667	-583.333	1666.667
8:	-1916.667	2416.667	-500.000	-583.333	916.667	-1.563e-013
9:	1916.667	-500.000	2416.667	-1666.667	1.847e-013	916.667
10:	-1666.667	-583.333	-1666.667	4166.667	-1916.667	-1916.667
11:	-583.333	916.667	1.563e-013	-1916.667	2416.667	500.000
12:	1666.667	-1.847e-013	916.667	-1916.667	500.000	2416.667

<Enter>

ملاحظات ختامية

8-1- مقدمة

في ختام هذا الكتاب سوف تعرض جملة من الملاحظات حول الأسلوب المقترح لاستنباط توابع تقريبية متعلقة بالمؤثرات الخارجية بالإضافة إلى تعلقها بدرجات الحرية ضمن العنصر المنتهي والتي عرضت أثناء معالجة مشاكل المنشآت الخطوطية والبلاطات في الفصلين الخامس والسادس من هذا الكتاب. وسيعاد عرضها بشكلها العام وهي وإن عرضت الآن لتناسب قالب نظرية المرونة في ميكانيك الإنشاءات إلا أنها قابلة للاستخدام في مجالات العلوم الأخرى التي تستخدم فيها طريقة العناصر المنتهية لحل جمل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة والتي تملك شروطاً طرفية لازمة وأخرى طبيعية. وسوف يشار إلى إمكانية استخدام التوابع التقريبية المشتقة وفق الأسلوب المقترح في طرق العناصر المنتهية المختلفة . ويناقش الشكل المتغيراتي المناسب لاستخدام هذه التوابع والنابعة من خصوصيتها في تحقيقها لجمل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة الحاكمة للمسألة المطروحة والشروط الطرفية اللازمة. كما سيناقش ترابط طرق العناصر المنتهية والتي تعتمد صيغ متغيراتية مختلفة عند استخدام مثل هذه التوابع كتوابع تقريبية. وهنا أنوه أنه يجب النظر إلى هذه الملاحظات كمسودة عمل أولية نحسن الاستفادة منها بشكل أفضل بتطوير طرق استنباط تؤدي الغرض المطلوب في الحصول على توابع تقريبية تحقق المعادلات التفاضلية غير المتجانسة الحاكمة للمسألة المطروحة والشروط الطرفية اللازمة. وفي هذا السياق ستعرض فكرة لاستخدام مبرهنة غاوص في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي في تعيين الثوابت العشوائية للتوابع التقريبية بدلاً من عملية الاستنباط الهندسي التقليدية.

8-2 ــ عموميات:

لنفرض أن المعادلات التفاضلية غير المتجانسة التي تحكم المسألة المطروحة هي:

$$\Delta^{ij}u_{i}=\bar{p}^{j} \qquad (8.1)$$

Δ^{ij} مصفوفة من المعاملات التفاضلية، u_i التوابع المجهولة، $\bar{p}^{j}$ توابع المؤثرات الخارجية. وأن الشروط الطرفية هي التالية:

الشروط الطرفية اللازمة:

$$u_i=\overline{u_i} \text{ on } s_u \qquad (8.2)$$

والشروط الطرفية الطبيعية:

$$\sigma^{ij}n_j = \bar{T}^{i} \text{ on } s_\sigma \qquad (8.3)$$

s_u جزء سطح الوسط الذي عليه التوابع u_i معلومة، s_σ جزء سطح الوسط الذي عليه $\bar{T}^{i}$ معلومة.

بعد تقسيم الوسط إلى عناصر منتهية، بالاضافة إلى متطلبات الاستمرارية، والاستقلالية الخطية للتوابع المفترضة u_i ومتطلبات كونها كاملة أيضا تتطلب الشروط الطرفية اللازمة للعنصر المنتهي ان يكون:

$$\lfloor u_i \rfloor_{x_i=x_i(e)} = u_{i(e)} \qquad (8.4)$$

$x_{i(e)}$ هي إحداثيات عقد العنصر المنتهي و $u_{i(e)}$ درجات حرية عقده.

في البدء نختار التوابع التقريبية بالشكل المعاملي:

$$u_i = x_i^{n} \quad c_n \qquad (8.5)$$

حيث تتعلق المصفوفة x_i^{n} بالإحداثيات المحلية $x_i(i=1,2,3)$ ، c_n عدد من المعاملات العشوائية أكبر من العدد المعتاد بحيث يسمح باحتواء المؤثر الخارجي. بتعويض التوابع التقريبية (8.5) في المعادلات التفاضلية(8.1) نحصل على علاقة تربط بين التوابع التقريبية هذه وبين المؤثر الخارجي:

$$(\Delta^{ij}x_i^{n})c_n=\bar{p}^{j} \qquad (8.6)$$

بمقارنة معاملات طرفي المعادلة(8.6) مع بعضها البعض يمكن التعبير عن بعض الثوابت c_n بدلالة المؤثرات الخارجية على العنصر $\bar{p}^j$.

لاعتبار مؤثرات خارجية لاعلى التعيين ضمن العنصر المنتهي يمكننا استخدام التوابع التقريبية للتعبير عن المؤثرات الخارجية ضمن العنصر بدلالة شداتها على عقد العنصر:

$$(\Delta^{ij} x_i^{\ n})c_n = \bar{p}^j = NP_r^{\ j}\, \bar{p}_0^{\ r} \tag{8.7}$$

$NP_r^{\ j}$ مصفوفة توابع الشكل للمؤثرات الخارجية، $\bar{p}_0^{\ r}$ هي قيم توابع المؤثرات الخارجية على عقد العنصر. بحل مناسب للمعادلة(8.6)أو(8.7) يمكن أن ينفصل التـــابع التقريـــبي(8.5) إلى جـــزء متجانس بعدد من الثوابت c_k مساو لعدد درجات الحرية لعقد العنصر وآخر غير متجانس متعلـــق بالمؤثرات الخارجية:

$$u_i = M_i^{\ k} c_k + \overline{M}_{ij}\bar{p}^j \tag{8.8}$$

يمكن الآن تحديد الثوابت الاختيارية c_k بتعويض إحداثيات عقـــد العنصـــر في المعادلـــة(8.8) وعكس العلاقة الناتجة:

$$\begin{aligned} u_{i(e)} &= A_{i(e)}^{\ \ k} c_k + \overline{A}_{i(e)j}\bar{p}^j \\ c_k &= B_k^{\ m(e)}(u_{m(e)} - \overline{A}_{m(e)j}\bar{p}^j) \end{aligned} \tag{8.9}$$

حيث $\overline{A}_{i(e)j}$, $A_{i(e)}^{\ \ k}$ مصفوفتان تنتجـــان عـــن تعويـــض إحداثيـــات عقـــد العنصـــر في المصفوفتين $\overline{M}_{ij}$, $M_i^{\ k}$ على التوالي . $B_K^{\ m(e)}$ المصفوفة المعاكسة للمصفوفـــة $A_{i(e)}^{\ \ k}$ ، و m قرينة تتحول مثل i .بتعويض الثوابت الاختيارية بقيمها من العلاقـــة (8.9) في العلاقـــة (8.8) نحصل على علاقة تقريبية تربط بين التوابع الانتقالات u_i ودرجات الحرية لعقد العنصر $u_{m(e)}$ بالاضافة إلى حمولات العنصر $\bar{p}^j$

$$\begin{aligned} u_i &= M_i^{\ k} B_k^{\ m(e)}(u_{m(e)} - \overline{A}_{m(e)j}\bar{p}^j) + \overline{M}_{ij}\bar{p}^j \\ u_i &= N_i^{\ m(e)} u_{m(e)} + \overline{N}_{ij}\bar{p}^j \end{aligned} \tag{8.10}$$

$$N_i^{m(e)} = M_i^k B_k^{m(e)}$$
$$\overline{N}ij = -M_i^k B_k^{m(e)} \overline{A}m(e)j + \overline{M}ij = -N_i^{m(e)} \overline{A}m(e)j + \overline{M}ij \quad (8.11)$$

$N_i^{m(e)}$ هي توابع الشكل وتمثل الجزء المتجانس للتابع التقريبي، $\overline{N}ij$ هي الجزء الغير متجانس للتابع التقريبي ويتبين من المعادلة(8.11) أنه مرتبط بالجزء المتجانس آنف الذكر.

من الجدير بالذكر أيضا أن التابع التقريبي(8.10) المشتق بهذه الطريقة يمكن استخدامه في تطبيق طريقة العناصر المنتهية ـــ نموذج Trefftz. بالاضافة إلى ذلك يمكن أن نشتق منه باستخدام علاقات الإجهادات ـــ الانتقالات توابع تقريبية للإجهادات صالحة للاستخدام في التطبيق الهجين لطريقة العناصر المنتهية ـــ نموذج الإجهادات، وذلك لان التابع(8.10) المحقق للمعادلات التفاضلية غير المتجانسة للمسألة المعتبرة يحقق بشكل آلي معادلات التوازن غير المتجانسة لهذه المسالة.

في كثير من الاحيان قد لاتجدي طريقة الاستنباط الهندسية الموصوفة في المعادلات (8.11),(8.10),(8.9) في إيجاد علاقة تطابقية محققة للشروط الطرفية اللازمة وينتج عنها بدلا من ذلك توابع انتقالات تتصف بعدم الاستمرارية كما هو الحال مثلا عند استنباط التوابع التقريبية لعنصر بلاطة مستطيل بثلاث درجات حرية على كل عقدة.عندها يمكن الاستغناء عن طريقة الاستنباط الهندسية هذه وتستبدل بطريقة أخرى لتعيين الثوابت الاختيارية c_k حيث تستخدم التوابع التقريبية بشكلها الوارد في العلاقة (8.8) في التطبيق وتنتفي الحاجة إلى إيجاد علاقة شبيهه بالعلاقة (8.10).

8-3 ـــ الصياغة المتغيراتية:

لنعتبر مسألة المرونة الخطية المحكومة بالمعادلات الأساسية التالية:

معادلات التوازن

$$\sigma^{ij}{}_{,j} + \overline{f}^i = 0 \quad \text{in} \quad V \qquad (8.12)$$

علاقات التشوهات ـــ الانتقالات

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in} \quad V \qquad (8.13)$$

قانون السلوك:

$$\sigma^{ij} = c^{ijkl} \quad \varepsilon_{kl} \qquad (8.14)$$

والشروط الطرفية

الشروط الطرفية الهندسية:

$$u_i = \bar{u}_i \text{ on } \quad s_u \leq s \qquad (8.15)$$

الشروط الطرفية الميكانيكية

$$\sigma^{ij} n_j = \bar{T}^i \quad \text{on} \quad s_\sigma = s/s_u \qquad (8.16)$$

حيث $\bar{u}_i$ توابع انتقالات معلومة على جزء السطح s_u، $\bar{T}^i$ توابع قوى معلومة على جزء السطح s_σ، n_i مركبات شعاع الناظم الخارج من السطح.

يتم الحصول على المعادلة التفاضلية مصاغة باستخدام الانتقالات والممثلة بالمعادلـــة(8.1) بإيجـــاد علاقات الإجهادات ـــ الانتقالات وذلك بتعويض علاقات التشوهات ـــ الانتقـــالات(8.13) في قانون السلوك(8.14) ومن ثم تعويض الناتج في معادلات التوازن(8.12). وباعتبار ان التوابـــع التقريبية (المعادلة(8.10)) والمختارة بحيث تحقق المعادلة التفاضلية(8.1) وبالتالي فهي تحقق بشكل آلي المعادلات (8.12)، (8.13)،(8.14) وتحقق أيضا الشروطالطرفية الهندسية (8.15) لذا فـــان التعبير المتغيراتي يجب أن يقود إلى تحقيق الشروط الطرفية الميكانيكية(8.16) بشكل تقريبي. ولهـــذا فان التعبير المتغيراتي يجب ان يتركب من الشكل التكاملي للشروط الطرفية الميكانيكية:

$$\delta I = \int_{s_\sigma} (\sigma^{ij} n_j - \bar{T}^i) \ \delta u_i \ \ ds = 0 \qquad (8.17)$$

وباعتبار أن التركيب السابق هو تعبير عام بسيط للشروط الطرفية الميكانيكيـــة، فمـــن الممكـــن استخدامه لتطبيقات في مسائل لاتملك بالضرورة مبدأ متغيراتيا. كما أنه من الممكـــن تحويلـــه إلى

أشكال اخرى. فتكامل الحد على السطح الذي عليه القوى معلومة يمكن استبداله بالفارق بين تكاملين أحدهما على كامل السطح والآخر على السطح الذي عليه الانتقالات معلومة بالشكل:

$$\int_{s_\sigma} \sigma^{ij} n_j \ \delta u_i \, ds = \int_{s} \sigma^{ij} n_j \ \delta u_i \, ds - \int_{s_u} \sigma^{ij} n_j \ \delta u_i \, ds = 0 \qquad (8.18)$$

لنحصل على:

$$\delta I = \int_{s} \sigma^{ij} n_j \delta u_i \, ds - \int_{s_u} \sigma^{ij} n_j \delta u_i \, ds - \int_{s_\sigma} \overline{T}^i \delta u_i \, ds = 0 \qquad (8.19)$$

وبعد تعويض الشروط الطرفية الهندسية في المعادلة الأخيرة نحصل على العلاقة المتغيراتية التالية:

$$\delta I = \int_{s} \sigma^{ij} n_j \ \delta u_i \, ds - \int_{s_\sigma} \overline{T}^i \delta u_i \, ds = 0 \qquad (8.20)$$

هذه العلاقة تشكل أساسا متغيراتيا صالحا لاستخدام هذه الطريقة كطريقة طرفية يتم فيها حساب مصفوفة القساوة للعنصر المنتهي بتكاملات على اطراف العنصر فقط.وينصح باستخدام هذه المعادلة كأساس حسابي متغيراتي في حال لم نتمكن بطريقة الاستنباط الهندسية الموصوفة في المعادلات(8.11),(8.10),(8.9) من إيجاد تابع تقريبي بشكل المعادلة (8.10) يتصف بصفة الاستمرارية والتطابق.وتستخدم هذه الطريقة أيضا في حال وجود ثقوب وفتحات ضمن الوسط المدروس.

أما ما عدا ذلك وعند تمكننا من إيجاد التابع التقريبي المتطابق والمتوافق والمستمر فيمكن ان تطبق هذه الطريقة بخوارزميات شبيهة بطريقة العناصر المنتهية التقليدية من نموذج الانتقالات والنموذج الهجين للإجهادات.والطرق الأخيرة يجب أن تقود إلى نفس نتائج الطريقة الطرفية الممثلة بالمعادلة (8.20) .وللبرهان على ذلك سوف نغير شكل المعادلة (8.19) بأسلوبين. الأسلوب الاول بشكل مباشر باستخدام مقولة غاوس في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي:

$$\int_V (\sigma^{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_s \sigma^{ij} n_j \delta u_i \, ds = \int_V \sigma^{ij}{}_{,j} \delta u_i \, ds + \int_V \sigma^{ij} \delta u_{i,j} \, dV \qquad (8.21)$$

ومعادلات التوازن:

$$\sigma^{ij}{}_{,j} = -\overline{f}^i \qquad (8.22)$$

فتأخذ العلاقة (8.19) الشكل:

$$\delta I = \int_V \sigma^{ij} \delta u_{i,j} dV - \int_V \bar{f}^i \delta u_i dV - \int_{s_u} \sigma^{ij} n_j \delta u_i ds - \int_{s_\sigma} \bar{T}^i \delta u_i ds = 0 \quad (8.23)$$

والتي تصبح بعد تعويض الشروط الطرفية الهندسية التالية:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad s_u ; \quad \delta u_i = \delta \bar{u}_i = 0 \quad (8.24)$$

وعلاقات التشوهات-الانتقالات كما يلي:

$$\delta I = \int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V \bar{f}^i \delta u_i dV - \int_{s_\sigma} \bar{T}^i \delta u_i ds = 0 \quad (8.25)$$

هذه العلاقة تشبه تماما مبدأ الانتقالات الوهمية. لكنها تختلف عنه في الشروط التي يجب أن يحققها تابع الانتقالات. هنا يجب أن يحقق تابع الانتقالات المعادلة التفاضلية ضمن الوسط والشروط الطرفية الهندسية وعليه يجب أن تحقق توابع الإجهادات الواردة في العلاقة (8.24) والمشتقة من توابع الانتقالات هذه معادلات التوازن ضمن الوسط.

والأسلوب الثاني لتغيير شكل المعادلة(8.19) يكمن باستخدام التحويل:

$$\int_s \sigma^{ij} n_j \delta u_i ds = \delta \int_s (\sigma^{ij} n_j) u_i ds - \int_s [\delta(\sigma^{ij} n_j)] u_i ds \quad (8.26)$$

ومن ثم نستخدم مقولة غاوس في تحويل توابع الإجهادات المكاملة على الحجم إلى تكامل سطحي:

$$\int_s [\delta(\sigma^{ij} n_j)] u_i ds = \int_V u_i \delta \sigma^{ij}{}_{,j} dV + \int_V u_{i,j} \delta \sigma^{ij} dV \quad (8.27)$$

ومتغير العلاقة(8.12):

$$\delta \sigma^{ij}{}_{,j} = \delta \bar{f}^i = 0 \quad (8.28)$$

لنحصل بعد عدد من العمليات الجبرية والاختصارات على العلاقة التالية:

$$\delta I = -\int_V u_{i,j} \delta \sigma^{ij} dV + \delta \int_s u_i (\sigma^{ij} n_j) ds + \int_{s_\sigma} \bar{T}^i \delta u_i] ds - \int_{s_u} \sigma^{ij} n_j \delta u_i ds = 0$$

$$(8.29)$$

والتي تصبح بعد تعويض الشروط الطرفية الهندسية(15) بالشكل:

$$\delta I = -\int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma^{ij}dV + \int_{s_u}\overline{u}_i\,\delta\sigma^{ij}\,n_j ds + \int_{s_\sigma}\delta\left[(\sigma^{ij}n_j - \overline{T}^i)u_i\right]ds = 0 \qquad (8.30)$$

وهذه العلاقة تشبه مبدأ القوى الوهمية المعدل. وبالطبع تختلف شروط استخدامها عن شروط استخدام المبدأ السابق فهنا يجب البدء بتابع انتقالات يحقق معادلة اويلر التفاضلية ضمن الوسط والشروط الطرفية الهندسية وتوابع الإجهادات الواردة في العلاقة(8.30) هي توابع مشتقة من تابع الانتقالات هذا كما أن u_i على s_σ لايمكن اختيارها بشكل مستقل.

وباعتبار ان العلاقة(8.25) تشبه مبدأ الانتقالات الوهمية والذي يمثل الأساس النظري لطريقة الانتقالات وأن العلاقة(8.30) تشبه مبدأ القوى الوهمية المعدل والذي يمثل الأساس النظري لطريقة القوى الهجينة وأن للعلاقتين(8.25)و(8.30) أصل مشترك واحد وهو العلاقة(8.20) فيمكن الاستنتاج أنه باختيار توابع انتقالات محققة لمعادلة اويلر التفاضلية والشروط الطرفية الهندسية فلافرق بين استخدام أي من العلاقتين(8.25) أو(8.30) أو(8.20) كأساس نظري للحل.

وفي مسائل المرونة الخطية حيث يوجد تابع كمون لتعبير العمل الوهمي للقوى الداخلية وللقوى الخارجية نحصل من العلاقة(8.25) على:

$$\delta I = \delta\left\{1/2\int_V \varepsilon_{ij}\;\; c^{ijkl}\;\; \varepsilon_{kl}dV - \int_V \overline{f}^i\;\; u_i dV - \int_{s_\sigma}\overline{T}^i\;\; u_i ds\right\} = 0 \qquad (8.31)$$

وهي مشابهة لمبدأ الطاقة الكامنة الاصغري. كما نحصل من العلاقة(8.29) على:

$$\delta I = \delta\left\{-1/2\int_V \sigma^{ij}(c^{ijkl})^{-1}\sigma^{kl}dV + \int_{s_u}\sigma^{ij}n_j\overline{u_i}ds + \int_{s_\sigma}(\sigma^{ij}n_j - \overline{T}^i)u_i ds\right\} = 0$$

(8.32)

وهي مشابهة لمبدأ الطاقة المتممة المعدل.

وعلى هذا الاساس فإن النتائج التي نحصل عليها باستخدام التوابع التقريبية المشتقة كمـــا ورد في الفقرة 2 وفق الاساس المتغيراتي(8.31) أو وفق الاساس المتغيراتي(8.32) واحدة لكلا الحـــالتين وهي بدورها مماثلة لتلك النتائج التي تعطيها المعادلة (8.20) شرط أن تراعـــى كافـــة الشـــروط المتغيراتية للعلاقات المذكورة.

8-4-التطبيق العام للطريقة

سيعرض في هذه الفقرة التطبيق العام للطريقة باعتبارها طريقة طرفية يتم فيـــها تعيـــين الثوابـــت العشوائية c_k الواردة في التابع التقريبي (8.8) دون اللجوء إلى عملية الاستنباط الهندسي المشروحة في المعادلات (8.9),(8.10),(8.11)-حيث لانحتاج في هذا التطبيق إلى العلاقة المباشرة التي تربـــط بين تابع الانتقالات ضمن العنصر وانتقالات العقد وهذا يؤدي بدوره إلى تجنب الصعوبة في تحقيق الاستمرارية c^1 والناجمة عن عملية الاستنباط الهندسي ويمكن من تطوير عناصر منتهيـــة تتصـــف بالعمومية.

لننطلق الآن من التوابع التقريبية (8.8) والمحققة لمعادلة لاغرانج

$$u_i = M_i^k c_k + \overline{M}_{im} \overline{p}^m \text{ in } \quad V \tag{8.33}$$

على السطح s يكون تابع الانتقالات المترابط مع مثيله السابق في V بالشكل:

$$u_i = B_i^k c_k + \overline{B}_{im} \overline{p}^m \text{ on } \quad s \tag{8.34}$$

ولنفترض أن لهذا التابع الجزء

$$u_i = A_i^k c_k + \overline{A}_{im} \overline{p}^m \text{ on } \quad s_\sigma \tag{8.35}$$

على جزء السطح s_σ.

يترافق مع تابع الانتقالات المفترض هذا تابع إجهادات مفترض ضمن الوسط يشتق من سابقه باستخدام علاقات التشوهات-الانتقالات وقانون السلوك

$$\sigma^{ij} = p^{ijk} c_k + \overline{p}^{ij}{}_m \overline{p}^m \text{ in } \quad V \tag{8.36}$$

ولنشتق منها التوابع $\sigma^{ij} n_j$ على السطح s

$$\sigma^{ij}n_j = R^{ik}c_k + \overline{R}^i{}_m\overline{p}^m \text{ on } \quad s \tag{8.37}$$

لنفترض أن لهذا التابع الجزأين :

$$\sigma^{ij}n_j = Ru^{ik}c_k + \overline{Ru}^i{}_m\overline{p}^m \text{ on } \quad s_u \tag{8.38}$$

$$\sigma^{ij}n_j = R\sigma^{ik}c_k + \overline{R\sigma}^i{}_m\overline{p}^m \text{ on } \quad s_\sigma \tag{8.39}$$

على السطحين s_u , s_σ على التوالي.

باعتبار أن توابع الإجهادات الواردة في العلاقة (8.36) تحقق معادلات التوازن فالعلاقة (8.27) سوف تختصر إلى:

$$\int_V u_{i,j}\delta\sigma^{ij}dV = \int_s(\delta\sigma^{ij}n_j)u_i ds = \int_{s_\sigma}(\delta\sigma^{ij}n_j)u_i ds + \int_{s_u}(\delta\sigma^{ij}n_j)u_i ds \tag{8.40}$$

وبعد تعويض الشروط الطرفية الهندسية فيها تصبح العلاقة السابقة بالشكل:

$$\int_V u_{i,j}\delta\sigma^{ij}dV = \int_s(\delta\sigma^{ij}n_j)u_i ds = \int_{s_\sigma}(\delta\sigma^{ij}n_j)u_i ds + \int_{s_u}(\delta\sigma^{ij}n_j)\overline{u}_i ds \tag{8.41}$$

سوف تستخدم العلاقة السابقة بأحد الشكلين التاليين :

$$\int_V u_{i,j}\delta\sigma^{ij}dV = \int_{s_\sigma}(\delta\sigma^{ij}n_j)u_i ds + \int_{s_u}(\delta\sigma^{ij}n_j)\overline{u}_i ds \tag{8.42}$$

$$\int_s(\delta\sigma^{ij}n_j)u_i ds = \int_{s_\sigma}(\delta\sigma^{ij}n_j)u_i ds + \int_{s_u}(\delta\sigma^{ij}n_j)\overline{u}_i ds \tag{8.43}$$

لتعيين الثوابت العشوائية c_k على مستوى العنصر , والنتيجة واحدة في كلا الحالتين.

يتميز استخدام العلاقة (8.43) عن استخدام العلاقة (8.42) في تعيين الثوابت العشوائية بامكانية تطبيق الطريقة دون اللجوء إلى تكاملات ضمن العنصر المنتهي, وإنهاء تطبيق الطريقة بنجاح بتقييم تكاملات على أطراف العناصر المنتهية.مما يمكننا من معالجة عناصر منتهية تتصف بالعمومية ويمكن أن تكون ذات فتحات داخلية أو شقوق شرط أن نستخدم للأخيرة توابع تقريبية تحقق الشروط الطرفية للفتحات أو الشقوق هذه.

لنفرض الآن أن $\overline{u}_i$ تابع يحقق شروط الاستمرارية ومتطابق مع u_i على s_uوأن هذه الاستمرارية وهذا التطابق يتطلب أن يكون:

$$\overline{u}_i = L_i^k q_k \tag{8.44}$$

حيث L_i^k مصفوفة تابعة للإحداثيات المستقلة, و q_k إحداثيات معممة كانتقالات العقد والتي نرغب بأن تكون المجاهيل النهائية في جملة المعادلات النهائية للجملة المدروسة.

بتعويض العلاقات من (8.33) وحتى (8.39) والعلاقة (8.44) في العلاقة (8.42) أو (8.43) نحصل على جملة معادلات في مستوى العنصر لتحديد الثوابت العشوائية.فمثلا بعد التعويض في العلاقة (8.43) نحصل على:

$$\begin{aligned}\delta c_l(\int_s R^{il}N_i{}^k ds)c_k + \delta c_l(\int_s R^{il}\overline{N}_{im}ds)\overline{p}^m &= \delta c_l(\int_{s_\sigma} R\sigma^{Il}A_i{}^k ds)c_k \\ &+ \delta c_l(\int_{s_\sigma} R\sigma^{il}\overline{A}_{im}ds)\overline{p}^m + \delta c_l(\int_{s_u} R^{il}L_i{}^k ds)q_k\end{aligned} \tag{8.45}$$

أو بالشكل المختصر:

$$\delta c_l H^{lk}c_k + \delta c_l \overline{H}^l{}_m \overline{p}^m = \delta c_l T^{lk}q_k \tag{8.46}$$

حيث:

$$H^{lk} = (\int_s R^{il}N_i{}^k ds) - (\int_{s_\sigma} R\sigma^{il}A_i{}^k ds) \tag{8.47}$$

$$\overline{H}^l{}_m = (\int_s R^{il}\overline{N}_{im}ds) - (\int_{s_\sigma} R\sigma^{il}\overline{A}_{im}ds) \tag{8.48}$$

$$T^{lk} = (\int_{s_u} R^{il}L_i{}^k ds) \tag{8.49}$$

وباعتبار أنه يمكن أن تكون قيم δc_l عشوائية ينتج من العلاقة (8.45) أن:

$$H^{lk}c_k = -\overline{H}^l{}_m \overline{p}^m + T^{lk}q_k \tag{8.50}$$

وبعكس هذه العلاقة نحصل على قيم الثوابت العشوائية بدلالة حمولات العنصر وانتقالات العقد

$$c_p = -(H^{lp})^{-1}\overline{H}^l{}_m \overline{p}^m + (H^{lp})^{-1}T^{lk}q_k \tag{8.51}$$

في العناصر المنتهية الواقعة على الأطراف الحقيقية للوسط المدروس قد لاتكفي المعــادلات (8.42) أو (8.43) لتعيين الثوابت العشوائية عندها يجب الاستعانة بالعلاقة التالية:

$$\int_{s_u} \sigma^{ij} n_j \delta \bar{u}_i = 0 \tag{8.52}$$

وهذا يؤدي بدوره إلى اعتبار تأثير شروط الاستناد الطرفية للعنصر المنتهي على قساوته.

يمكن الحصول على نفس النتائج السابقة بتعويض العلاقات من (8.33) وحتى (8.39) في العلاقــة (8.42) ويمكن التأكد ببساطة من هذه المقولة بملاحظة مقولة غاوس في تحويل التكامل الحجمــي إلى تكامل سطحي الواردة في العلاقة (8.41).

يتم الحصول على جملة المعادلات النهائية لانتقالات العقد بتقييم التكاملات الــواردة في العلاقــة (8.20).

$$\delta I = \delta q_n \int_s L_i{}^n (R^{ip} c_p + \bar{R}^i{}_m \bar{p}^m) ds - \delta q_n \int_{s_\sigma} L_i{}^n \bar{T}^i ds$$
$$= \delta q_n T^{np} c_p + \delta q_n \bar{T}^n{}_m \bar{p}^m - \delta q_n \bar{r1}^n = 0 \tag{8.53}$$

وبتعويض الثوابت الاختيارية بقيمتها المحسوبة في العلاقة (8.51) ينتج:

$$\delta I = -\delta q_n T^{np} (H^{lp})^{-1} \bar{H}^l{}_m \bar{p}^m + \delta q_n T^{np} (H^{lp})^{-1} T^{lk} q_k + \delta q_n \bar{T}^n{}_m \bar{p}^m - \delta q_n \bar{r1}^n = 0 \tag{8.54}$$

ومنها نحصل بعد التجميع على كامل عقد المنشأ على جملة المعادلات الخطية النهائية لانتقــالات العقد

$$\sum_1^n (k^{nk} q_k - \bar{r}^n) = 0 \tag{8.55}$$

حيث:

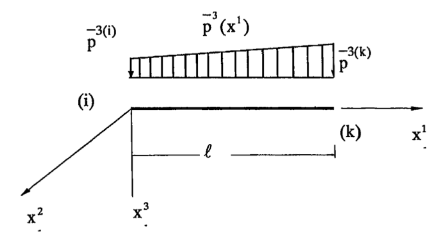
$$k^{nk} = T^{np} (H^{lp})^{-1} T^{lk} \tag{8.56}$$

مصفوفة القساوة للعنصر المنتهي والمقدار:

$$\bar{r}^n = T^{np} (H^{lp})^{-1} \bar{H}^l{}_m \bar{p}^m - \bar{T}^n{}_m \bar{p}^m + \bar{r1}^n = 0 \tag{8.57}$$

هو شعاع القوى المركزة على العقد والمكافئة للحمولة الموزعة.

8-6-عنصر منتهي إطاري مستوي



شكل8-1: عنصر منتهي إطاري مستوى محمل بحمولة موزعة على شكل شبه منحرف

سوف يتم إيضاح الخطوط الأساسية للتطبيق العام للطريقة كطريقة طرفية بناء على تطبيق بسيط وسهل وهو العنصر الإطاري ، والذي درس في الفصل الخامس بتطبيق طرق عناصر منتهية مختلفة. حيث درس بالطريقة التقليدية-نموذج الانتقالات وبالطريقة الهجينة-نموذج الإجهادات وباستخدام التطبيق المقترح لنموذج الانتقالات مع اعتبار تأثير الحمولة أي بعبارة أخرى استخدام التطبيق الحالي مع اتخاذ العلاقة (8.31) كأساس متغيراتي. وفي التطبيق الأخير استنبطت توابع تقريبية محققة لمجمل المعادلة التفاضلية الحاكمة للمسألة موضوع الدراسة والشروط الطرفية اللازمة "على العنصر المنتهي". وشرحت تفاصيل الحصول عليها ولاحاجة هنا لتكرار هذه التفاصيل ويكتفى بإعطاء صيغة التوابع التقريبية الخاصة بسهم الانعطاف:

$$u_{x^3}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x^1 & (x^1)^2 & (x^2)^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{EI_z} \begin{vmatrix} \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120l} & \frac{x^5}{120l} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{p}^{x^3(i)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{vmatrix}$$

$$u_i = M_i^k \; c_k + \overline{M}i(r)\,\bar{p}^{x^3(r)} \quad ;i = x^3 \;;k = 0,1,2,3;4; \;\; (r) = (i),(k)$$

(8.58)

$\bar{p}^{x^3(i)}, \bar{p}^{x^3(k)}$ شدات تابع الحمولة شبه المنحرفة في العقدتين $(i),(k)$ على التوالي.

باستخدام علاقات قوى المقطع- الانتقالات :

$$M^{x^2} = -EI_{x^2} \frac{\partial^2 u_{x^3}(x)}{(\partial x^1)^2} \tag{8.59}$$

$$Q^{x^3} = \frac{\partial M^{x^2}}{\partial x^1} - EI_{x^2} \frac{\partial^3 u_{x^3}(x)}{(\partial x^1)^3}$$

نحصل من التوابع u_i على توابع قوى المقطع σ^{ij} ضمن العنصر المنتهي:

$$\begin{bmatrix} Q^{x^3} \\ M^{x^2} \end{bmatrix} = EI_{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \\ & & -2 & -6x^1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} -x^1 + \frac{(x^1)^2}{2l} & \frac{(x^1)^2}{2l} \\ -\frac{(x^1)^2}{2} + \frac{(x^1)^3}{6l} & -\frac{(x^1)^3}{6l} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \bar{p}^{x^3(i)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{vmatrix} \tag{8.60}$$

وبتعويض معادلات الأطراف s_σ في العلاقة الأخيرة أي: $x^1(i) = 0\,;\, x^1(k) = l$

نحصل على توابع قوى المقطع $T^i = \sigma^{ij} n_j$ على الأطراف s_σ بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} -Q^{x^3}(i) \\ -M^{x^2}(i) \\ Q^{x^3}(i) \\ M^{x^2}(i) \end{bmatrix} = EI_{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -6l \end{bmatrix} \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{l}{2} & -\frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \bar{p}^{x^3(i)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{vmatrix} \tag{8.61}$$

$$T^i = \sigma^{ij} n_j$$

$$= T^{i(b)} = R^{i(b)k} c_k + \bar{R}^{i(b)}{}_{(r)}\, \bar{p}^{x^3(r)}$$

تشتق توابع الانتقالات على الأطراف من تابع الانتقالات ضمن العنصر المنتهي (8.58) بتعويض معادلات الأطراف في العلاقة المذكورة وفي تابع الدورانات المشتق منها وفق العلاقة $\varphi_{x^2} = -\partial u_{x^3} / \partial x^1$ فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{EI_{x^2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{l^4}{30} & \frac{l^4}{120} \\ -\frac{l^3}{8} & -\frac{l^3}{24} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \bar{p}^{x^3(i)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{vmatrix}$$

$$u_{i(b)} = N_{i(b)}{}^{k} c_k + \overline{N}_{i(b)(r)} \bar{p}^{x^3(r)}$$

(8.62)

التوابع السابقة المشتقة من توابع الانتقالات ضمن العنصر المنتهي يجب أن تتطابق مع توابع الانتقالات على أطراف العنصر المنتهي التي تحقق شروط الاستمرارية والتطابق.وحتى تحقق هذه الأخيرة مثل هذه الشروط يجب أن يتعلق تابع الانتقالات على طرف ما بالاحداثيات الديكارتية المستقلة وبدرجات الحرية لعقد هذا الطرف دون الأطراف الأخرى.والتوابع التالية:

$$\begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} \qquad (8.63)$$

$$u_{i(b)} = I_{i(b)}{}^{m(e)} \; u_{m(e)}$$

تحقق شروط الاستمرارية والتطابق.

لتحديد الثوابت العشوائية c_k تستخدم العلاقة (8.42) ولذلك لابد من حساب التكامل $\int_V u_{i,j}\delta\sigma^{ij}dV$ على حجم العنصر.

في حالة العنصر الإطاري الخاضع لتأثير الإنعطاف وباعتبار الفرضيات التسهيلية الخاصة بهذه الحالة كفرضيات بقاء المقاطع مستوية وفرضية برنولي وبإهمال تأثير تشوهات القص وجدنا أن المركبات $u_{i,j}$ تتقلص لتقتصر على المركبة u_{x^3,x^1} وأن مركبات الإجهادات σ^{ij} تتقلص أيضا لتقتصر على الإجهاد $\sigma^{x^1x^1}$ واللتين يمكن حسابهما بالعلاقتين:

$$\begin{aligned} u_{x^3,x^1} &= -x^3 \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} \\ \sigma^{x^1x^1} &= -Ex^3 \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} \end{aligned} \qquad (8.64)$$

والمشتق الثاني لتابع الانتقالات (8.58) هو بالتفصيل:

$$\frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x^1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{EI_{x^2}} \begin{vmatrix} \frac{(x^1)^2}{2} - \frac{(x^1)^3}{6l} & \frac{(x^1)^3}{6l} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{p}^{x^3(i)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{vmatrix}$$

$$u_i = P_i^k\, c_k + \bar{P}_{i(r)}\, \bar{p}^{x^3(r)} \quad ;i = x^3\ ;k = 0,1,2,3,4;\ (r) = (i),(k)$$

(8.65)

ويصبح التكامل الحجمي كما يلي:

$$\int_V u_{i,j}\delta\sigma^{ij}dV = \int_0^l \int_A -x^3 \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} E(-x^3\delta\frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2})dx^1 dA$$

$$= \int_A (x^3)^2 dA \int_0^l \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} E\delta(\frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2})dx^1 \quad (8.66)$$

$$= EI_{x^2} \int_0^l \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} \delta(\frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2})dx^1$$

وبعد تعويض (8.65) في العلاقة السابقة يأخذ التكامل الحجمي السابق الصيغة التفصيلية التالية:

$$\int_V u_{i,j}\delta\sigma^{ij}dV = \int_0^l (P^k c_k + \overline{P}(r)\overline{p}^{x^3(r)})EI_{x^2} P^l \delta c_l dx^1$$

$$= c_k(\int_0^l P^k EI_{x^2} P^l dx^1)\delta c_l + \overline{p}^{x^3(r)}(\int_0^l \overline{P}(r)EI_{x^2} P^l dx^1)\delta c_l \quad (8.67)$$

$$= c_k H^{kl} \delta c_l + \overline{p}^{x^3(r)} \overline{H}_{(r)}{}^l \delta c_l$$

حيث:

$$H^{kl} = \int_0^l P^k EI_{x^2} P^l dx^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix}$$

$$(8.68)$$

$$\overline{H}_{(r)}{}^l = \int_0^l \overline{P}(r)EI_{x^2} P^l dx^1 = \begin{bmatrix} \\ \frac{l^3}{4} & \frac{11l^4}{20} \\ \frac{l^3}{12} & \frac{l^4}{5} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفات السابقة يمكن الحصول عليها بإنجاز التكامل الطرفي على أطراف العنصر المنتهي $\int_{s} \delta\sigma^{ij} n_j\, u_i dV$ المكافيء للتكامل $\int_{V} u_{i,j} \delta\sigma^{ij} dV$ وهي لحالة التكامل الطرفي كما يلي:

$$\int_{V} u_{i,j} \delta\sigma^{ij} dV = \int_{s} \delta\sigma^{ij} n_j u_i ds = c_k\ R^{i(b)l}\ N_{i(b)}{}^{k} \delta c_l + \overline{p}^{-x^3(r)}\ R^{i(b)l}\, \overline{N}_{i(b)(r)}\ \delta c_l$$

$$H^{kl} = R^{i(b)l}\ N_{i(b)}{}^{k}$$

$$\overline{H}_{(r)}{}^{l} = R^{i(b)l}\, \overline{N}_{i(b)(r)}$$

(8.69)

ويمكن ببساطة التأكد من تطابق المصفوفات الواردة في العلاقة (8.68) والعلاقة (8.69) .

نستخدم الآن إحدى العلاقتين (8.42) و (8.43) لتعيين الثوابت العشوائية c_k. في الحالتين لابد من إنجاز التكامل $\int_{s_u} \delta\sigma^{ij} n_j\, \overline{u}_i dV$ والتكامل $\int_{s_\sigma} \delta\sigma^{ij} n_j\, u_i dV$. وهنا يجب التنويه أن عملية تحديد الثوابت العشوائية هي عملية بديلة للاستنباط الهندسي وتجري على مستوى العنصر المنتهي وهي عمليا تستخدم مبرهنة غاوص السارية المفعول على أي جزء مقتطع من الوسط المدروس سواء كان منتهيا او تفاضليا. وان الأطراف s_σ و s_u هي الأطراف الحقيقية للعنصر التي تكون عليها القوى مفترضة والانتقالات مفترضة على التوالي والتي يجب تحديدها وفقا للمجاهيل التي يجري استخدامها للاستنباط. ففي مثالنا هذا لايوجد قوى خارجية أو إجهادات مفترضة على مستوى العنصر ولا تستخدم أي قوى مفترضة في عملية الاستنباط بالتالي فالتكامل $\int_{s_\sigma} \delta\sigma^{ij} n_j\, u_i dV$ معدوم. وعليه تكون أطراف العنصر كلها من النموذج s_u حيث تستخدم درجات الحرية الأربعة للعنصر المنتهي أي الانتقال والدوران لكل عقدة في عملية الاستنباط .

نستخدم الآن لحقل الانتقالات المفترضة $\overline{u}_i$ التابع التالي الذي يحقق شروط الاستمرارية والتطابق ويتطابق مع u_i :

$$\begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} \tag{8.70}$$

$$\bar{u}_{i(b)} = I_{i(b)}{}^{m(e)} \, u_{m(e)}$$

عندها يأخذ التكامل $\int_{s_u} \delta\sigma^{ij} n_j \, \bar{u}_i dV$ الصيغة التالية:

$$\int_{s_u} \delta\sigma^{ij} n_j \bar{u}_i ds = \delta c_l \, R^{i(b)l} \, I_{i(b)}{}^{m(e)} u_{m(e)} = \delta c_l \left(\int_{s_u} R^{i(b)l} \, I_{i(b)}{}^{m(e)} ds \right) u_{m(e)}$$

$$= \delta c_l \, T^{lm(e)} u_{m(e)}$$

(8.71)

والمكافئة تفصيليا لما يلي:

$$\delta c_l T^{lm(e)} u_{m(e)} = \begin{bmatrix} \delta c_0 & \delta c_1 & \delta c_2 & \delta c_3 \end{bmatrix} EI_{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -6 & -6l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix}$$

(8.72)

$$T^{lm(e)} = EI_{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -6 & -6l \end{bmatrix} \tag{8.73}$$

بتعويض التكاملات السابقة في إحدى العلاقتين (8.42) أو (8.43) نحصل على:

$$\delta c_l \, T^{lm(e)} \, u_{m(e)} = c_k \, H^{kl} \, \delta c_l + \bar{p}^{x^3(r)} \, \overline{H}_{(r)}{}^{l} \, \delta c_l$$

$$H^{kl} \, c_k = T^{lm(e)} \, u_{m(e)} - \bar{p}^{x^3(r)} \, \overline{H}_{(r)}{}^{l} \qquad (8.74)$$

بحل جملة المعادلات السابقة بالنسبة للثوابت العشوائية نجد أنه يمكننا بعد استبعاد العمليات الصفرية الحصول على الثوابت العشوائية اللازمة لمتابعة الحل وتقييم الحد الوارد في المبـــدأ المتغـــيراتي أي الشكل التكاملي للشروط الطرفية الطبيعية:

$$c_q = H_{ql} \, T^{lm(e)} \, u_{m(e)} - H_{ql} \, \bar{p}^{x^3(r)} \, \overline{H}_{(r)}{}^{l} \qquad (8.75)$$

حيث تعطى المصفوفة H_{ql} بالشكل:

$$H_{ql} = \frac{1}{EI_{x^2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l} & -\frac{1}{2l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2l^2} & \frac{1}{3l^3} \end{bmatrix} \qquad (8.76)$$

وبعد إنجاز جداء المضاريب الوارد في العلاقة (8.75) نحصل تفصيليا على:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ -\frac{3}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & -\frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & -\frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{EI_{x^2}} \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ -\frac{l^2}{40} & -\frac{l^2}{60} \\ \frac{71}{120} & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}^{x^3(i)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{bmatrix} \qquad (8.77)$$

نقيم الآن التابعي الوارد في المبدأ المتغيراتي والذي يمثل الشكل التكاملي للشروط الطرفية الطبيعيـــة بتعويض $\sigma^{ij}n_j$ بمكافئها من العلاقة (8.61) وأخذ متغير u_i من العلاقة (8.63) لنحصل على:

$$\delta I = \int_S \sigma^{ij} n_j \delta u_i ds - \int_{s_\sigma} \overline{T}^i \delta u_i ds$$

$$= \int_s (R^{i(b)k} c_k + \overline{R}^{i(b)}{}_{(r)}\, \overline{p}^{x^3(r)}) I_{i(b)}{}^{m(e)}\, \delta u_{m(e)} - \int_{s_\sigma} \overline{T}^{i(b)}\, I_{i(b)}{}^{m(e)}\, \delta u_{m(e)}$$

(8.78)

وبعد تعويض الثوابت العشوائية c_k المحسوبة وفق العلاقة (8.75) في التابعي السابق نحصل على:

$$\delta I = \int_s (R^{i(b)k} H_{kl} T^{ln(d)} u_{n(d)}\; I_{i(b)}{}^{m(e)}\, \delta u_{m(e)}$$

$$- H_{kl} \overline{H}_{(r)}{}^{l}\; R^{i(b)}{}_{(r)}\, \overline{p}^{x^3(r)}\; I_{i(b)}{}^{m(e)}\, \delta u_{m(e)}$$

$$+ \overline{R}^{i(b)}{}_{(r)}\, \overline{p}^{x^3(r)}\; I_{i(b)}{}^{m(e)}\, \delta u_{m(e)}) ds$$

$$- \int_{s_\sigma} \overline{T}^{i(b)}\; I_{i(b)}{}^{m(e)}\, \delta u_{m(e)}$$

$$= u_{n(d)}\; T^{km(e)}\; H_{kl}\; T^{ln(d)}\, \delta u_{m(e)} - H_{kl}\; \overline{H}_{(r)}{}^{l}\; T^{km(e)}\, \delta u_{m(e)}$$

$$+ \overline{T}^{m(e)}{}_{(r)}\, \overline{p}^{x^3(r)}\, \delta u_{m(e)} - \overline{f}_2^{m(e)}\; \delta u_{m(e)}$$

$$= u_{n(d)}\, k^{n(d)m(e)}\, \delta u_{m(e)} - f_1^{m(e)}\, \delta u_{m(e)} - \overline{f}_2^{m(e)}\; \delta u_{m(e)}$$

(8.79)

حيث:

$$K^{m(e)n(d)} = T^{km(e)}\; H_{kl}\; T^{ln(d)}$$

$$f_1^{m(e)} = T^{km(e)} H_{kl} \overline{H}_{(r)}{}^{l}\; \overline{p}^{x^3(r)} - \overline{T}^{m(e)}{}_{(r)} \overline{p}^{x^3(r)}$$

$$\overline{f}_2^{m(e)} = \int_{s_\sigma} \overline{T}^{i(b)}\; I_{i(b)}{}^{m(e)} ds$$

$$\overline{T}^{m(e)}{}_{(r)} = \int_s \overline{R}^{i(b)}{}_{(r)}\;\; I_{i(b)}{}^{m(e)}\, ds$$

(8.80)

نلاحظ أنه لتقييم الحد الوارد في المبدأ المتغيراتي أي الشكل التكاملي للشروط الطرفيـــة الطبيعيـــة لاحاجة لنا لمعرفة الثوابت العشوائية c_0 , c_1 وذلك لأن المصفوفة $R^{i(b)k}$ تحتوي في عموديـــها الأول والثاني على أصفار .

وأخيراً نجد بعد تقييم الجداءات الواردة في العلاقات (8.80) أن:

$$K^{m(e)n(d)} = \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \qquad (8.81)$$

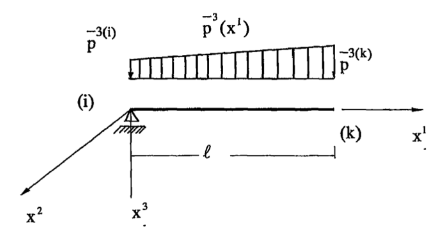
$$\overline{T}^{m(e)}{}_{(r)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{l}{2} & -\frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix} \qquad (8.82)$$

$$\overline{f}^{m(e)} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{7l}{20} & \frac{3l}{20} \\ -\frac{l^2}{20} & -\frac{l^2}{30} \\ -\frac{7l}{20} & -\frac{3l}{20} \\ -\frac{3l^2}{10} & -\frac{7l^2}{60} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{l}{2} & -\frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \overline{p}x^3(i) \\ \overline{p}x^3(k) \end{bmatrix} \qquad (8.83)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7l}{20} & \frac{3l}{20} \\ -\frac{l^2}{20} & -\frac{l^2}{30} \\ \frac{3l}{20} & \frac{7l}{20} \\ \frac{l^2}{30} & \frac{l^2}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p}x^3(i) \\ \overline{p}x^3(k) \end{bmatrix}$$

يلاحظ أن القوى المركزة المكافئة للحمولة الموزعة مساوية لتلك التي تنتج في وثاقات جائز موثوق من الطرفين ومحمل بالحمولة الموزعة نفسها.

8-7- اعتبار تأثير شروط الاستناد على مصفوفة القساوة



شكل8-2: عنصر منتهي إطاري مستوى بشروط استناد مختلفة

سوف يتم إيضاح الخطوط الأساسية للحصول على مصفوفة القساوة لعنصر إطاري مستند استناداً بسيطاً في طرافه اليساري حيث مبدأ الإحداثيات الخاصة بالعنصر.

هنا نجد أن درجات الحرية $u_{x^3(i)}, u_{x^3(k)}, \varphi_{x^2(k)}$ هي التي يجب استخدامها للاستنباط الهندسي حيث لدينا على الطرف اليساري جزء سطح s_σ عليه القوى معلومة وهو عزم الانعطاف $M^{x^2}(i)$ وبالتالي يكون T^i على s_σ مكافئاً لما يلي :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -M^{x^2}(i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = EI_{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \bar{p}^{x^3(i)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{vmatrix} \tag{8.84}$$

$$T^i = \sigma^{ij} n_j$$

$$= T^{i(b)} = R\sigma^{i(b)k} c_k + \bar{R}\sigma^{i(b)}{}_{(r)}\, \bar{p}^{x^3(r)}$$

والانتقالات الموافقة لهذه المركبة هي:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_{x^2(i)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{EI_{x^2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \bar{p}^{x^3(i)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{vmatrix}$$

$$u_{i(b)} = A_{i(b)}{}^{k} c_k + \overline{A}_{i(b)(r)} \bar{p}^{x^3(r)}$$

(8.85)

وتصبح المصفوفات $H^{lk}, \overline{H}^{l}{}_{(r)}$ المحسوبة وفق العلاقات (8.47)، (8.48) معطاة تفصيلياً كالتالي:

$$H^{kl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix}$$

(8.86)

$$\overline{H}_{(r)}{}^{l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix}$$

وجملة المعادلات لتعيين الثوابت العشوائية c_k هي من الشكل:

$$EI_{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -6 & -6l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \bar{p}^{x^3(i)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{vmatrix}$$

$$H^{lk} c_k = T^{lm(e)} u_{m(e)} + \overline{H}^{l}{}_{(r)} \bar{p}^{x^3(r)}$$

(8.87)

نستخدم الآن الشرط (8.52) لإيجاد علاقة تربط المجهول غير المستقل $\varphi_{x^2(k)}$ وغير المستخدم في عملية الاستنباط وبين بقية المجاهيل. وبالتالي يجب علينا حساب توابع قوى المقطع $T^i = \sigma^{ij} n_j$ على الأطراف s_u والمكافئة لمايلي:

$$\begin{bmatrix} -Q^{x^3}(i) \\ 0 \\ Q^{x^3}(i) \\ M^{x^2}(i) \end{bmatrix} = EI_{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -6l \end{bmatrix} \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{l}{2} & -\frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \bar{p}^{x^3(i)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{vmatrix}$$

$$T^i = \sigma^{ij} n_j \tag{8.88}$$

$$= T^{i(b)} = Ru^{i(b)k} c_k + \bar{R}u^{i(b)}{}_{(r)}\, \bar{p}^{x^3(r)}$$

نستخدم الآن لحقل الانتقالات المعلومة $\bar{u}_i$ التابع (8.70) الذي يحقــق شــروط الاســتمرارية والتطابق، عندها يجب أن يكون:

$$\int_{s_u} \sigma^{ij} n_j\, \delta\bar{u}_i\, ds = \delta c_l \{ \int_{s_u} I_{i(b)}{}^{m(e)}\, Ru^{li(b)} ds + \int_{s_u} \bar{R}u^{i(b)}{}_{(r)}\, \bar{p}^{x^3(r)} ds \}$$

$$= \delta c_l \{ Tu^{lm(e)} u_{m(e)} + \bar{T}u^l{}_{(r)}\, \bar{p}^{x^3(r)} \}$$

$$= \begin{bmatrix} \delta c_0 & \delta c_1 & \delta c_2 & \delta c_3 \end{bmatrix} \{ EI_{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 6 & 0 & -2 & -6l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{l}{2} & -\frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}^{x^3(i)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{bmatrix} \} = 0 \tag{8.89}$$

وباعتبار أن المقادير المستخدمة للاستنباط هي $u_{x^3(i)}, u_{x^3(k)}, \varphi_{x^2(k)}$ وأن $\varphi_{x^2(i)}$ غير مستخدمة للاستنباط ولايمكن أن تكون قيمتها عشوائية، إذ أنها قيمة مرتبطة بالمجاهيل الأخرى حيث لايمكن أن نختار $\delta\varphi_{x^2(i)} = 0$ وبالتالي فالمعادلة الثانية من المعادلات السابقة تفضي إلى النتيجة التالية:

$$2c_2 = 0 \; ; \; c_2 = 0 \tag{8.90}$$

وبتعويض هذه النتيجة في جملة المعادلات (8.87) وحل هذه المعادلات بالنسبة للثوابت c_1 سنجد أن:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ \frac{3}{2l^2} & 0 & -\frac{3}{2l} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2l^3} & 0 & -\frac{1}{2l^3} & -\frac{1}{2l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{EI_{x^2}} \begin{bmatrix} ? & ? \\ \frac{l^3}{80} & \frac{l^3}{120} \\ 0 & 0 \\ \frac{11l}{240} & \frac{1}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{x^3(i)} \\ \bar{p}_{x^3(k)} \end{bmatrix}$$

(8.91)

نلاحظ أن قيمة الثابت c_1 مساوية لقيمة $\varphi_{x^2(i)}$ فيما لو حسب الدوران في طرف الجائز اليساري والناتج عن الحمولات الموزعة وانتقال ودوران العقد.

وأخيرا، وبمعرفة المصفوفة $T^{km(e)}$ نجد بعد تقييم الجداءات الواردة في العلاقات (8.80) أن:

$$K^{m(e)n(d)} = EI_{x^2} \begin{bmatrix} \frac{3}{l^3} & 0 & -\frac{3}{l^3} & -\frac{3}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^3} & 0 & \frac{3}{l^3} & \frac{3}{l^2} \\ -\frac{3}{l^2} & 0 & \frac{3}{l^2} & \frac{3}{l} \end{bmatrix} \tag{8.92}$$

مصفوفة القساوة للعنصر المستند استنادا بسيطا من طرفه اليساري وأن:

$$\bar{T}^{m(e)}(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix} \tag{8.93}$$

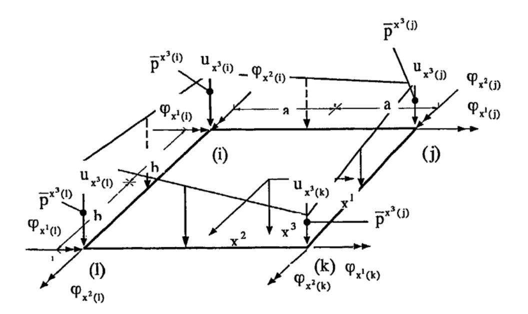
وبالتالي تكون القوى المركزة على العقد والمكافئة للحمولة الموزعة كما يلي:

$$\bar{f}^{m(e)} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{11l}{40} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 \\ -\frac{11l}{40} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{11l^2}{40} & -\frac{l^2}{10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \bar{p}x^3(i) \\ \bar{p}x^3(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11l}{40} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 \\ \frac{9l}{40} & \frac{2l}{5} \\ \frac{7l^2}{120} & \frac{l^2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}x^3(i) \\ \bar{p}x^3(k) \end{bmatrix} \tag{8.94}$$

وهي بدورها مساوية لتلك التي تنتج في مساند الجائز الموثوق من الطرف اليميني والمتمفصل من الطرف اليساري والمحمل بالحمولة الموزعة نفسها.

8-8-عنصر مستطيل لانعطاف البلاطات بحمولات لاعلى التعيين:



شكل(8-3):عنصر منته مستطيل لبلاطة رقيقة محملة بحمولات موزعة لا على التعيين،المحاور الإحداثية،درجات الحرية ،الحمولات.

لنقطتع من بلاطة محملة بحمولة موزعة لاعلى التعيين $\bar{p}^{x^3}(x^1,x^2)$ عنصراً مستطيلاً ونشير إلى جملة محاور إحداثية كما في الشكل. لتكن قيم شدة الحمولة على عقد العنصر $\bar{p}^{x^3(i)}, \bar{p}^{x^3(j)}, \bar{p}^{x^3(k)}, \bar{p}^{x^3(l)}$. لنفترض أن المعادلة التفاضلية الحاكمة والمعتبرة لحالة البلاطة هذه من الشكل:

$$u^0_{x^3,x^1x^1x^1x^1} + u^0_{x^3,x^2x^1x^1x^2} + u^0_{x^3,x^1x^2x^2x^1} + u^0_{x^3,x^2x^2x^2x^2} = \frac{\bar{p}^{x^3}(x^1,x^2)}{k}$$

(8.95)

حيث $u^0_{x^3}$ هي تابع الانتقالات، k ثابت صلابة البلاطة.

يحتوي التابع التقريبي العادي لهذا العنصر على اثني عشر ثابتاً وعددها مساوٍ لعدد درجات الحرية وهي انتقال ودورانين لكل عقدة. لكي نتمكن من تمثيل حمولات العنصر نختار توابع الانتقـــالات بالشكل:

$$\begin{aligned} u^{\circ}_{x^3}(x^1,x^2) = {} & c_0 + c_1x^1 + c_2x^2 + c_3(x^1)^2 + c_4x^1x^2 + c_5(x^2)^2 + c_6(x^1)^3 + c_7(x^1)^2x^2 \\ & + c_8x^1(x^2)^2 + c_9(x^2)^3 + c_{10}(x^1)^3x^2 + c_{11}x^1(x^2)^3 + c_{12}(x^1)^2(x^2)^2 \\ & + c_{13}(x^1)^4x^2 + c_{14}x^1(x^2)^4 + c_{15}(x^1)^3(x^2)^3 \end{aligned}$$

(8.96)

لمثل هذا الاختيار يمكن تعيين الثوابت الاختيارية الزائدة باستخدام الشروط التي تنتج عن اشـــتقاق المعادلة (8.96) وفق المعادلة(8.95) كما سنرى لاحقا. بالطبع يمكن اختيار التـــابع التقريـــبي بأشكال مختلفة. على سبيل المثال يمكن نختار كثير حدود يحتوي 22 حدا وهي كل حدود الدرجة السادسة من مثلث باسكال(21 حدا) والحد $(x^1)^3(x^2)^3$. لكن في مثل هذه الحـــالات تعطـــي المعادلة التفاضلية عددا من اشروط أقل من اللازمة لتحديد الثوابت الاختيارية. وهذا يعني أن هناك حلولا مختلفة لتحقيق المعادلة التفاضلية (8.95). بعد هذه الملاحظة لنعد إلى مسألةتحديد الثوابـــت الاختيارية.

باشتقاق التابع التقريبي (8.96) وفق المعادلة التفاضلية (8.95) يجب أن يكون:

$$k\begin{bmatrix}8 & 24x^1 & 24x^2 & 72x^1x^2\end{bmatrix}\begin{vmatrix}c_{12}\\c_{13}\\c_{14}\\c_{15}\end{vmatrix} = \overline{p}^{x^3}(x^1,x^2)$$

(8.97)

نستخدم الآن التوابع التقريبية للتعبير عن تابع الحمولة $\overline{p}^{x^3}(x^1,x^2)$ ضمن العنصر المنتهي بدلالة قيم الحمولة على عقده ولهذا الغرض نختار التابع التقريبي لـــ $\overline{p}^{x^3}(x^1,x^2)$ بالشكل:

$$\overline{p}^{x^3}(x^1,x^2) = \begin{bmatrix}1 & x^1 & x^2 & x^1x^2\end{bmatrix}\begin{vmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{vmatrix}$$

(8.98)

والعلاقة التالية بين الثوابت الاختيارية c و

$$\begin{vmatrix} c_{13} \\ c_{14} \\ c_{15} \\ c_{16} \end{vmatrix} = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} \frac{1}{8}\alpha_0 \\ \frac{1}{24}\alpha_1 \\ \frac{1}{24}\alpha_2 \\ \frac{1}{72}\alpha_3 \end{vmatrix}$$

(8.99)

تحقق المعادلة التفاضلية.

تحدد الان الثوابت بدلالة قيم الحمولة على عقد العنصر من التابع التقريـــــبي(8.98) بتعويـــض إحداثيات العنصر فيها وعكس العلاقة الناتجة:

$$\begin{bmatrix} \frac{-}{p}x^3(i) \\ \frac{-}{p}x^3(j) \\ \frac{-}{p}x^3(k) \\ \frac{-}{p}x^3(l) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix}$$

(8.100)

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{ab} & -\frac{1}{ab} & \frac{1}{ab} & -\frac{1}{ab} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-}{p}x^3(i) \\ \frac{-}{p}x^3(j) \\ \frac{-}{p}x^3(k) \\ \frac{-}{p}x^3(l) \end{bmatrix}$$

(8.101)

بتعويض الثوابت الاختيارية $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}$ الفائضة عن عدد درجات حرية عقد العنصر بقيمتها المحددة من العلاقتين(8.99),(8.101) في العلاقة(8.96) نحصل على:

$$u_{x}^{\circ}{}_{3}(x^1,x^2)=\left[1\ x^1\ x^2\ (x^1)^2\ x^1x^2\ (x^2)^2\ (x^1)^2x^2\ (x^1)^2x^2\ (x^2)^3\ (x^2)^3\ (x^1)^3x^2\ x^1(x^2)^3\right]\begin{vmatrix} c_0 \\ . \\ . \\ . \\ c_{11} \end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{4k}\left[(x^1)^2(x^2)^2\quad (x^1)^4x^2\quad x^1(x^2)^4\quad (x^1)^3(x^2)^3\right]\begin{vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{24a} & \frac{1}{24a} & \frac{1}{24a} & -\frac{1}{24a} \\ -\frac{1}{24b} & -\frac{1}{24b} & \frac{1}{24b} & \frac{1}{24b} \\ \frac{1}{72ab} & -\frac{1}{72ab} & \frac{1}{72ab} & -\frac{1}{72ab} \end{vmatrix}$$

(8.102)

بعد حذف الثوابت الاختيارية المتبقية من العلاقة السابقة باستخدام عملية الاستنباط الهندسي المعروفة نحصل على التابع التقريبي للانتقال ويكتفى بذكر جزئه غير المتجانس إذ أن جزئه المتجانس مكافىء للتوابع التقريبية لعنصر البلاطة غير المتطابق الوارد في [12] والمعطى تفصيليا في هذا الكتاب عبر العلاقة (6.181):

$$\overline{N}_{ij}\overline{p}^{j}=\frac{1}{4k}\left[\overline{N}1\quad \overline{N}2\quad \overline{N}3\quad \overline{N}4\right]\begin{vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{24a} & \frac{1}{24a} & \frac{1}{24a} & -\frac{1}{24a} \\ -\frac{1}{24b} & -\frac{1}{24b} & \frac{1}{24b} & \frac{1}{24b} \\ \frac{1}{72ab} & -\frac{1}{72ab} & \frac{1}{72ab} & -\frac{1}{72ab} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p}^{x^3}(i) \\ \overline{p}^{x^3}(j) \\ \overline{p}^{x^3}(k) \\ \overline{p}^{x^3}(l) \end{bmatrix} \end{vmatrix}$$

(8.103)

حيث:

$$\overline{N}1 = a^2b^2(1-\frac{(x^1)^2}{a^2})(1-\frac{(X^2)^2}{b^2})$$

$$\overline{N}2 = a^4b\frac{x^2}{b}(1-\frac{(x^1)^2}{a^2})^2$$

$$\overline{N}3 = ab^4\frac{x^1}{a}(1-\frac{(x^2)^2}{b^2})^2$$

$$\overline{N}4 = a^3b^3\frac{x^1}{a}\frac{x^2}{b}(1-\frac{(x^1)^2}{a^2})(1-\frac{(x^2)^2}{b^2})$$

(8.104)

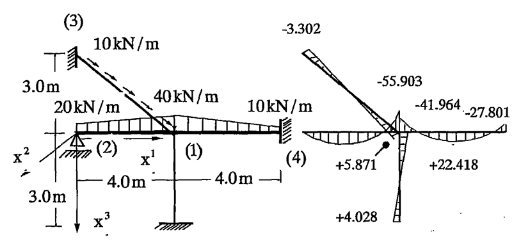
من المعادلات(8.103),(8.104) يمكن إستنتاج التوابع التقريبية لحالة حمولات موزعة بانتظام على سطح البلاطة. ففي هذه الحالة يكون $\overline{p}^{x^3(i)} = \overline{p}^{x^3(j)} = \overline{p}^{x^3(k)} = \overline{p}^{x^3(l)} = \overline{p}$ وعندها يتقلص الجزء غير المتجانس للتابع التقريبي ليصبح على الشكل:

$$\overline{N}ij\overline{p}^j = \overline{p}\frac{a^2b^2}{8k}(1-\frac{(x^1)^2}{a^2})(1-\frac{(x^2)^2}{b^2}) \qquad (8.105)$$

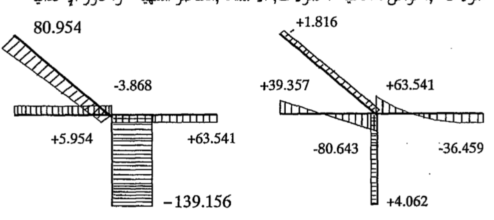
8 –9 ـــ نتائج عددية

إطار مؤلف من أربع قضبان أبعاده وخواصه الهندسية معطاة في الشكل8–4–a. الإطار متمفصل في نقطة استناده (2) وهو موثوق في نقاط استناده (3),(4),(5). يخضع القضيب (1)(3) إلى حمولة ناظمية باتجاه محور القضيب ومتغيرة خطيا شدتها في العقدة (3) 10 kN/m وفي العقدة (1) 20 kN/m. كما يخضع القضيبان (1)(2) و (1)(4) إلى حمولة عرضانية عمودية على محوريهما وموزعة خطيا شداتها موضحة على الشكل نفسه. جمعت نتائج الحل في مخططات القوى الناظمية والقوى القاصة وعزوم الانعطاف, وهي موضحة في الاشكال 8–4–b,c,d. يلاحظ أن نتائج الحل متطابقة باستخدام أي من المبادئ المتغيراتية (8.20),(8.30),(8.32) ، وهي بدورها

مطابقةللحل الدقيق.من الجدير بالذكر أيضاً أن استخدام التوابع التقريبية المحققة لمعادلة لاغرانـــج بالإضافة إلى الشروط الطرفية اللا زمة قد سمح باعتبار شروط استناد العنصر (1)(2) على قساوته. والنتائج التي حصلنا عليها باستخدام الطريقة الحالية تمثل تحسيناً نوعياً لنتائج طريقة العناصر المنتهية ويكفي حل هذا المنشأ بالطرق التقليدية المعروفة للتأكد من ذلك. إن تطابق نتائج المبادئ المتغيراتية الثلاث (8.20)،(8.30)،(8.32) يعود إلى تمكننا من إيجاد توابع تقريبية تامـــة تتصـــف بصفـــة الاستمرارية وتحقق كافة شروط استخدام المبادئ المتغيراتية المذكورة أعلاه. أما إذا لم نتمكن مـــن إيجاد مثل هذه التوابع فينصح باستخدام التطبيق العام الوارد في الفقرة 8-4 .



شكل8-4-b : إطار مستوي: مخطط عزوم الإنعطـــاف   شـــكل8-4-a : إطـــار مســـتوي: الحمولات ,الخواص الهندسية الحمولات, الاستناد ,العناصر المنتهية والمحاور الإحداثية

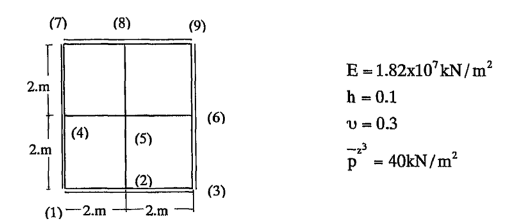


شكل8-4-d: مخطط القوى الناظمية   شكل8-4-c: مخطط قوى القص

من الواضح أن طريقة الاستنباط الهندسية لعنصر البلاطة الموصوف في الفقرة 8-8 لاتـــؤدي إلى توابع محققة لشروط الاستمرارية وشروط استخدام المبادئ المتغيراتية المقترحة، إذ نحصل بنتيجـــة الاستنباط الهندسي على عنصر منتهي يتصف بعدم التوافق (nonconform). وإذا أردنا تحقيـــق الشروط المذكورة لابد من استخدام التطبيق العام للطريقة الوارد في الفقرة 8-4. بالرغم من ذلك يمكن أن تعرض نتائج العنصر المنتهي المدروس في الفقرة 8-8 وتقارن بالحلول التقليديـــة. ولهـــذا الغرض درست بلاطة مربعة مستندة استناداً بسيطاً من جميع أطرافها ومحملة بحمولة موزعة بنتظـام على كل مساحتها وثوابتها الهندسية معطاة في الشكل 8-5. قورنت النتائج الحالية للسهم وعـــزم الإنعطاف في منتصف البلاطة ولعزم الفتل في زاوية البلاطة مع الحل الدقيق وحلول أخرى مـــن المصدرين[13]،[14] ورتبت النتائج في الجدول التالي:

		w(5)	mxx(5)	mxy(1)
الحل الدقيق		0.02495	30.647	-20.789
2x2	DE	0.02526	40.140	-15.509
elements	ACM	0.03250	49.856	-13.828
	DKT	0.3463	49.162	-14.981
6x6	DE	0.02500	31.177	-20.948
elements	ACM	0.02600	32.194	-19.789
	DKT	0.02569	31.854	-20.181
8x8	DE	0.02497	30.954	-20.823
elements	ACM	0.02554	31.512	-20.170
	DKT	0.02537	31.329	-20.452

يلاحظ أن تحسين النتائج ظاهر للعيان وخاصة عند استخدام شبكة عناصر منتهية خشنة.



شكل8 5: بلاطة مربعة مستندة استناداً بسيطاً تحت تأثير حمولة موزعة بانتظام.

8-10ـ استنتاجات ختامية

عرضت في فقرة الملاحظات الختامية طريقة تستخدم الشروط الطرفية الطبيعية كقاعدة حسابية متغيراتية لحل المعادلات التفاضلية التي تملك شروطاً طرفية لازمة وأخرى طبيعية وبينت الطرق الضرورية لاستنباط التوابع التقريبية الواجب استخدامها مع مثل هذه القاعدة الحسابية. فبالإضافة إلى تغيير الشكل التقليدي للاستنباط الهندسي من أجل حساب الثوابت العشوائية استخدمت مقولة غاوس في التكامل في تعيين الثوابت العشوائية وتحقيق الشروط الطرفية اللازمة. المجاهيل النهائية في هذه الطريقة هي أيضاً انتقالات العقد وتحدد من الشروط الطرفية الطبيعية للمسألة المطروحة.وبين أيضاً أن نتائج التقنيات الحسابية لطريقة العناصر المنتهية التقليدية-نموذج الانتقالات والطريقة التقليدية الهجينة-نموذج الإجهادات وطريقة ترفتز تتوحد مع نتائج الطريقة الحالية عند استخدام توابع تقريبية محققة لمعادلة لاغرانج والشروط الطرفية اللازمة.بالإضافة إلى ذلك درس الترابط الوثيق بين الطرق الطرفية(boundary methods) وطرق الوسط (domain methods) وكيفية الانتقال من الأولى إلى الأخيرة أو بالعكس باستخدام مقولة غاوس في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي. ووضح أن نتائج هذه الطرق واحدة عند مراعاة الشروط المتغيراتية المطلوبة.

فيما سبق وفقنا في حالة دراسة الإطارات في إيجاد توابع تقريبية للانتقالات تحقق المعادلة التفاضلية للمسألة المطروحة بالإضافة إلى تحقيقها للشروط الطرفية الكينماتيكية وشروط الاستمرارية والتطابق على أطراف العناصر المنتهية المتجاورة. أما في حالة البلاطة لم نتمكن بعملية الاستنباط الهندسي التقليدية من تحقيق كافة الشروط المتغيراتية، والشروط التي لم تحقق هي للشروط الطرفية الكينماتيكية، في مثل هذه الحالة يتوقع أن لاتؤدي الطرق المختلفة الممكن استخدامها إلى نفس النتائج.وينصح في مثل هذه الحالة اللجوء إلى تعيين الثوابت العشوائية بالطريقة المشروحة في الفقرة 8-4.ويمكن إضافة الشروط الطرفية الكينماتيكية $\int \delta\sigma^{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i)$ إلى المبدأ المتغيراتي (8.17) باستخدام طريقة مضاريب لاغرانج حينها يتعدل أسلوب المعالجة المطروح ليصبح مكافئاً لطريقة ترفتز.

وختاماً أنوه أن الفقرات المعروضة في جملة الملاحظات الختامية هذه تمثل وجهة نظر المؤلف المستمدة من خبرته في معالجة طرق العناصر المنتهية المختلفة.

10-. References

1 PIAN, T. H. H.: Finite element methods by Variational principles with relaxed continuity requirement in Engineering, Vol 1-3, Southampton England,Southampton Uni. Press, 1973.
2 TREFFTZ,E: Ein Gegenstueck zum Ritzchen Verfahren , Proc, 2nd Int. Cong. Applied mechanics, Zurich , 1926.
3 JIROUSEK, J. and GUEX, L: The hybrid Trefftz finite element model and it is application to plate bending, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 13(1986),651-93.
4 PILTNER,R.: Recent developments in the Trefftz method for finite element and boundary element applications, Advances in Engineering Software 24(1995) 107-115, Elssevier Science, Great Britain, 1995.
5 JIROUSEK,J.; VENKATESH, A.: A new FE approach for adaptive reliability assurance , Comp. Struct., Vol.37(1990) 217-230.
6 Szybinski,B.; Zielinski,A.P.: Alternative T-Complete systems of shape functions applied in analytical Trefftz finite elements, Numerical Methods for Partial Differential Equations 11, 375-388(1995).

7 ABO DIAB,S : DE - Variationad formulation and FEM solution, Int. J. Num. Meth. Eng., 1992 (not published), paper No. 2130.

8 ABODIAB, S.: Differential equation variational formulation for plate bending,Int J. Num. Meth. Eng.,1992(not published),Paper No. 2198.

9 ABO DIAB,S :Direkte Zuordnung des Verschiebungs - und Schnittkraftzustand zum Belastungszustand bei der FEM - Verschiebungsmethode in : Festschrift o. prof. Dr.-Ing habil. Heinz mueller 65 Jahre ehemalige Doktoranden gratulieren,Dresden 1994.

10- أبودياب، سليمان: وجهة نظر في معالجة طريقة العناصر المحددة نموذج الانتقالات, مجلة باسل الأسد للعلوم الهندسية, العدد الثالث , ص17-29, أيلول 1995

11 ABO DIAB, S.: A suggestion for a finite element approach, The first international workshop on Trefftz method-recent development and perspectives, Summuries and final programme, cracow, Poland, 1996

12 ABODIAB, S.: Entwicklung und Einsatz hybrider finiter Stabelemente fuer Aufgaben der linearen Kinetik und Statik von rauemlichen Stabtragwerke - kompakte gerade Staebe, Bauingenieur 66(1991),437-440.

13 ZIENKIEWICZ, O. C. : Methode der finiten Elemente, VEB-Fachbuchverlag, Leipzig 1987.

14 BATOZ, L. J. BEN TAHHAR, M.: Evalution of a new quadrilateral thin plate bending element, Int. J. Num. Meth. Eng., 12(1982),1655-77.

Address : Sulaiman Abo Diab , Faculty of Civil Engineering,
Tishreen University, Lattakia, Syria .

-المصطلحات العلمية -

إنكليزي	فرنسي	عربي
Admissible functions	functions admissibles	توابع افتراضية
Airy stress functions(Airy)	functions des contraintes (Airy)	توابع إجهادات
Anisotrope	Anisotrope	لامتناحي
Antisymmetrical	Antisymmetrique	متناظر عكساً
Approximation functions	functions Approximatives	توابع تقريبية
Arbitrary parameters	Paramètres Arbitraires	معاملات عشوائية
Axisymmetrical	Axisymmetrique	متناظر محورياً
Banded matrix	Matrice Creuse	مصفوفة شريطية
Bars	Treillis	القضبان (المحملة محورياً)
Beams	Poutres	جوائز
Bending moment	Moment de Flexion	عزم انعطاف
Bernoulli- Euler hypothesis	Hypotheses de / /	فرضيات اويلر – برنولي
Body forces	Forces du Volume	القوى الحجمية
Boundary conditions	Conditions aux limites	الشروط الطرفية
- geometrical	- géometrique	- هندسية
- mechanical	- méchanique	- ميكانيكية
Boundary integrals	Integral aux limites	تكامل طرفي

Calculus of variation	Calcul des Variations	حساب المتغيرات
Cauchy stress tensor	Tenseur des contraintes de Cauchy	موتّرة إجهادات كوشي
Compatibility	Compatibilté	تطابق (توافق)
Complementary energy	Energie complementaire	الطاقة المتممة
Complementary virtual work	Travaille virtuelle	العمل الوهمي المتمم
Conditions of compatibility	Condititons de compapatibilité	شروط التطابق
Conservative force	Forces conservatives	قوى محافظة
Constitutive equations	Equations de comportement	معادلات السلوك
Contravariant basis vectors	Vecteursdebase contravariante	أشعة القاعدة الضّدية
Covariant basis vectors	Vecteurs de base covariant	أشعة القاعدة الأساسية
Covariant derivative	Covariant derivé	المشتق الأساسي
Convergence of finite element solution	Convergence de solution des Elements finis	تقارب الحل بطريقة العناصر المنتهية
Curvilinear coordinates	Coordonées curvilignaires	الإحداثيات المنحنية
Cylindrical coordinates	Coordonees cylindriques	الإحداثيات الإسطوانية
Deformation	Deformation	تشوّه
Degrees of freedom	Degrés de liberté	درجات الحرية
Delta operator (δ)	Operateur variationnel	رمز المتغيّر (δ)
Determinant of a matrix	Determinant d'une matrice	معين مصفوفة
Differential equations	Equations differntielles	معادلات تفاضلية
Discretization of a domain	Discretisation d'un domaine	الفصل النقطي للمجال
Displacement model	Modele des deplacements	نموذج الانتقالات

Displacement shape functions	Functions des formes	توابع الشكل للانتقالات
isplacement , the principle of virtual	Deplacement, principe des virtuels	مبدأ الانتقالات الوهمية
Divergence theorem	Théoreme de divergence	مبرهنة التفرق
Eigenvalue problem	Probleme des valeurs propres	مسألة القيم الذاتية
Eigenvalues	Valeurs propres	القيم الذاتية
Eigenvectors	Vecteurs propres	الأشعة الذاتية
Elasticity , matrix	Elasticité, Matrice d'	مصفوفة المرونة
Element , finite	Element Fini	عنصر منتهي
Element matrix	Matrice Elementaire	مصفوفة العنصر
Energy principles	Principes d'énèrgie	مبادىء الطاقة
Equilibrium equations	Equations d'Equilibres	معادلات التوازن
Essential boundary conditions	condititon aux limites Essentielles	الشروط الطرفية اللازمة
Euler lagrange equations	Equations d'Euler Lagrange	معادلات أويلر لاغرانج
Extremum	Extremum	القيمة الحديّة
Field equations	Equations du Champ	معادلات الحقل
Finite element mesh	Maillage des Elements Finis	شبكة العناصر المنتهي
Finite element method	Méthode des	طريقة العناصر المنتهية

	Elements Finis	
First variation	Premiere Variation	المتغيّر الأول
Force vector	Vecteur des Forces	شعاع القوى
Functional	Fonctionel,lle	تابعي
Gauss points	Points de Gauss	نقاط غاوس
Gauss theorem	Théorème de Gauss	مقولة غاوس
Generalized	Généralisé, ée	معمم
Geometrical boundary conditions	Conditions aux limites géometriques	الشروط الطرفية الهندسية
Global coordinates system	Systéme des Coordonées global	جملة الإحداثيات العامة
Governing equation	Equations gouvernés	المعادلة الحاكمة
Gradiant operator	Operateur gradient	معامل التدرج
	Tenseur des Contraintes de Green	موتّرة غرين للتشوّهات
Hermite polynoms	Polynôms d'Hermite	كثيرات حدود هيرميت
Homogeneous material	Materiaux homogenes	مادة متجانسة
	Loi d'Hook	قانون هوك
Hybrid model	Modele hybride	النموذج الهجين
Index	Indice	قرينة
Infini tesimal strain	deformation infinitesi	تشوّه لا متناهي في الصغر
Initial conditions	Conditions initiales	الشروط البدائية
Inner product	Multiplication interne	الجداء الداخلي
Inplane stress	Contraintès planes	الإجهاد المستوي

Interlement continuity	Continuité entere element	الاستمرارية بين العناصر
Internal energy	Energie interne	الطاقة الداخلية
Interpolation functions	Fonctions d'interpolation	توابع استنباط
Invariant property	Proprieté invariant	خاصة غير متغيّرة
Isotropic material	Materiau isotrope	مادة متناحية
Jacobian matrix	Matrice de Jacobie	مصفوفة ياكوبي
Kinetic energy	Energie cinètique	الطاقة الحركية
Kinetics	Cinetique	علم التحريك
Kirchhoff - Love assumptions	Hypothese de Kirchhoff-Love	فرضيات كيرشهوف – لوف
Kroneker delta	Delta de Kroneker	رمز كرونيكر
Lagrange multiplier	Multiplieur de Lagrange	مضاريب لاغرانج
Laplace operator	Opérateur de Laplace	مؤثر لابلاس
Load	Charge	حمولة
Local coordinates	Coordonnées locales	الإحداثيات المحلية (الخاصة)
Material properties	Proprietés des Matériaux	خواص المادة
Mixed model	Modele Mixte	نموذج مختلط
Moment of inertia	Moment d'Inertie	عزم العطالة
Moment resultants	Moment resultant	محصلة العزوم
Natural coordinates	Coordonnées naturelles	الإحداثيات الطبيعية

Neutral axis	Axes naturelles	المحاور المحايدة (السليمة)
Neutral surface	Surfaces naturelles	السطوح المحايدة
Nodal degrees of freedom	Degrés de libértés nodales	درجات حرية العقد
Nonconforming element	Element non-conforme	العنصر غير المتطابق (المنسجم)
Nonlinearity	Nonlinéarité	اللاخطية
Normal stress	Contraintes normales	الإجهادات الناظمية
Numerical convergence of	Convergence numérique de	التقارب العددي
finite element solution	Solution Elements Finis	لحلول طريقة العناصر المنتهية
Numerical integration	Integration numérique	التكامل العددي
One dimensional problem	Problèmes unilatérales	المسائل الأحادية البعد
Operator	Operateur	مؤثر
Orthogonality	Orthogonalité	التعامدية
Orthotropic material	Materiau orthotropique	مادة تناحي متعامد
Particular solution	Solution partieuliere	الحل الخاص
Plane strain	deformation plane	التشوّهات المستوية
Plane stress	Contraintes planes	الإجهادات المستوية
Plate	Plaque	بلاطة
Poisson	Ratio de Poisson	معامل بواسون
Potential energy	Energie potentielle	الطاقة الكامنة
Principle of	Principe de -	مبادىء
Complementary energy	Energie complementaire	– الطاقة المتممة
Potential energy	Energie potentionelle	– الطاقة الكامنة

Virtual forces	Forces virtuelles	– القوى الوهمية
Virtual work	Travaille virtuelle	– العمل الوهمي
Quadratic elements	Element Quadratique	عناصر مربعة
Rectangular element	Element Rectangulaire	عناصر مستطيلة
Rigid body motion	Mouvement de corps Rigide	حركة الجسم الصلد
Rigidity	Rigidité	الصلابة
Ritz approximation	Approximation de Ritz	تقريب ريتز
Shear force resultants	Forces de eisaillement resultantes	محصلة القوى القاصة
Shear moduli	Module de eisaillement	معامل مقاومة القص
Shear stresses	Contraintes de eisallement	إجهادات القص
Shells	Coques	قشريات
Stiffness matrix	Matrice de rigidité	مصفوفة القساوة
Stokes theorem	Théoreme de Stokes	مبرهنة ستوكس
Strain	deformation	تشوّه
Stress	Contraintés	إجهاد
Stress strain relation	Relation de Contraites-deformations	علاقات الإجهادات – التشوّهات
Surface integral	Integral de surface	تكامل سطحي
Surface traction	Traction surfacique	قوى السحب السطحي
Tensor	Tenseur	موتّرة
Thin plates	Plaques minces	بلاطات رقيقة

Torsion	Torsion	فتل
Trefftz	Méthode dé Trefftz	طريقة ترفتز
Triangular element	Element triangulaire	عنصر مثلثي
Truss member	membre de treillis	عنصر جائز شبكي
Unit normal	Vecteur normale	الناظم الواحدي
Unit vector	Vecteur unitaire	شعاع الواحدة
Uniqueness		وحدانية
Variables	Variables	متحولات
Variation	Variation	تغيراتي
Variational calculus	Calcul des variation	حساب المتغيّرات
Variational operator	Operateur variationel	مؤثر تغيّراتي
Variational principles	Principes variationelles	مبادىء متغيّراتية
Virtual	virtuelle	وهمي

المصادر العلمية :

1. Al-Khatib, Ahmed Sh.
A new Dictionary of Scientific and Technical Terms,English-Arabic (fifth Eddition) , Librairie Du Liban,Riad Solh 1981.

2. Briese,K. and others
Dictionary English-German ,24th eddition ,VEB Verlag Enzyklopaedie , Leipzig1980.

يتناول الكتاب طرق العناصر المنتهية المختلفة (نموذج الانتقالات، النموذج الهجين للإجهادات، نموذج ترفتز) وتطبيقاتها في حلول مختلف أنواع المنشآت كالجوائز الشبكية المستوية والفراغية، والإطارات المستوية والفراغية، والبلاطات الرقيقة، والشرائح الرقيقة في حالتي الإجهادات المستوية والتشوهات المستوية. ويقدم معلومات علمية قيّمة وحديثة في مجال مبادئ الطاقة وطرق العناصر المنتهية مستخدماً أساليب وأدوات رياضية متطورة.

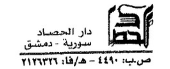
يخدم الكتاب الباحثين العلميين وأعضاء الهيئة التدريسية في الكثير من مجالات العلوم الهندسية والرياضية والفيزيائية والمهندسين الراغبين في فهم معمق لتطبيقات طرق العناصر المنتهية كما يمكن أن يستخدمه الطالب الراغب في التعرف على العرض العصري للمواضيع المذكورة والتعمّق في فهمها.

المؤلف:

- حصل على الإجازة في الهندسة المدنية من جامعة دمشق بدرجة جيد جداً.
- حاز على الدبلوم والدكتوراه في الهندسة المدنية بدرجة ممتاز من جامعة درسدن في ألمانيا.
- عمل باحثاً ومدرساً في جامعة دارمشتات - ألمانيا من عام ١٩٩١ إلى عام ١٩٩٣
- يعمل حالياً أستاذاً مساعداً في كلية الهندسة المدنية - جامعة تشرين - اللاذقية.
- مواليد حصين البحر - سورية ١٩٥٧ .
- سيصدر له: طرق الطاقة في ميكانيك الإنشاءات الخطّي - طرق العناصر المنتهية «الديناميك».



سورية - دمشق - برامكة - ص.ب: ٢٢٢٩



ص.ب: ٤٤٩٠ - هـ/فا: ٢١٢٦٣٢٦